# Problème :
# La boite sans couvercle

**Durée théorique : 9 heures**

## Connaissances et compétences attendues :

| Comprendre et utiliser la notion de fonction | |
|---|---|
| • Vocabulaire : variable, fonction, antécédent, image<br>• Différents modes de représentation d'une fonction (expression symbolique, tableau de valeurs, représentation graphique, programme de calcul)<br>• Notations $f(x)$ et $x \mapsto f(x)$<br>• *Fonction linéaire, fonction affine* | Passer d'un mode de représentation d'une fonction à un autre<br>Déterminer, à partir d'un mode de représentation, l'image ou un antécédent d'un nombre par une fonction<br>*Représenter graphiquement une fonction linéaire, une fonction affine*<br>Modéliser un phénomène continu par une fonction<br>*Modéliser une situation de proportionnalité à l'aide d'une fonction linéaire*<br>Résoudre des problèmes modélisés par des fonctions |

## Commentaires :

Les fonctions affines et linéaires seront étudiées en seconde partie, en rituel de classe, après avoir bien compris la notion générale de fonction et vu plusieurs exemples (non affines)

## Compétences mathématiques principalement mobilisées :

| | |
|---|---|
| **Chercher** | • S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture. |
| **Modéliser** | • Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques). |
| **Représenter** | • Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique. |
| **Raisonner** | • Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions. |

| | |
|---|---|
| **Communiquer** | • Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française.<br>• Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange. |

**Contenu :**

**Doc 1 -**

# Thème : Analyse de la situation

## Enoncé du problème

À partir d'une feuille de papier au format A4, on veut construire le patron d'une boite sans couvercle qui a la forme d'un parallélépipède rectangle et qui a le plus grand volume possible. **Quelles sont ses dimensions ?**

## Solution mathématique

Voir le document « Analyse_BoiteSansCouvercle.pdf » sur le site DREAMaths ( https://clarolineconnect.univ-lyon1.fr/icap_website/1324/34805 ) dans la section « Autres travaux -> panier à problèmes »

## Les mathématiques en jeux

- forme(s) d'un patron d'un parallélépipède rectangle (sans couvercle)
- formule du volume d'un parallélépipède rectangle et de l'aire d'un rectangle
- dépendance d'une grandeur (le volume) en fonction d'une autre (la hauteur)
- production de formules et/ou de méthodes en utilisant le calcul littéral (expression algébrique d'une fonction)
- utilisation du tableur (tableau de valeurs d'une fonction)
- utilisation du grapheur (représentation graphique d'une fonction)*

** le point critique de cette fonction n'est pas un nombre décimal, les élèves ne le trouveront pas par essai « à la main » et n'auront qu'une valeur approchée avec le tableur. La représentation graphique leur permettra de conjecturer plus facilement le maximum recherché.*

## Analyse des connaissances, méthodes et procédures possibles

- Le recours au patron de type « optimal » se fait assez naturellement car les élèves ont l'intuition (fausse!) de faire un lien entre la surface latérale et le volume, pensant ainsi qu'en optimisant l'aire, on optimise le volume
- la construction par essais-erreurs (constructions de plusieurs patrons avec des dimensions radicalement différentes pour comprendre l'effet des cas extrêmes sur le volume). L'erreur commise dans ce cas est de se fier aux dimensions mesurées (qui ne sont pas rigoureusement justes)
- les calculs (sans forcément construire le patron correspondant) en utilisant les dimensions d'une feuille A4 (la représentation du patron de la boite sur un schéma vient ici valider la compétence « représenter »)
- un tableau de valeurs synthétisant tous les essais et permettant ainsi de conjecturer un volume maximal
- création/utilisation d'une formule pour exprimer la longueur et/ou la largeur et/ou le volume en fonction de la hauteur

**Doc 2 -**

# Thème : Mise en œuvre de la situation

**➡ Phase 0 (*facultative*) :**

Demander aux élèves, en devoir à faire à la maison, de construire, à l'aide d'une feuille, le patron d'une boite ayant la forme d'un parallélépipède rectangle (pavé droit) sans couvercle (il manque une face). Les dimensions et la forme du patron n'ont aucune importance.

**➡ 1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10-15 min)**

**Temps de présentation des enjeux de la séance**

Présentation du contrat didactique, des enjeux, des attentes et du rôle des élèves.

Rechercher, faire des essais (dessins), prendre des initiatives et trouver les dimensions du patron qui leur semble être le meilleur candidat… Une place importante est accordée ici aux arguments qui vont venir soutenir que le patron proposé est « le meilleur ».

