Les puissances

Équipe DREAM

Table des matières

1 Énoncé du problème

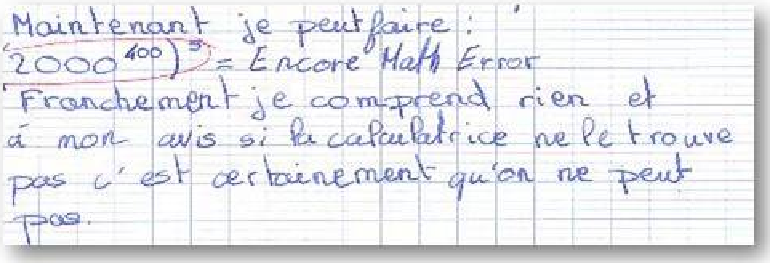
Le chiffre des unités de 13^1 est 3.
Le chiffre des unités de 13^2 est 9.

- Quel est le chiffre des unités de 13^3 ?
- Quel est le chiffre des unités de 13^4 ?
- Quel est le chiffre des unités de 13^5 ?
- Quel est le chiffre des unités de $13^{2\,000}$?
- Quel est le chiffre des unités de $13^{50\,003}$?

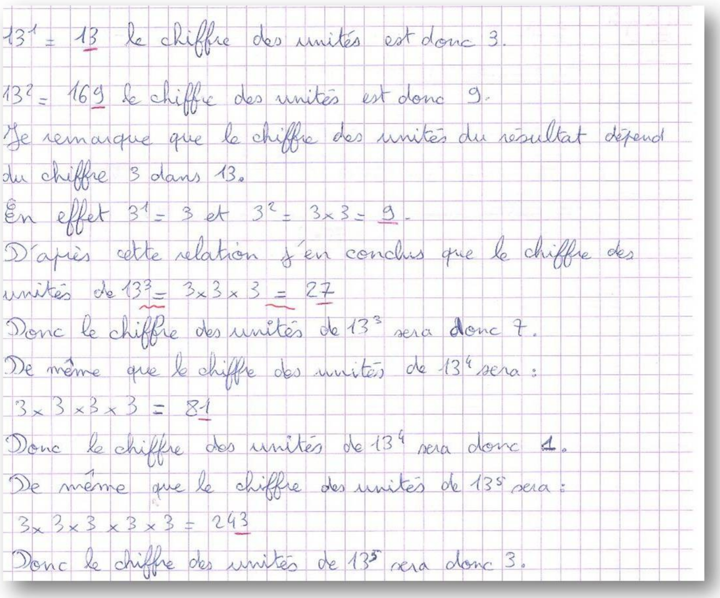
2 Choix du problème

2.1 Compétences transversales

- Lire attentivement l'énoncé : c'est ici impératif pour éviter de partir dans de longs et fastidieux calculs. Ce n'est effectivement pas le résultat du calcul qui est demandé mais seulement le chiffre des unités.
- Faire preuve de suffisamment d'autonomie face à la calculatrice : cet exercice peut être résolu correctement et complètement à cette condition. Les derniers calculs ne peuvent effectivement pas être affichés par la calculatrice de collège.


Maintenant je peut faire :
$(2000^{400})^5$ = Encore Math Error
Franchement je comprend rien et
á mon avis si la calculatrice ne le trouve
pas c'est certainement qu'on ne peut
pas.

- Rédiger rigoureusement pour éviter des confusions, notamment au niveau mathématique avec l'emploi souvent abusif du signe « = ».


$13^1 = 13$ le chiffre des unités est donc 3.
$13^2 = 169$ le chiffre des unités est donc 9.
Je remarque que le chiffre des unités du résultat dépend
du chiffre 3 dans 13.
En effet $3^1 = 3$ et $3^2 = 3 \times 3 = 9$.
D'après cette relation j'en conclus que le chiffre des
unités de $13^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$
Donc le chiffre des unités de 13^3 sera donc 7.
De même que le chiffre des unités de 13^4 sera :
$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
Donc le chiffre des unités de 13^4 sera donc 1.
De même que le chiffre des unités de 13^5 sera :
$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$
Donc le chiffre des unités de 13^5 sera donc 3.

