

La fourmi

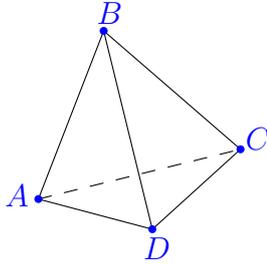
Équipe DREAM



Table des matières

# 1 Énoncé du problème

Une fourmi peut rentrer ou sortir dans un piège par le point A. Quand elle est à un sommet, elle choisit au hasard une des trois arêtes qui passent par ce sommet. La fourmi est vivante si elle retourne au point A en ayant parcouru au plus 4 arêtes.



Sa chance de survie est-elle supérieure ou inférieure à une chance sur deux ?

Essaye d'estimer sa chance de survie.

Variante : On peut choisir un autre polyèdre sur lequel se déplacerait la fourmi.

## 2 Choix du problème

### 2.1 Compétences transversales

- Former les élèves à la pensée statistique et aux phénomènes aléatoires.
- Construire des outils de synthèse (tableaux, arbres, pourcentages, fréquences).
- Construire des outils de représentation (diagrammes et graphiques divers).
- Construire des caractères de position d'une série statistique (moyenne, médiane...).

### 2.2 Connaissances mathématiques

- Calculer des fréquences ou des pourcentages.
- Dénombrer.
- Calculer une probabilité.
- Utiliser la notion de fraction.

## 3 Analyse mathématique du problème

**Première solution** : L'univers est constitué de tous les chemins possibles que la fourmi peut parcourir ne dépassant pas quatre arêtes.

On nomme S l'évènement : "la fourmi survit à cette expérience c'est-à-dire la chaîne de sommets contient exactement un autre A".

Par exemple :

- $A - B - C - A$  est une chaîne pour laquelle la fourmi survit,
- $A - B - C - D - B$  est une chaîne pour laquelle la fourmi meurt.



On nomme  $A_i$  l'évènement : « la fourmi a parcouru  $i$  arête(s) », avec  $i$  un entier entre 1 et 4.

$$P(S) = P(S \cap A_1) + P(S \cap A_2) + P(S \cap A_3) + P(S \cap A_4)$$

Or  $P(S \cap A_1) = 0$  car en partant de A, la fourmi ne peut pas revenir sur A.

$$P(S \cap A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

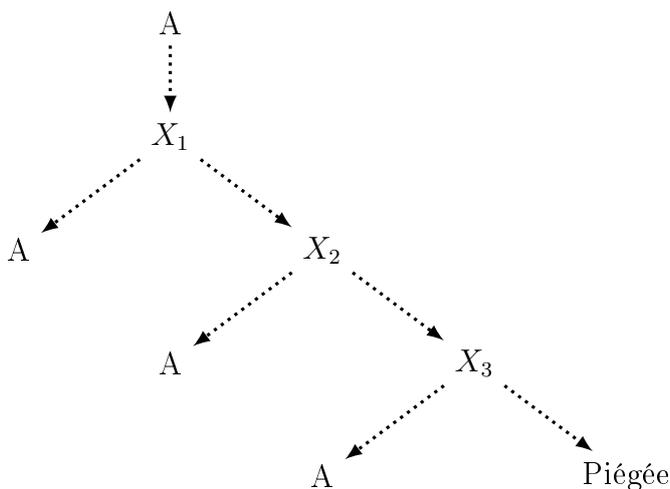
$$P(S \cap A_3) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$

$$P(S \cap A_4) = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

$$\text{Donc } P(S) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} = \frac{19}{27}$$

Attention à ne pas se restreindre à un arbre où les branches s'arrêtent dès qu'on obtient le sommet A!

**Deuxième solution :** On considère l'évènement contraire à S.



Nous avons donc  $P(\bar{S}) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$   
car on a deux chances sur trois de ne pas se retrouver en A quand on est au nœud  $X_i$ .

## 4 Analyse de productions

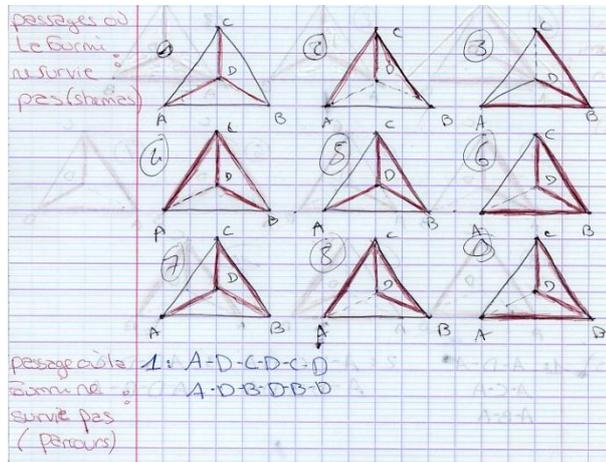
Cette recherche peut étonner les élèves par son caractère peu conventionnel. Elle permet de mettre en œuvre des discussions riches entre les élèves, en particulier sur le mot « chance ».