**Temps de familiarisation avec problème**

Présentation du problème, à partir de présentation de patrons faits en devoir à la maison. L'enseignant peut sélectionner plusieurs patrons (corrects ou non) et faire discuter la classe sur la validité de ces patrons et sur leurs différents volumes (par ex, lequel semble avoir le plus grand volume)

**Temps de recherche individuelle (au moins 5 min)**

Ce temps peut être supprimé si un premier patron a été construit à la maison par chaque élève.

**➡ 2ème phase : recherche en groupe (entre 30 min et 1 heure)**

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourages à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

**➡ 3ème phase : mise en commun et débat (au moins 30 min)**

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en communs prennent leur sens.

**➡ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)**

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les points techniques évoqués par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés
- les savoirs mathématiques utilisés

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice**.

**Il faut compter au moins 3 heures pour une mise oeuvre complète (car il y a beaucoup de manipulation par les élèves)**

**Remarque :** la preuve du volume maximal n'est pas dans le programme de cycle 4 mais les élèves peuvent assez naturellement s'en convaincre à l'aide d'un tableur.

**Doc 3 -**

# Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème

## Ce qui peut apparaitre dans le bilan de la recherche

- Formule du volume d'un parallélépipède rectangle
- Forme du patron optimal
- Le « meilleur » patron obtenu par la classe
- Différentes formules/méthodes pour exprimer l'une des grandeurs en fonction de le hauteur
- Des conjectures entre aire du patron et volume de la boite
- …

## Proposition de prolongements, appelés « études » pour travailler le programme à partir de ce bilan.

### Etude 1 - Recherche de la solution optimale

Retour sur les formules permettant de faire  de multiples essais à l'aide d'un tableur pour conjecturer le volume maximal et trouver la hauteur correspondante

Institutionnaliser les formules exprimant les longueur/largeur en fonction de la hauteur

Représentation graphique des différents points  créés à l'aide du tableur => visualisation graphique du maximum

### Etude 2 - Le volume de la boite  FONCTION de la hauteur

Introduction de formalise de fonction (notation V(h) ou h-> V(h)) pour la fonction étudiée précédemment (préciser les deux grandeurs en jeux ici)

Lien entre la formule, le tableau de valeur et la représentation graphique (représentation continue grâce à géogébra).

Introduction du vocabulaire *image* et *antécédents*

### Etude 3 - Entrainement et utilisation de la notion de fonction

Exercices d'applications ou problèmes de brevet. Un travail sur le changement de registre est essentiel

**Remarque :** Cette proposition de plan est générique et ne doit contraindre l'enseignant. En fonction des résultats de la classe, plusieurs structures de séquence et plusieurs approfondissements seront envisageables.

Remarque : On peut également envisager d'enchainer avec l'étude plus approfondie des fonctions affines et linéaires. Le choix qui a été fait ici aura été de différer l'étude de ces fonctions à plus tard dans l'année, lors des rituels de début d'heure et des séances d'AP. Le document 5 propose quelques ressources utilisées à cette occasion.

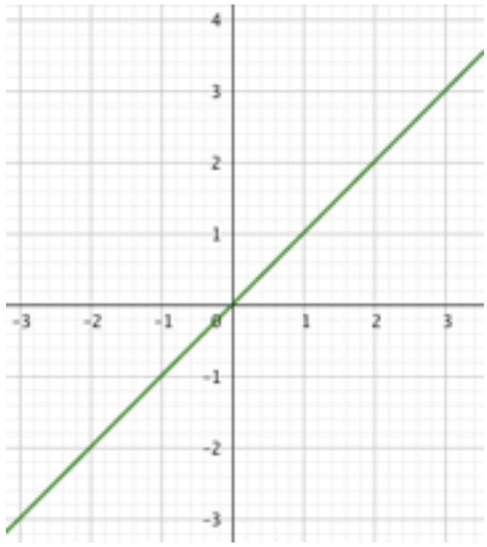
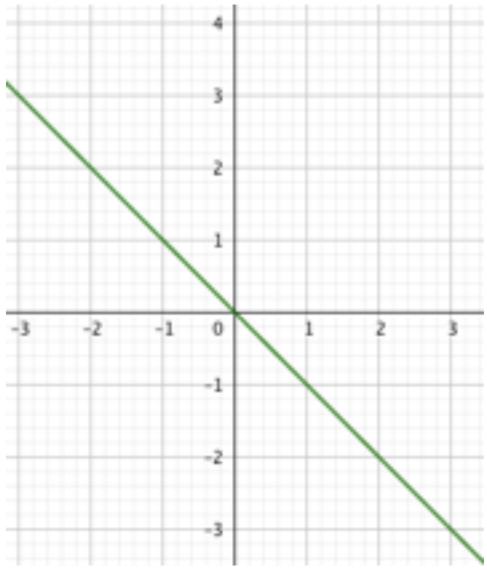
**Doc 4 -**