- Mettre en place une technique logique : il est nécessaire de mettre en évidence la répétition d'une même suite de chiffres et non pas réitérer indéfiniment la multiplication par 3 ou 13.

2.2 Connaissances mathématiques

- Utiliser la notion de puissance vue en classe de quatrième.
- Utiliser la calculatrice : les élèves peuvent ainsi entrer facilement dans le problème.
- Simplifier les calculs : reconnaître que les suites des chiffres des unités des puissance de 13 et de 13 sont les mêmes.
- Utiliser la division euclidienne en repérant la répétition d'une suite de quatre chiffres. A partir de la classe de Terminale, on peut aussi faire appel à la notion de congruence modulo 4.

3 Analyse mathématique du problème

La résolution de ce problème s'effectue en deux étapes.

1. Il est nécessaire de mettre en évidence la répétition d'une suite de quatre chiffres.

   Les premiers calculs conduisent aux résultats suivants obtenus avec la calculatrice :
   - le chiffre des unités de 13^1 est 3 ;
   - le chiffre des unités de 13^2 est 9 ;
   - le chiffre des unités de 13^3 est 7 ;
   - le chiffre des unités de 13^4 est 1 ;
   - le chiffre des unités de 13^5 est 3.

   La réapparition du chiffre 3 multiplié au nombre 13, donne à nouveau 9 comme chiffre des unités et ainsi de suite. La période de la suite de chiffres qui apparaît est donc : 3 - 9 - 7 - 1.

2. Puisque la suite a une période de quatre chiffres, les calculs avec un grand exposant nécessitent d'effectuer une division euclidienne par 4.
   - Pour $13^{2\ 000}$, on a $2\ 000 = 4 \times 500$ (ou avec les congruences : $2\ 000 \equiv 0(4)$), ce qui signifie que la période de quatre chiffres se répète exactement 500 fois et que le chiffre des unités du résultat est le dernier de la période.
     <u>Le chiffre des unités de $13^{2\ 000}$ est donc 1.</u>
   - Pour $13^{50\ 003}$, on a $50\ 003 = 4 \times 12\ 500 + 3$ (ou avec les congruences : $50\ 003 \equiv 3(4)$), ce qui signifie que la période de quatre chiffres se répète 12 500 fois et est suivie de trois chiffres.
     <u>Le chiffre des unités de $13^{50\ 003}$ est donc 7.</u>

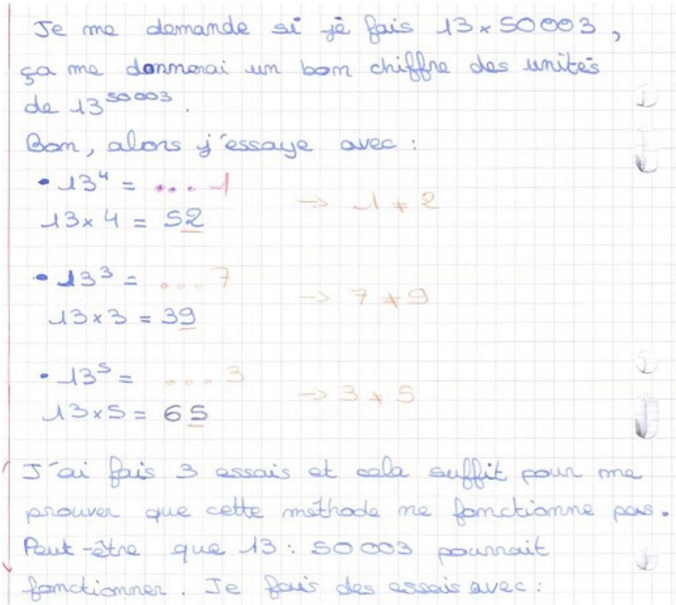
4 Analyse de productions

- La majorité des élèves réalise rapidement que seul le chiffre des unités est à prendre en compte.

