

# Retour d'expérience : construction d'une séquence autour de la recherche du problème de la télécommande - 4e 2022-2023 - collège P.E. Victor

Préalables :

\*préparation de séance avec une collègue de DREAM ayant expérimenté le problème en 3e en 2020-2021 : partage autour de sa séquence "Probabilités" avec un focus sur les productions de ses élèves, la gestion du débat et la construction de la synthèse de recherche.

\*séquences sur les nombres rationnels et l'arithmétique (notamment pour la simplification de fraction) : travaillée en 4e en amont.

\*Remarque : les pourcentages n'ont pas été explicitement retravaillés et la séquence sur les Statistiques arrive plus tard, après les Probabilités, dans la progression annuelle des 4e.

## I- Introduction au vocabulaire autour des Probabilités : 1h

Mise en scène de 3 expériences aléatoires en classe entière (manipulation concrète du matériel)

Construction collective de l'institutionnalisation

MATHEMATIQUES : Séquence 8 PROBABILITES - 4emes - cours

### GESTION DE DONNEES

#### A- SAVOIR-FAIRES A ACQUERIR

- 1) Utiliser le vocabulaire des probabilités
- 2) Calculer des probabilités (à partir d'événements contraires ; en les exprimant sous différentes formes ; en sachant qu'une probabilité est comprise entre 0 et 1)

#### B- VOCABULAIRE

Une **expérience aléatoire** est une expérience pour laquelle on connaît, a priori tous les résultats - **issues** - possibles, mais quand on réalise l'expérience on ne sait pas lequel de ces résultats va se produire.

Obtenir une ou plusieurs issues constitue un **événement**.

Exemples :

| Expérience aléatoire  | Pioche une carte dans un jeu de 32 cartes   | Lance un dé à 6 faces   | Lance une pièce de monnaie          |
|---|---|---|-------------------------------------|
|  |  |  |                                     |
| Nombre d'issues possibles   | 32 issues possibles :<br>As de cœur ; 7 de trèfle ; ...                             | 6 issues possibles :<br>1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6   | 2 issues possibles :<br>Pile ; Face |
| Événement certain<br>Probabilité = 1  | « Obtenir un cœur ou un pique ou un trèfle ou un carreau »                          | « Obtenir un nombre entre 1 et 6 »  | « Obtenir Pile ou Face »            |
| Événement impossible<br>Probabilité = 0   | « Obtenir un 4 de carreau »   | « Obtenir 8 »   | « Obtenir 2 fois Pile »             |

Remarques :

- A tout événement E, on peut associer son **événement contraire**, noté  $\bar{E}$  : deux événements sont contraires s'il se produit forcément l'un ou l'autre.  
Exemple : Dans l'expérience aléatoire « lance un dé à 6 faces », l'événement contraire à l'événement « Obtenir 1 ou 6 » est : « NE PAS obtenir 1 ou 6 », c'est-à-dire « obtenir 2 ou 3 ou 4 ou 5 ».
- Deux **événements** sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire en même temps.  
Exemple : Dans l'expérience aléatoire « lance un dé à 6 faces », « Obtenir 1 ou 6 » et « Obtenir 3 » sont incompatibles.

2 exercices d'application sur le vocabulaire autour des Probabilités à terminer pour la séance suivante

## II- Recherche du problème : 2h en co-enseignement avec la Professeure Documentaliste

- Document support des traces écrites de recherche prédisposés dans les îlots avant l'entrée en classe des élèves + distribution d'un énoncé écrit en support de la vidéo qu'ils s'approprient à visionner.

### Les Dudus se disputent la télécommande

source : DREAMaths-IREM de Lyon et [mathix.org](http://mathix.org)

4ème

Cette activité de recherche sur les **Probabilités** est à coller dans le cahier de recherche.

Pour savoir qui peut utiliser la télécommande de la télévision, un des deux Dudus propose de lancer trois pièces :

- si elles tombent toutes les trois du même côté alors il donne la télécommande,
- sinon il la garde.

Pour montrer que le jeu est équitable, il raisonne de la façon suivante :

Parmi les trois pièces, deux tombent forcément du même côté. Il ne reste que la troisième qui peut tomber d'un côté ou de l'autre.

Il y a donc une chance sur deux d'obtenir ou non la télécommande.

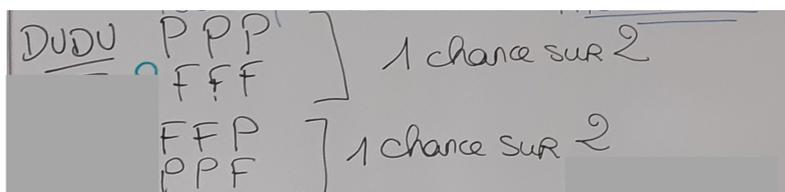
#### Et vous, qu'en pensez-vous ?