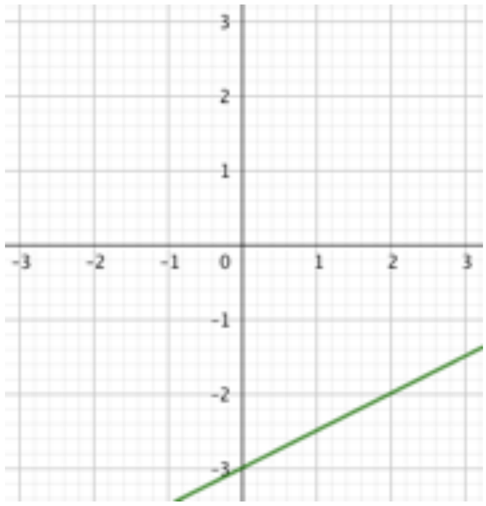
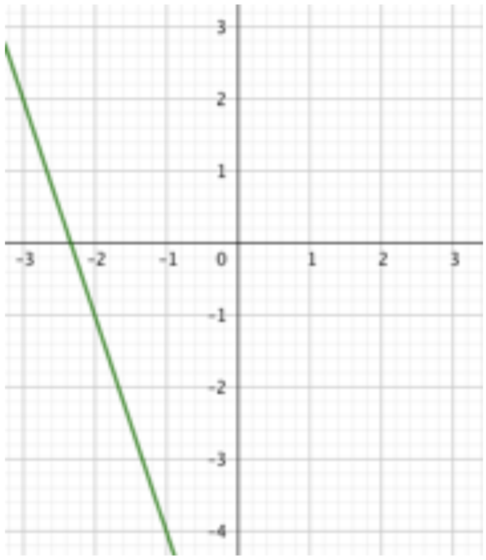
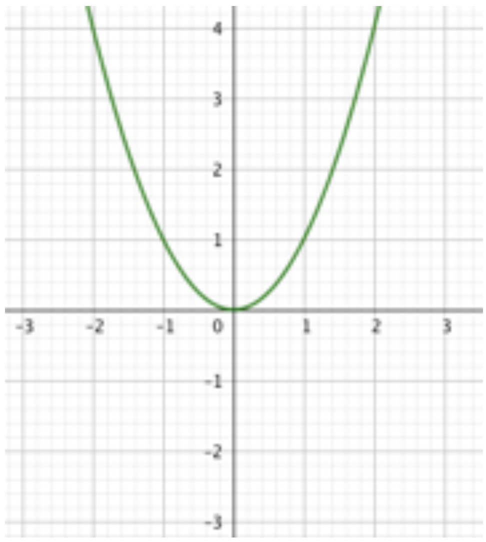
# Thème : Ressources sur les fonctions

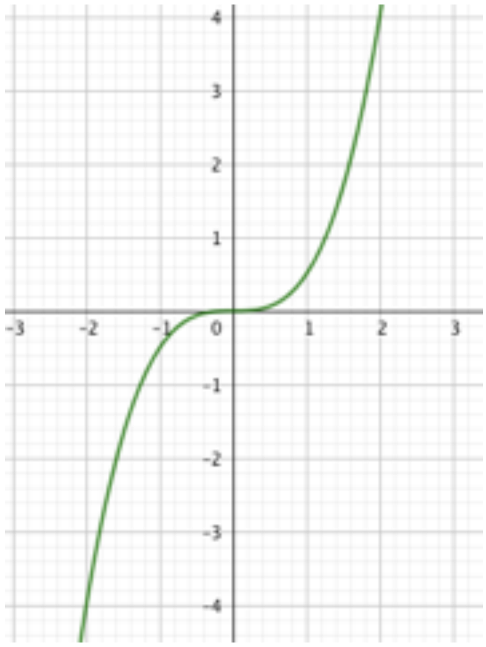
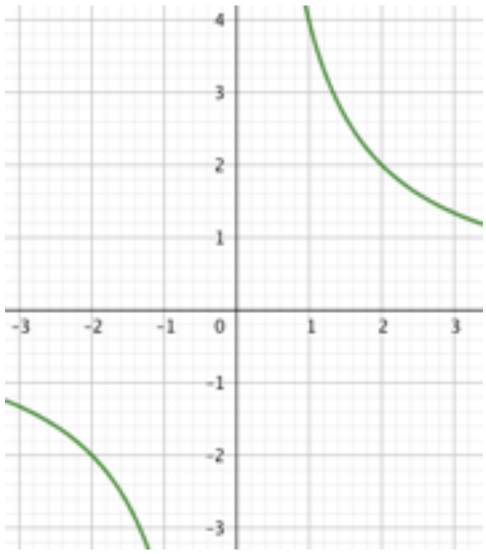
## Les 7 familles

Voici 7 familles (ou 7 fonctions) qui sont chacune composées de 4 membres (ou registres) : le langage naturelle, la représentation graphique, le tableau de valeurs et l'expression algébrique.