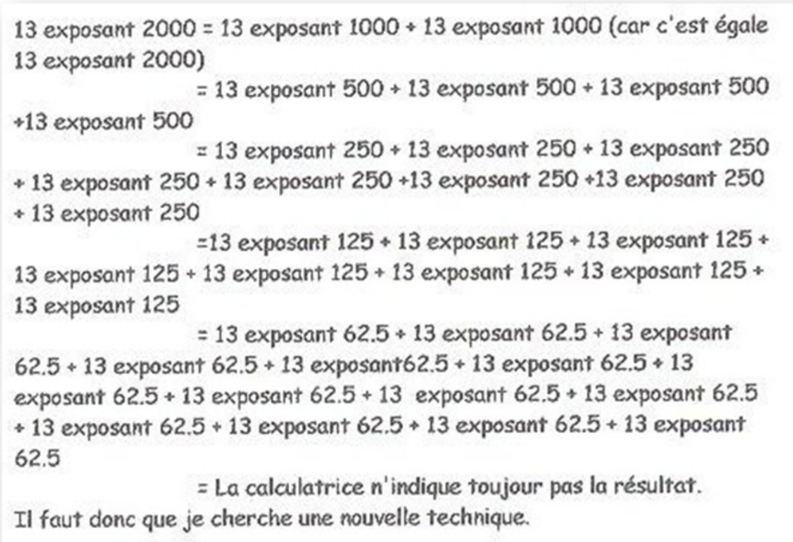
Je ne comprend pas la consigne demandé je fais le calcul 13^3. Je trouve 2197, je relis mot à
$13^3 = 2197$ mot la consigne.

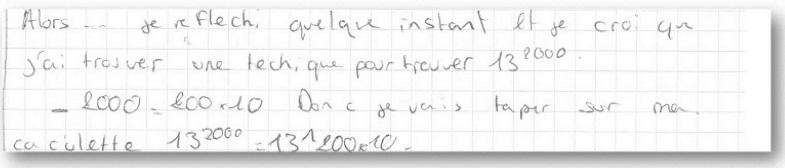
J'ai compris, il faut trouver les unité du résultat donc dans 2197 le chiffre des unités est 7.

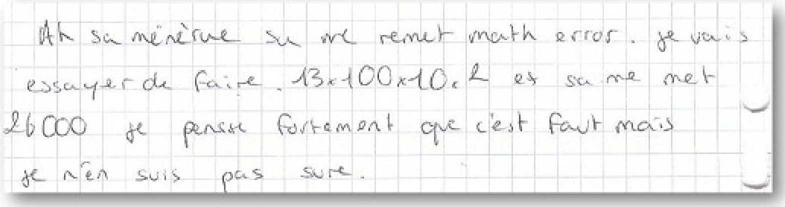
- On peut s'attendre à voir apparaître l'erreur classique de confusion entre puissance et multiplication.


Je me demande si je fais 13 × 50003,
ça me donnerai un bon chiffre des unités
de 13^{50003}.
Bon, alors j'essaye avec :
• 13^4 = ...1
13 × 4 = 52 → 1 ≠ 2
• 13^3 = ...7
13 × 3 = 39 → 7 ≠ 9
• 13^5 = ...3
13 × 5 = 65 → 3 ≠ 5
J'ai fais 3 essais et cela suffit pour me prouver que cette méthode ne fonctionne pas.
Peut-être que 13 : 50003 pourrait fonctionner. Je fais des essais avec :

- De nombreux élèves sont confrontés aux limites de la calculatrice. Ils sont arrêtés par un message d'erreur lorsque le résultat est trop grand pour être affiché. Cela peut être l'occasion pour le professeur de revenir sur des *théorèmes élèves* comme $13^{a+b} = 13^a + 13^b$ ou $13^{a\times b} = 13^a \times b$.