Chacun peut effectuer 10 lancers de trois pièces et noter les occurrences de l'événement « les trois pièces tombent du même côté ».

- diffusion de la [vidéo de la télécommande](#) : avec une coupure au milieu pour valider que les élèves entendent la bande son correctement et sont capables de reformuler la situation observée.
- Présentation aux élèves (répartis en 6 îlots de 3 ou 4) du déroulement de séance envisagé : il ne s'agit pas de leur première recherche et ils sont donc familiers avec les modalités présentées
  - Recherche individuelle : 5 min
- reformulation par les élèves en collectif de l'objectif de la séance
  - Recherche en îlot + synthèse de la position du groupe "Arnaque ou pas arnaque ?" : 35 min
- récréation
  - Restitution orale et débat : 30 min
  - Synthèse du débat : 10 min
  - Ouverture : 10 min

### a- Recherche individuelle :

- Malgré notre insistance avec la Professeure Documentaliste sur la nécessité pour chaque élève de "mettre son cerveau en activité de recherche" sans interagir avec ses voisins dans un premier temps, la moitié des groupes ne résiste pas à commencer à échanger ensemble sur le problème posé.
- Le support destiné à recueillir la trace écrite de recherche - Feuille A3 avec 4 zones périphériques pour recueillir les traces écrites individuelles et 1 zone centrale pour préparer la trace écrite du groupe - n'a pas besoin d'être montré, les élèves se l'appropriant rapidement (ce n'est pas la première fois qu'ils l'utilisent). Cependant, nous incitons certains élèves qui commencent à tracer leur réflexion dans leur cahier de recherche individuel, à plutôt utiliser ce support commun pour nous permettre de récupérer l'ensemble des productions écrites du groupe à l'issue de la recherche.
- L'objectif de la recherche "statuer sur le fait qu'il y a arnaque ou non et argumenter" est reformulée sans difficulté par les élèves.
- La répartition des rôles dans les groupes se fait spontanément pour la plupart d'entre eux (secrétaire, rapporteur.trice à l'oral) sans que nous ayons à ré-expliciter les modalités de travail en groupe. Nous ajoutons un rôle de responsable du matériel en distribuant 3 pièces de monnaie dans chaque groupe et récupérons son carnet de correspondance comme "garantie" de retour du matériel. Certains groupes se replongent alors dans la lecture de l'énoncé écrit, pour comprendre à quoi serviront les 3 pièces distribuées.
- Avant de lancer la recherche collective, nous incitons la classe à réfléchir à la façon dont chaque groupe va collecter les données issues de son expérience de lancers de 3 pièces. Certains élèves prennent la parole pour expliquer leur raisonnement à voix haute : nous les invitons à garder à ce stade leurs idées pour les partager d'abord à l'intérieur de leur groupe, mais je note tout de même au tableau la notation verbalisée par l'un d'eux pour reformuler la stratégie présentée comme équitable par un des DUDUs.



### b- Recherche des 6 groupes de 3 ou 4 élèves chacun :

- Avec la Professeure Documentaliste, nous passons dans les groupes pour répondre aux questions.
- Grâce à l'expérience suggérée des 10 lancers de 3 pièces, tous les groupes rentrent rapidement en activité.

Nous accompagnons deux groupes plus fragiles dans l'organisation de la collecte de leurs résultats puis les questionnons sur la façon dont ils souhaitent les exploiter pour répondre à la question.

Avec un des deux groupes, une synthèse sous forme de tableau est discutée.

| 3 pareils | 2 ≠       | Total |
|-----------|-----------|-------|
| 0         | <u>10</u> | 10    |

Un élève de la classe nous demande s'il peut plutôt utiliser 3 pièces identiques (les pièces distribuées sont de 1c, 2c ou 5c), puis se ravise tout seul en soulignant que ça ne changera rien finalement : "Pile, c'est pile pour toutes les pièces. Pareil pour face!".

Dans un autre groupe, 2 élèves réalisent l'expérience selon 2 modalités différentes pour voir si "ça change quelque chose" : l'un lance 10 fois les 3 pièces d'un coup, l'autre lance 10 fois les 3 pièces l'une après l'autre. Le fait de récolter/organiser les résultats de l'une ou l'autre série de la même manière les convainc que ces modalités apparemment distinctes constituent finalement la même expérience.

Dans un autre groupe, un débat oppose les élèves. Une élève indique qu'elle est convaincue qu'il n'y a pas arnaque : elle comprend et partage la stratégie "théorique supposée équitable" exposée par le DUDU. Et elle est confortée par ses 10 lancers de 3 pièces qui conduisent à 4 lancers avec "3 faces égales" contre 6 lancers avec "2 faces égales et 1 différente", ce qu'elle considère comme étant "proche de la théorie Madame". Les autres élèves du groupe rétorquent que puisque le DUDU qui propose la stratégie veut être sûr de conserver la télécommande, alors il arnaque forcément l'autre DUDU : je leur indique que leur intuition doit être étayée par un raisonnement rationnel et propose au groupe de tenter une nouvelle série de 10 lancers des 3 pièces (ce qu'ils n'auront finalement pas effectué avant de constituer leur affiche).