Voici les 7 familles décrites :

<table>
<tr><th>Langage naturel</th><th>Expression algébrique</th><th>Tableau de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>l'image est égale à son antécédent.</td><td>$x \mapsto x$</td><td><table><tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr><tr><td>Images</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>l'image est l'opposée de son antécédent</td><td>$x \mapsto -x$</td><td><table><tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr><tr><td>Images</td><td>2</td><td>0</td><td>-1.5</td><td>-3</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Langage naturel</th><th>Expression algébrique</th><th>Tableau de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>en divisant l’antécédent par deux et en retranchant 3 au résultat, on trouve son image.</td><td>$x \mapsto \frac{x}{2} - 3$</td><td><table><tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr><tr><td>Images</td><td>-4</td><td>-3</td><td>-2.25</td><td>-1.5</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>en multipliant l’antécédent par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve son image</td><td>$x \mapsto -3x - 7$</td><td><table><tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr><tr><td>Images</td><td>-1</td><td>-7</td><td>-11.5</td><td>-16</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
<tr><td>l’image est égale au carré de son antécédent</td><td>$x \mapsto x^2$</td><td><table><tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr><tr><td>Images</td><td>4</td><td>0</td><td>2.25</td><td>9</td></tr></table></td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Langage naturel</th><th>Expression algébrique</th><th>Tableau de valeurs</th><th>Représentation graphique</th></tr>
<tr><td>l'image est égale au cube de son antécédent divisé par 2.</td><td>$x \mapsto \frac{x^3}{2}$</td><td>
<table>
<tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Images</td><td>-4</td><td>0</td><td>1.69</td><td>13.5</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
<tr><td>Le produit de l'image et de l'antécédent est toujours égal à 4</td><td>$x \mapsto \frac{4}{x}$</td><td>
<table>
<tr><td>Antécédents</td><td>-2</td><td>0</td><td>1.5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Images</td><td>-2</td><td>∞</td><td>2.67</td><td>1.33</td></tr>
</table>
</td><td></td></tr>
</table>

Mise en œuvre possible : par groupe de 4, les élèves disposent des 28 cartes (4x7) et doivent les regrouper par familles

*La correction se fera à l'aide de géogébra.*

## Objectifs :

- Travailler les différentes registres (interprétation graphique, expression algébrique, valeurs numériques, langage naturel
- Travailler le lien entre les différents registres.
- Inclure le vocabulaire officiel (image, antécédent…)

## Les boites noires

Voici une activité à faire en exercice rituel pour travailler sur l'expression algébrique d'une fonction à partir de son tableau de valeurs:

**Support :** utilisation du fichier *.xls* fournit par l'IREM de Paris-Nord.

*Réponses :*

| | Vert | Bleu | Rouge | Noir |
|---|---|---|---|---|
| **Série 1** | x -> x + 3 | x -> x - 2 | x -> 2x | x -> -3x |
| **Série 2** | x -> 2x + 1 | x -> 3x - 1 | x -> 5x - 4 | x -> -2x+7 |
| **Série 3** | x -> 0,5x + 0,5 | x -> 0,2x - 0,6 | x -> -0,5x + 0,25* | x -> -0,3x - 0,4 |
| **Série 4** | x -> x^2 + 1 | x -> 2x^2 - 3 | x -> x^2 + x - 1 | x -> 2x^2 - 3x + 1 |

* problème d'affichage du résultat. A ne pas proposer aux élèves.

**Objectifs :**
- Conjecturer une formule algébrique pour chaque « boite noire ».
- Manipuler la notation des fonctions.
- Manipuler la notion d'image et d'antécédent dans un registre numérique.

## A qui le graphe ?

Voici plusieurs activités à faire en exercice rituel pour travailler l'interprétation graphique de l'évolution d'une grandeur :

http://www.experiencingmaths.org : situations déjà modélisés avec analyse de l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre.

- **courbes et volumes:** il s'agit d'associer le graphe (*hauteur en cm en fonction du vol en L*) au récipient correspondant.