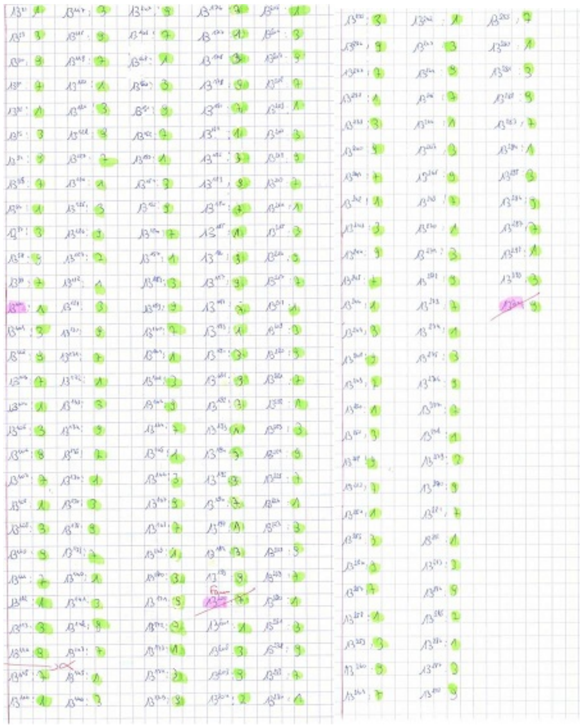

13 exposant 2000 = 13 exposant 1000 + 13 exposant 1000 (car c'est égale 13 exposant 2000)
= 13 exposant 500 + 13 exposant 500 + 13 exposant 500 +13 exposant 500
= 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 + 13 exposant 250 +13 exposant 250 +13 exposant 250 + 13 exposant 250
=13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125 + 13 exposant 125
= 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5 + 13 exposant 62.5
= La calculatrice n'indique toujour pas la résultat.
Il faut donc que je cherche une nouvelle technique.


Alors ... je reflechi quelque instant et je croi que j'ai trouver une techique pour trouver 13^{2000}.
– 2000 = 200 × 10 Donc je vais taper sur ma caculette 13^{2000} = 13^200×10.



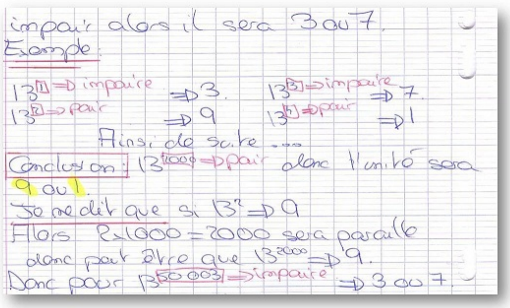
Ah sa ménèrve sa me remet math error. je vais essayer de faire. 13x100x10.2 es sa me met 26000 je pense fortement que c'est faut mais je n'en suis pas sure.

- Certains élèves calculent les puissances successives sans essayer de trouver une suite logique. C'est l'occasion pour le professeur de pointer la nécessité d'essais organisés et réfléchis.



- D'autres ne trouvent pas la période mais organisent leur recherche en différenciant, par exemple, les exposants pairs et impairs.

Je remarque que si l'exposant est pair alors l'unité sera 1 ou 9 et si l'exposant



impair alors il sera 3 ou 7.
Exemple:
$13^{\boxed{1}}$ ⇒ impaire ⇒ 3. $13^{\boxed{3}}$ ⇒ impaire ⇒ 7.
$13^{\boxed{2}}$ ⇒ pair ⇒ 9 $13^{\boxed{4}}$ ⇒ pair ⇒ 1
Ainsi de suite ....
Conclusion : $13^{\boxed{1000}}$ ⇒ pair donc l'unité sera 9 ou 1.
Je me dit que si 13^2 ⇒ 9
Alors 2x1000 = 2000 sera pareille donc peut être que 13^{2000} ⇒ 9.
Donc pour $13^{\boxed{50\,003}}$ ⇒ impaire ⇒ 3 ou 7.

- On a remarqué cependant que beaucoup d'élèves réussissent à mettre en évidence la période de quatre chiffres. Une étape supplémentaire est nécessaire pour utiliser ce résultat lorsque l'exposant est grand. Le professeur est amené à pointer l'utilisation de la division euclidienne.