### c- Restitution orale et débat

Les deux premiers groupes qui passent ensemble considèrent qu'il y a arnaque.

L'affiche du tout premier groupe contient une réponse à la question "Arnaque ou pas?" sans justification. Le rapporteur du groupe ne parvient pas à développer sa position, même si la trace écrite de recherche illustre qu'ils ont bien effectué et analysé 10 lancers de 3 pièces.

**ARNAQUE OU PAS ?**

C'est une arnaque car l'expérience a conclu que son frère a été arnaquer car il y a pas 1 chance sur 2 de réussite.

$3F + FFP + 3P + 3F +$   
 $1P, 2F + 2P, 1F + 1P, 2F + 2P, 1F,$   
 $2F, 1P + 2P, 1F$

Il y a 3 chances sur 10 d'avoir 3F ou 3P

L'affiche du 2ème groupe synthétise sous forme de tableaux les résultats de l'expérience répétée 2 fois, en précisant les fréquences d'occurrence (guidées par les enseignantes pendant la recherche) :

2<sup>e</sup> essai :

| 3 pareils | 2 ≠      | Total |
|-----------|----------|-------|
| 1         | <u>9</u> | 10    |

$\frac{1}{10} = 0,1$       $\frac{9}{10} = 0,9$

1<sup>er</sup> essai :

| 3 pareils | 2 ≠       | Total |
|-----------|-----------|-------|
| 0         | <u>10</u> | 10    |

$\frac{0}{10} = 0$       $\frac{10}{10} = 1$   
 $\frac{1}{2}$       $\frac{1}{2}$

Le groupe pense même à grouper les 2 X 10 lancers en 20 lancers. Le rapporteur à l'oral tente un lien avec les pourcentages mais se trompe en lisant l'affiche :

On pense que c'est une arnaque car on a essayé 20 fois et on est tombé sur 1/20 de chance parce qu'on a 10% de chance.

Son camarade à l'origine du calcul dans le groupe corrige en indiquant qu'ils ont "obtenu 10% de lancers avec 3 faces égales pour le 2eme essai de 10 lancers, mais pas pour les 20 lancers".

La séance d'introduction au vocabulaire des Probabilités ayant eu lieu la veille, les deux groupes suivants cherchent à réemployer le nouveau vocabulaire appliqué à l'expérience aléatoire qu'ils viennent d'expérimenter :

**LANCÉ 3 PIÈCE**  
**ISSUES Possibles** : PPP; FFF; PPF; FFP  
**EVENEMENT Certain** : "Obtenir PPP; FFF; PPF; FFP"  
**EVENEMENT impossible** : "Obtenir 40 fois face"  
 Je trouve que ce n'est pas de l'arnaque car on a une estimation égal. exemple : 6 de différents cotés / 4 de même cotés

ET DONC  
 1FFP    2PPP  
 2PPF    2FFF



Il s'agit du groupe au sein duquel il y avait eu débat pendant la phase de recherche en groupe. C'est finalement l'élève qui argumentait pour "pas arnaque" par la "théorie" et par son "expérience" qui a présenté son point de vue sur l'affiche et à l'oral. Elle a cependant reconnu à l'oral que les résultats des lancers présentés par les groupes précédents semblaient systématiquement plus éloignés de "50 / 50" ou "5 lancers avec PPP ou FFF / 5 lancers avec 2P-et-1F ou 2F-et-1P" que ceux qu'elle avait obtenus.

*Les dudus se disputent la télécommande & nous, qu'en pensez-vous ?*

réponse + argument

|                           |                                       |
|---------------------------|---------------------------------------|
| expérience aléatoire      | lancer des pièces 10 fois             |
| Nombre d'issues possibles | 4 issues possible: PPF, FFP, PFP, FFP |
| Événement certains        | "Obtenir 100 ou Face"                 |
| événement impossible      | "Obtenir 4 faces pile"                |

**Arnaque ou pas ?**  
 - C'est de l'arnaque car celui qui propose le défi a plus de chance d'avoir la télécommande.  
 $\frac{1 \text{ chance}}{5}$

..... Réflexion.....

L'autre groupe considère qu'il y a arnaque et énonce un résultat sous forme de fraction "1 chance/5" et argumente à l'oral pour l'expliquer (on retrouve l'argumentaire dans la trace écrite de recherche).