Des élèves donnent à la fourmi une intelligence suffisante pour sortir du piège, privant ainsi la promenade de son caractère purement aléatoire.

On peut observer les stratégies suivantes :

- L'utilisation de schémas permet de débiter la recherche avec notamment l'écriture de chaînes de lettres.

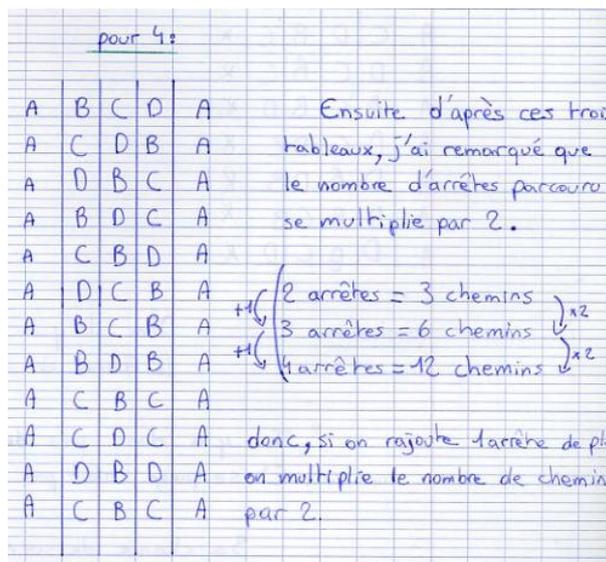


Pour faciliter le dénombrement, celles-ci peuvent être ordonnées :

- $A - B - C - D - A$
- $A - B - C - D - B$
- $A - B - C - D - C$

...

Certains élèves s'interrogent sur le calcul du nombre de permutations de trois lettres ou sur celui du nombre de chemins en fonction du nombre d'arêtes.



Pour un groupe de 1 lettre ABC se prend A et se fabrique deux petite groupe de mots es ABC, ACB se contiennent avec une autre lettre B, BA, CAB, CBA <sup>lettre</sup> différent, si de fait 3x6 se met bien pas le résultat voulu car se calcul marche sur des groupes de 1 lettre plus grand que 4 lettre

- Dans l'expérience, il n'a pas été observé d'arbres, toutefois cela peut nourrir un point du compte-rendu.
- Certains élèves ont l'intuition de l'équiprobabilité des chemins. Ils calculent le rapport de tous les chemins « vivants » sur tous les chemins possibles avec les erreurs que cela implique. Par exemple, pour les chemins constitués de quatre arêtes,  $A - B - A$  correspond en réalité à neuf chemins ( $A - B - A - B - A$ ;  $A - B - A - B - C$ ;  $A - B - A - B - D$ ;  $A - B - A - C - A$ ..).

Question Estimer si sa chance de survie est supérieur a 2 sur 2?

Avec le groupe pour savoir si sa chance de survie est supérieur a 1 sur 2 on cherche tous les chemins ou la fourmi vit et la ou elle meurs. Voirs sur brouillons. On a trouver 15 ou elle vit et 12 ou elle meurs. Puis après on additionne les 2 nombres  $15 + 12 = 27$

Calcul  $15 + 12 = 27$

Ensuite on va le mettre sous forme de fraction. On prend 27 = denuminateurs et 15 = numérateur. Donc =  $\frac{15}{27}$

Conclusion. Oui sa chance de survie est supérieur a 1 sur 2 car sa chance de survie est de  $\frac{15}{27}$  chance de survie environ.

on obtiendrait alors le nombre de chemins dans la figure peut en placerait le résultat obtenu sous forme de fraction. Ce qui nous donnerait le nombre de chance sur un nombre de chemins es:

$$x + y = B ; \frac{x}{B}$$

La fourmi a x chance sur B de survie

$x$  = nombre de chemins valide  
 $y$  = nombre de chemins invalide  
 $B$  = nombre de chemins valide et invalide