  **Matériel nécessaire:** Les élèves ont à leur disposition une image de chaque récipient ainsi qu'une liste de graphique. Il s'agit donc d'associer le graphique représentant la hauteur d'eau en fonction du volume d'eau. Une animation viendra confirmer ou infirmer le choix du graphique par les élèves.

  **Consignes pour les élèves :** Ces six récipients ont même hauteur (90 cm) et même volume (90 L). le graphique indique le niveau de remplissage des récipients en fonction du temps.
  Quelle est la courbe de remplissage de chaque récipient ?
- **courbes et vitesse:** Il s'agit de trouver le circuit de course correspondant au graphe proposé.

## Entrainement classique

Fiche d'exercices sur pyromanes
Exercices du manuel iParcours

**Doc 5 -**

# Thème : Ressources sur les fonctions linéaires et affines

## Quelques problèmes « type brevet »

### Téléchargement légal

Un site internet de vente de musique propose de télécharger légalement de la musique. Il propose deux offres:
- Offre A: 1,20 € par morceau téléchargé avec un accès gratuit au site.
- Offre B: 0,50 € par morceau téléchargé moyennant un abonnement annuel de 35 €.

On souhaite étudier l'offre la plus économique en fonction du nombre de téléchargements annuels.

1. Calculer, pour chaque offre, le prix pour 30 morceaux de musique téléchargés par an.
2. Si on dépense 42 € avec l'offre A, combien de morceaux de musique peut-on télécharger ?
3. Si on dépense 45 € avec l'offre B, combien de morceaux de musique peut-on télécharger ?
4. On note $f$ la fonction représentant le prix de l'offre A en fonction du nombre $x$ de morceaux téléchargés. Donner l'expression algébrique de $f$.
5. On note $g$ la fonction représentant le prix de l'offre B en fonction du nombre $x$ de morceaux téléchargés. Donner l'expression algébrique de $g$.
6. Pour quels nombres de morceaux téléchargés est-il préférable de choisir l'offre A? Et pour l'offre B? Justifiez votre réponse.
7. Représenter, dans un repère orthogonal, les représentations graphiques des deux fonctions $f$ et $g$. On prendra 1 cm pour 10 morceaux de musique en abscisse et 1 cm pour 10 € en ordonnée.
8. A l'aide de la lecture graphique, peut-on retrouver le résultat de la question 6 ? Expliquer.
9. Si on dépense 60 € avec l'offre A, combien de morceaux de musique peut-on télécharger ?
10. Si on dépense 80 € avec l'offre B, combien de morceaux de musique peut-on télécharger ?

*Réponses: 30 morc 36 € et 50 € ; 35 m ; 20 m ;* $f(x)=1{,}2x$ , $g(x)=0{,}5x+35$ ; $f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow x\leq 50$ *; 50 m; 50 m; 90 m.*

### Un peu de physique

*En physique, la tension U aux bornes d'une « résistance » est proportionnelle à l'intensité I du courant qui la traverse, c'est-à-dire : U = R × I, où R (valeur de la résistance) est le coefficient de proportionnalité.*

*On rappelle que l'unité d'intensité est l'ampère et que l'unité de tension est le volt.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **L'intensité I (en ampères)** | 0,02 | 0,03 | 0,04 | 0,08 |
| **Tension U (en volts)** | 3 | 4,5 | 6 | 12 |

1.

a. Vérifier que ce tableau est un tableau de proportionnalité.
b. Quel est le coefficient de proportionnalité?
c. Calculer la tension U si l'intensité I vaut 0,07 ampère.

On nomme $f$ la fonction qui donne la tension U en fonction de l'intensité I.

2. Préciser la nature de la fonction $f$ et donner l'expression algébrique de $f(I)$.
3. Tracer, dans un repère la représentation graphique de la fonction $f$. On choisira comme unité 2 cm pour 0,01 ampère en abscisse et 1 cm pour 2 volts en ordonnée.
4. Lire graphiquement l'intensité quand U = 10 volts (donner une valeur approchée avec la précision permise par le graphique).

Déterminer par un calcul la valeur exacte de l'intensité quand U = 10 volts.

