Octobre 2022 – 2nde 6 lycée Ampère – Problème des nombres trapézoïdaux
Compte-rendu de séance

Présentation
Séance de 2h. Ce jour-là, 32 élèves sont là.
Je présente la séance aux élèves : « je vais vous donner l'énoncé d'un problème dont la solution est loin d'être immédiate, vous allez d'abord chercher seul-e pendant 5 à 10 minutes, puis je répondrai aux demandes de précision sur l'énoncé s'il y en a, ensuite vous vous mettrez par groupes de 3 à 4 et vous chercherez ensemble pendant une petite heure. Je vous donnerai alors une affiche sur laquelle vous présenterez l'état de vos recherches puis chaque groupe fera cette présentation oralement à tous les autres. Vous pourrez alors échanger. Enfin, je tâcherai de faire une synthèse de vos travaux ».

Énoncé
Je projette au tableau une diapo (venant de je ne sais qui !). En haut à gauche, en petit, il est écrit « nombres trapézoïdaux, le problème ».
Au centre, en gros, l'énoncé : « Trouver tous les nombres entiers qui sont la somme d'au moins deux nombres entiers naturels consécutifs ».

Recherche individuelle
Dès le début de cette phase, des questions fusent auxquelles je ne réponds pas : c'est quoi un nombre entier naturel, c'est quoi consécutif ? Un élève, sans être entendu du reste de la classe, me demande si ça a à voir avec les trapèzes. Ça sera la seule fois de toute la séance.
Au bout d'une petite dizaine de minutes, je demande de se répartir en groupes, ça va assez vite.

Recherche en groupes
Je commence par demander ce qu'il faut préciser, et donne donc la définition de « nombre entier naturel », précise ce que signifie « consécutif », et confirme que 0 est un entier naturel.

Très vite, un premier groupe me dit qu'il « a trouvé : les nombres impairs sont tous égaux à $x + (x+1)$ ».
Je demande alors ce qu'il en est des nombres pairs.
La plupart des groupes, là aussi très rapidement, veulent que je passe les voir pour valider quelque chose (un résultat, un début de démarche). J'essaie à chaque fois de me contenter de poser une question.

Quelques petits coups de pouce donnés au fil de la séance à des groupes qui bloquent :
- Un groupe reste uniquement sur quelques exemples de sommes à 2, 3 ou 4 termes et tombe à chaque fois sur un résultat impair, et n'arrive pas pour autant à formuler la moindre conjecture, même quand je leur demande « alors, est-ce que vos calculs vous conduisent à formuler une propriété plus générale ? » Je leur propose alors de chercher une décomposition en somme de nombres entiers consécutifs de 3749. Je leur donnerai ensuite d'autres nombres à décomposer (4;6;8;10 ; etc)
- Un groupe écrit des choses du genre :
  $(10-3)+(10-2)+(10-1)+10+(10+1)+(10+2)+(10+3)=7\times 10$.
  Je propose d'essayer de « généraliser ».
- Un groupe trouve que :
  $x+(x+1)+(x+2)=3k$, $x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+5)=5k$ et pense que c'est généralisable à tous nombre premier mais bloque un long moment car ne voit pas comment généraliser. Je finis par dire « et si vous appeliez p ce nombre premier ? ».
- 3 groupes sont sur la question des puissances de 2 et veulent montrer qu'elles sont inatteignables. Je demande ce qu'il en est pour un nombre différent d'une puissance de deux, je demande comment s'écrit un tel nombre.

D'autres interventions ponctuelles du genre « faites encore des essais, donnez une méthode pour décomposer un nombre impair, vous avez essayé avec d'autres nombres pairs que 2 et 4, etc ».

Au bout d'une heure, je distribue des feuilles A3 vierges pour la confection des affiches. Celle-ci prendra une bonne quinzaine de minutes, je m'attendais à ce que cela prenne beaucoup moins de temps. A la lecture de celles-ci, je constate que les groupes ont eu beaucoup de mal à valoriser ce qu'ils avaient fait. Les affiches contiennent beaucoup moins d'informations ou de résultats que ceux réellement trouvés ou approchés pendant l'heure de recherche. Le fait de ne pas pouvoir présenter une conclusion ferme et justifiée pose un souci aux élèves qui ne réussissent donc pas vraiment à faire un compte-rendu complet de l'état de leurs travaux. La remarque « mais on n'a rien trouvé » est faite par plusieurs groupes.

Présentation orale

Du fait du temps mis à la confection des affiches, il ne reste que dix minutes pour la présentation orale de leur affiche par chaque groupe. Je décide donc d'être assez interventionniste afin de pointer, pour chaque groupe, tout ce qu'il a réellement fait, expérimenté, trouvé, mais dont il n'a pas toujours rendu compte.
Du coup, manque de temps et interventionnisme du prof, très peu d'échanges entre élèves à ce moment-là.

Bilan

Séance très réussie sur le plan de l'implication des élèves. Seul un groupe de 3 élèves a nécessité des relances régulières de ma part pour se motiver. Très nombreux et nombreuses sont les élèves m'ayant dit en fin de séance que c'était « super, à refaire, et est-ce que vous nous donnerez la solution ? »
Sur le plan mathématiques, seul un groupe a été assez hors sujet (sans que je ne m'en rende compte pendant la phase de recherche…) en ayant mal compris l'énoncé et en ayant travaillé sur la somme des chiffres d'un nombre et les critères de divisibilité.
Tous les autres groupes ont abordé la notion de parité, la plupart a établi que tout nombre impair est somme de deux entiers consécutifs. Beaucoup sont passés par le calcul littéral et ont aperçu certaines régularités dans les expressions $2x+1$, $3x+3$, $4x+6$, etc.
Trois groupes ont abordé la question des puissances de deux mais aucun n'a vraiment réussi à caractériser le fait qu'un nombre non puissance de deux est multiple d'un impair.
Sur l'organisation de la séance, il aurait fallu que j'interrompe plus tôt la phase de recherche en groupes afin d'avoir davantage de temps de mise en commun en fin de séance.
Enfin, le fait de « n'avoir rien trouvé » a rendu difficile la confection des affiches. J'ai pourtant bien insisté sur le fait que les affiches ne présentaient pas forcément des résultats assurés et démontrés mais un état des lieux des recherches et conjectures faites, mais ça reste sans doute trop inhabituel par rapport aux attendus classiques de résolution d'exercices de maths en classe.

Suite

Le lendemain, je suis revenu sur le problème, en partant le plus possible de ce que les élèves avaient fait. J'ai d'abord montré comment décomposer un nombre impair en somme de deux entiers consécutifs, j'ai aussi repris les différents formules $2x+1$, $3x+3$, $4x+6$, etc, en expliquant que la régularité observée pouvait être généralisée (mais sans le faire), en parlant aussi multiples, nombre impair de termes.
Enfin, j'ai repris la décomposition donnée par un groupe $(x-p)+(x-p+1)+\ldots(x+p)$ et l'ai étendu à un nombre pair de termes $(x-p+1)+\ldots(x+p)$ pour montrer que dans les deux cas, qui recouvrent donc tous les cas possibles, on arrive à un multiple d'un nombre impair. J'ai aussi montré, à l'aide d'un exemple, que cela permettait de trouver une décomposition pour tout multiple d'un impair, quitte à avoir dans la première somme des nombres négatifs opposés des premiers termes positifs.
Je n'ai pas du tout abordé l'aspect « géométrique » (nombres trapézoïdaux, nombres triangulaires) puisque ce point n'avait pas du tout été abordé par les élèves.

Sébastien Nesme.