

Problème

Quel quotient ?

Connaissances et compétences attendues en lien avec le programme :

Comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers	
<ul style="list-style-type: none"> • Nombres décimaux (positifs et négatifs) • Fractions, nombres rationnels (positifs et négatifs). • Égalité de fractions (démonstration possible à partir de la définition du quotient) • Ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire 	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, repérage sur une droite graduée) • Passer d'une représentation d'un nombre à une autre • Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels en écriture décimale, fractionnaire • Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée • Calculer avec des nombres décimaux • Effectuer des comparaisons pour traiter des problèmes

Compétences mathématiques principalement mobilisées :

Chercher	<ul style="list-style-type: none"> • S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture.
Représenter	<ul style="list-style-type: none"> • Produire et utiliser plusieurs représentations des nombres.
Calculer	<ul style="list-style-type: none"> • Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel). • Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements.
Communiquer	Expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Contenu :

- I. Analyse de la situation
- II. Mise en oeuvre de la situation
- III. Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème
- IV. Ressources sur les fractions

Thème : Analyse de la situation

Énoncé du problème :

On étudie les nombres compris entre 0 et 1, qui sont le quotient de deux nombres entiers.

Parmi ces nombres, quels sont ceux qui sont des nombres décimaux ? Comment décrire les autres ?

Solution mathématique

Voir le document « Analyse_Quotient.pdf » sur le site DREAMaths (www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Les mathématiques en jeu

- Nombre décimal, nombre rationnel
- Développement décimal d'un nombre rationnel
- Comparaison de rationnels, équivalence d'écriture
- (*A compléter*)

Analyse des connaissances, méthodes et procédures possibles

Voir le document « Analyse_Quotient.pdf » sur le site DREAMaths (www.dreamaths.univ-lyon1.fr)

Doc 2 -

Thème : Mise en œuvre de la situation

➔ 1ère phase : présentation et recherche individuelle (environ 10 min)

Temps de présentation des enjeux de la séance (2 min)

Présentation des attendus de la recherche: une observation des nombres compris entre 0 et 1, de leur écriture décimale, de la manière de les obtenir ... L'idée est de faire un état des lieux des résultats que l'on peut obtenir et de leur différentes représentations.

Temps de familiarisation avec problème (3 min)

Une reformulation orale est nécessaire car la phrase est longue et il y a des contraintes :

- on se restreint à l'intervalle $[0,1]$
- définition du mot quotient
- on cherche les nombres résultats d'une division (-> contraintes sur le choix des dividendes et diviseurs...)

Temps de recherche individuelle approfondi (5 min)

Appropriation et approfondissement du problème par chaque élève, remédiation individuelle par le professeur si besoin.

Si la recherche ne démarre pas, on peut décomposer le problème de la sorte :

- 1) comment obtenir des quotients compris entre 0 et 1
- 2) parmi ces quotients, comment reconnaître les nombres décimaux ?
- 3) comment décrire les autres nombres ?

➔ 2ème phase : recherche en groupe (entre 50 min)

Phase de recherche d'une stratégie commune et élaborations de conjectures. L'enseignant circule parmi les groupes, les encourage à formuler des conjectures, trouver des éléments de preuve, apporter des justifications etc.

Phase de rédaction d'une affiche pour la mise en commun.

➔ 3ème phase : mise en commun et débat (30 min)

L'organisation de la mise en commun peut dépendre des productions :

- Si les stratégies et conjectures formulées sont variées, il est intéressant que chaque groupe expose ses résultats pour enrichir le débat.
- Si les stratégies et conjectures sont similaires, il peut suffire de faire présenter le travail de quelques groupes puis de débattre et d'approfondir autour des résultats proposés.

Il faut absolument garder du temps pour le débat pour que les mises en commun prennent leur sens.

➔ 4ème phase : bilan de la recherche (environ 10 min)

Faire le point sur tout ce qui a été produit par les élèves. Distinguer :

- les observations formulées par les élèves
- les raisonnements et méthodes utilisés

- les savoirs et faits mathématiques évoqués

Il faut cependant rester un minimum synthétique. Il s'agit surtout d'avoir un référentiel de ce qui a été travaillé dans ce problème. **A écrire en rouge dans le cahier d'exercice.**

Il faut compter au moins 2 heures pour une mise oeuvre complète

Doc 3 -

Thème : Une proposition de « plan » pour l'étude de ce problème et des fractions

Bilan de la recherche : ce qui peut apparaître

Voici un exemple de bilan d'une classe :

* Le nombre que l'on divise s'appelle le dividende. Le nombre par lequel on divise s'appelle le diviseur. On a la relation "dividende : diviseur = quotient"

* Pour que le quotient soit compris entre 0 et 1 il faut : "dividende < ou = diviseur"

* pour un quotient, il existe plusieurs divisions :

-> on peut multiplier le dividende et le diviseur par un même nombre

-> on peut prendre un autre dividende et un autre diviseur qui sont proportionnels

* un nombre entier est un nombre décimal : $1 = 1,0$ (sa partie décimale est nulle)

* $2:3 = 0.66666\dots$ sa partie décimale est infinie. Ce n'est pas un nombre décimal

$6 : 7 = 0,8571428571\dots$; $8:9 = 0.888889$ <- la calculatrice arrondit !

I. Reconnaître les nombres décimaux

Retour sur la « définition » d'un nombre décimal (partie décimale finie) ; lien avec les divisions par 10^n et les fractions décimales.

Application : à partir de n'importe quel nombre décimal compris entre 0 et 1 ; retrouver au moins une division de deux nombres entiers qui correspond.

II. Les nombres rationnels

Exemples de quotients non décimaux. Quels particularités ? Lien avec la partie décimale périodique et infinie.

Comment les écrire plus simplement, lien avec l'écriture fractionnaire et utilisation de l'égalité **diviseur x quotient = dividende** pour vérifier.

Exemples de nombres irrationnels (Pi, constante de Champernowne etc.)

III. Equivalence d'écriture des nombres rationnels

Un quotient (ou une fraction) est le résultat de plusieurs divisions (ou admet plusieurs écritures).

Idée de preuve à l'aide de la définition du quotient (initiation aux équations ou utilisation de la proportionnalité)

IV. Comparaison de fractions et droites graduées

V. Fractions et proportions

Une fraction d'une quantité se traduit par le calcul « fraction x quantité ».

Thème : Ressources sur les fractions

Pas de ressources spécifiques mis à part les exercices et activités classiques du manuel