## Prolongement

*En physique, la puissance P de la « résistance » est le produit de la tension U à ses bornes et de l'intensité I qui la traverse, c'est à dire $P = U \times I$.*

*On rappelle que l'unité de puissance est le watt.*

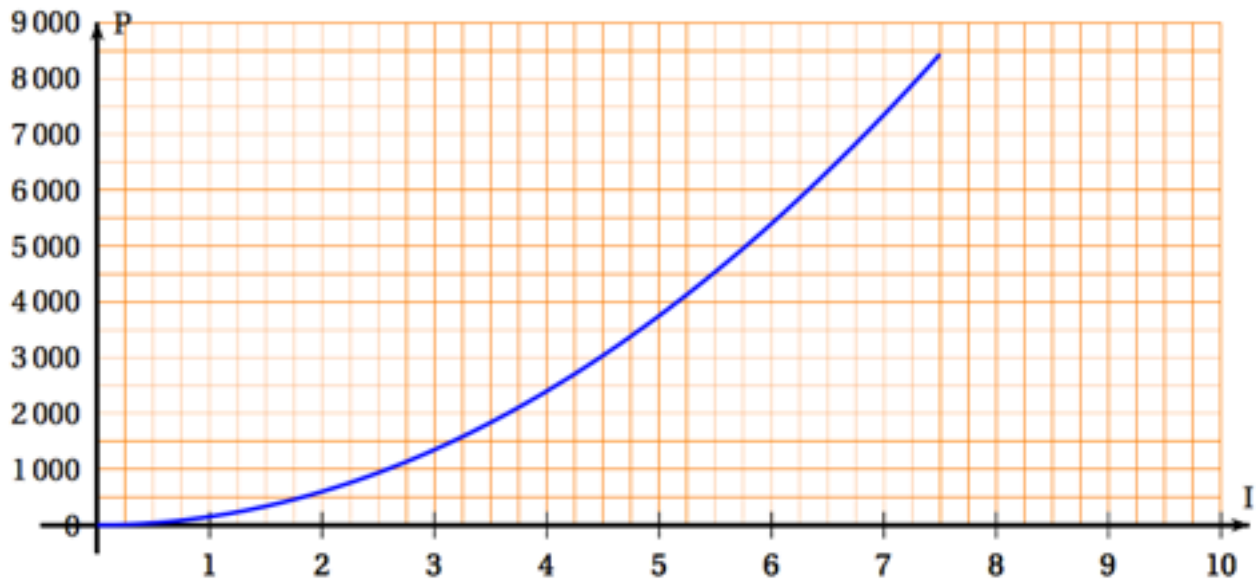
1. En utilisant l'expression obtenue à la question 3 de la partie précédente, justifier que:

$$P = 150 \times I^2$$

*On nomme $g$ la fonction qui donne la puissance P en fonction de l'intensité I.*

2. Calculer l'image de 7,5 par la fonction $g$.

Voici la courbe représentative de la fonction $g$.




3. Lire graphiquement la puissance P quand I = 5 ampères (on fera apparaître sur le graphique les traits de construction ayant permis la lecture).
4. Lire graphiquement un antécédent de 2500 par la fonction $g$ (on fera apparaître sur le graphique les traits de construction ayant permis la lecture). La puissance P est-elle proportionnelle à l'intensité I ? Justifier la réponse.

## Les abonnés d'une revue

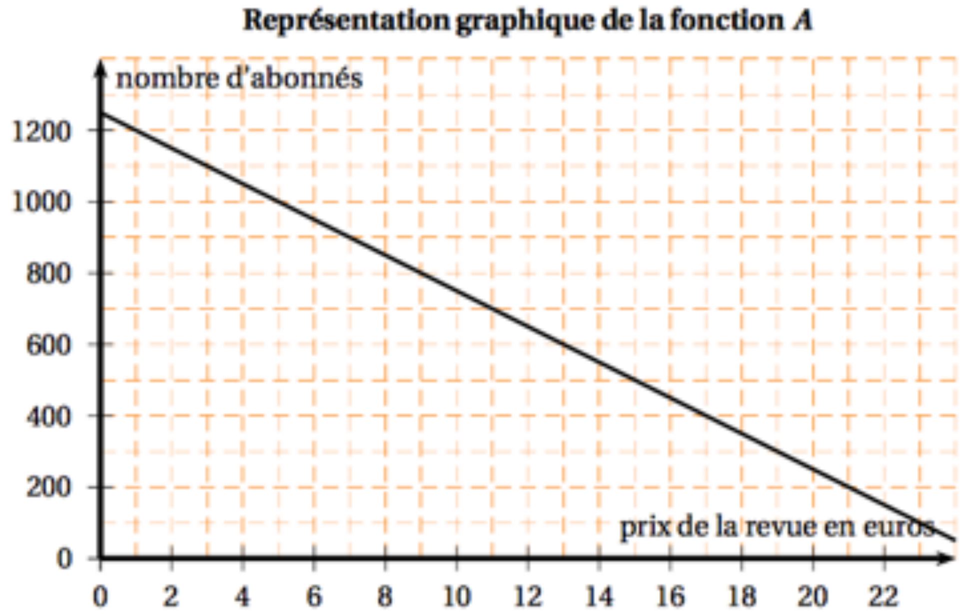
Le nombre d'abonnés à une revue dépend du prix de la revue.

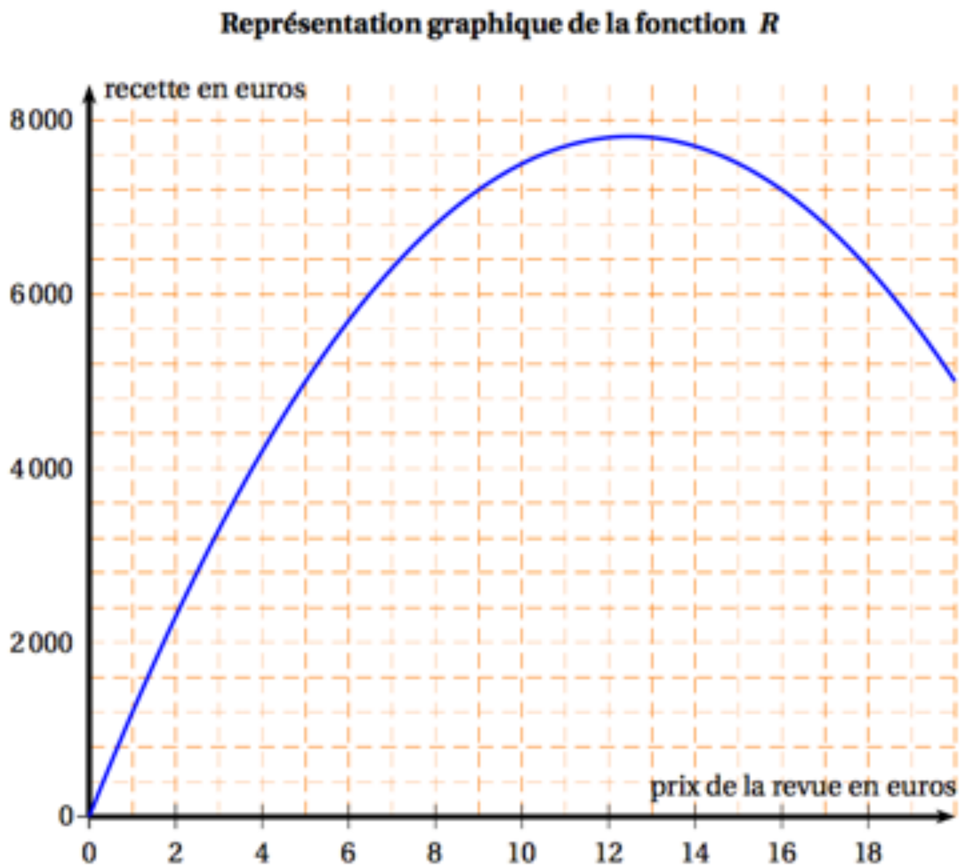
Pour un prix $x$ compris entre 0 et 20, le nombre d'abonnés est donné par la fonction A telle que :

$$A(x) = -50x + 1250$$

La recette, c'est-à-dire le montant perçu par l'éditeur de cette revue, est donnée par la fonction R telle que :

$$R(x) = -50x^2 + 1250x$$




1. Le nombre d'abonnés est-il proportionnel au prix de la revue?Justifier.
2. Vérifier, par le calcul, que A(10)=750 et interpréter concrètement ce résultat.
3. La fonction R est-elle affine?Justifier.
4. Déterminer graphiquement pour quel prix la recette de l'éditeur est maximale.

5. Déterminer graphiquement les antécédents de 6800 par R.
6. Lorsque la revue coûte 5 euros, déterminer le nombre d’abonnés et la recette.

## **Un TP sous géogébra**

*Voir fichier pdf pages suivantes.*

# Les fonctions affines et linéaires

## Reconnaitre des fonctions affines et linéaires

On considère 5 fonctions que l'on va appeler *f*, *g*, *h*, *p* et *q*. Voici leurs expressions algébriques :

$$f(x) = 2x - 3$$
$$g(x) = 3x$$
$$h(x) = x^2 + 1$$
$$p(x) = -x + 1$$
$$q(x) = x^3 - 2$$

| |
|---|
| **Définitions :** |
| On appelle **fonction affine** une fonction dont l'expression algébrique est de la forme $ax+b$ |
| On appelle **fonction linéaire** une fonction dont l'expression algébrique est de la forme $ax$ |

### Questions :

1) Parmi les 5 fonctions précédentes, quelle(s) est(sont) celle(s) qui est(sont) affine(s) ?

2) Graphiquement, quelle est la particularité des fonctions affines ?

3) Parmi les 5 fonctions précédentes, quelle(s) est(sont) celle(s) qui est(sont) linéaire(s) ?

4) Graphiquement, quelle est la particularité des fonctions linéaires ?

# Description graphique des fonctions affines et linéaires

Dans l'expression algébrique d'une fonction affine $ax+b$ et d'une fonction linéaire $ax$ :

- a est appelé le **coefficient directeur**
- b est appelé **l'ordonnée à l'origine**

Sur une nouvelle page de géogébra, tracer les 5 fonctions suivantes :

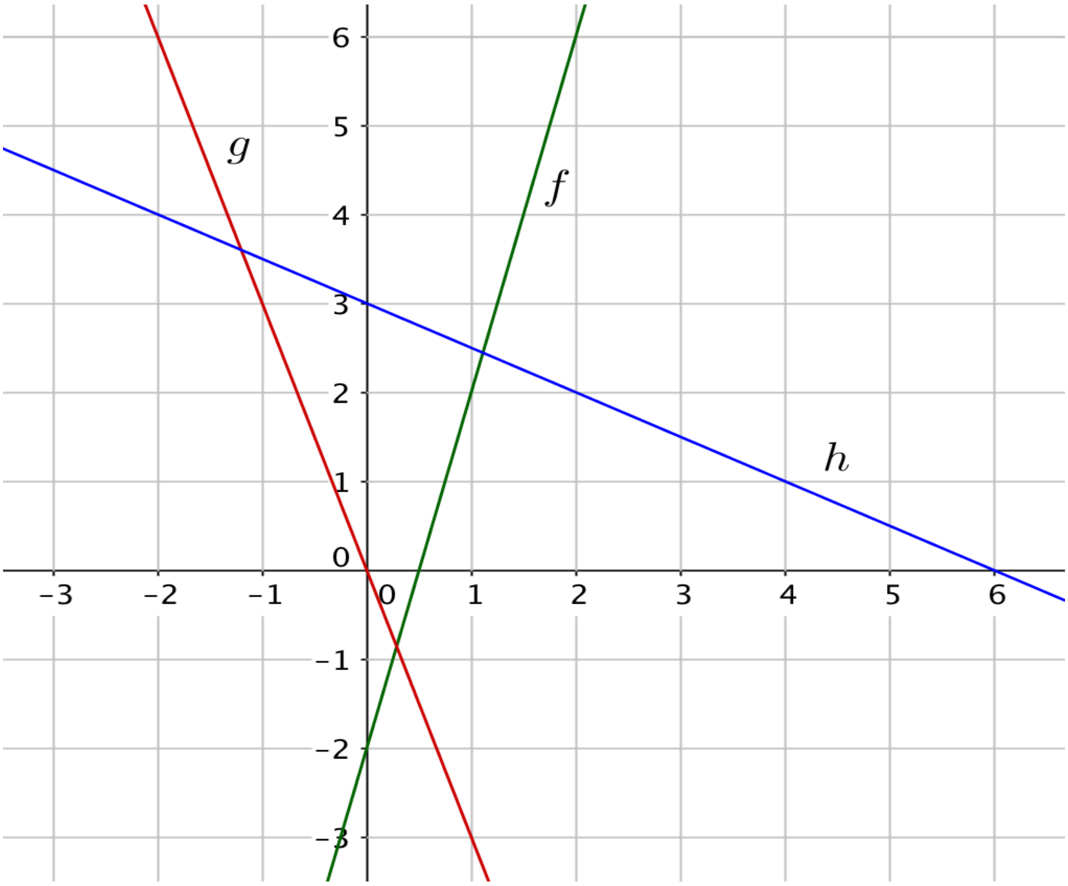
$$f(x)=2x-3$$
$$g(x)=3x+1$$
$$h(x)=-x+2$$
$$p(x)=2x$$
$$q(x)=-4x$$

## <u>Questions :</u>

1) En observant ces 5 représentations graphiques, à quoi correspond le coefficient directeur ?
2) En observant ces 5 représentations graphiques, à quoi correspond l'ordonnée à l'origine ?

# Du graphique à l'expression algébrique

Voici la représentation graphique de 3 fonctions :




**<u>Questions :</u>**

1) Le(s)quelle(s) est(sont) affine(s) ?
2) Le(s)quelle(s) est(sont) linéaire(s) ?
3) Retrouve l'expression algébrique de ces 3 fonctions à l'aide de la représentation graphique.