Je pense que ça dépend comment on des places dans nos mains.

lancer n°1 : PPP  
 lancer n°2 : FFP  
 lancer n°3 : PFP = 1 chance / 5  
 lancer n°4 : FFP  
 lancer n°5 : PFP  
 lancer n°6 : FFP  
 lancer n°7 : PFP  
 lancer n°8 : FFP  
 lancer n°9 : PFP  
 lancer n°10 : FFP

Il réagit d'ailleurs à l'argumentaire du groupe précédent en soulignant qu'ils pensent que les résultats expérimentaux proches de "50 / 50" sont un "coup de chance", que tous les autres groupes ont obtenu des résultats similaires entre eux et qui vont dans le sens d'une arnaque.

Les deux derniers groupes exposent de façon structurée leur raisonnement basé sur l'expérience pour conclure à une arnaque.

La probabilité

On a testé l'expérience de lancer 30 fois chacun 3 pièces. On a noté tout les résultats et on remarque que grâce au résultat qui ont 2 3 / 100 de tomber > sur PPP ou FFF

| Glla    | Dylan   | Kennedy |                       |
|---------|---------|---------|-----------------------|
| 1: PFF  | 1: FFF  | 1: PPF  | Oui c'est une arnaque |
| 2: PFP  | 2: FFF  | 2: PPF  |                       |
| 3: PPF  | 3: PFF  | 3: PFP  |                       |
| 4: PPF  | 4: PFF  | 4: PFP  |                       |
| 5: PPF  | 5: FFF  | 5: PPF  |                       |
| 6: FFP  | 6: PPF  | 6: PPP  |                       |
| 7: FFP  | 7: PPF  | 7: PPF  |                       |
| 8: PFP  | 7: FFP  | 8: FFF  |                       |
| 9: PFP  | 8: FFP  | 9: FFP  |                       |
| 10: FFF | 9: PFF  | 10: FFP |                       |
| 10: FFF | 10: PFP |         |                       |
| 80% PPF | 70% FFP | 70% PPF | 291/1000              |

Le premier de ces groupes introduit des pourcentages : il explique qu'un pourcentage est une fraction en centièmes et justifie le passage de 8 dixièmes à 80 centièmes en multipliant par 10 numérateur et dénominateur. Plusieurs élèves dans l'auditoire manifeste leur satisfaction face à cette explication.

Arnaque ou pas!?

L'expérience permet de donner des statistiques pour mieux raisonner.

| Ahmad | Adam | Maelia |
|-------|------|--------|
| FFP   | FFP  | FFP    |
| FFP   | PPF  | FFP    |
| PPF   | PPF  | FFF    |
| PPP   | PPF  | FFP    |
| PPF   | PPP  | FFF    |
|       |      | FFF    |
|       |      | PPF    |
|       |      | FFP    |
|       |      | PPF    |
|       |      | FFP    |

Total lancers → 20  
Total même face → 5

FFF = 3 fois  
PPP = 2 fois

$2 \neq \rightarrow 15$

**ARNAQUE!**

Évènement Possible : FFP/PPF/FFF

Évènement Impossible : FFF/PPP  
Obtenir 4 issues.

$\frac{5}{20} = \frac{5 \times 1}{8 \times 4} = \frac{1}{4}$

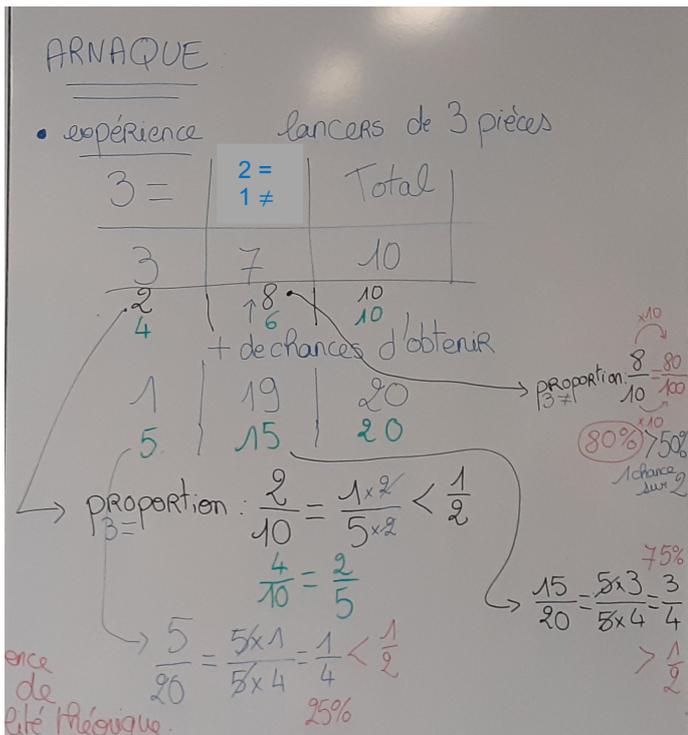
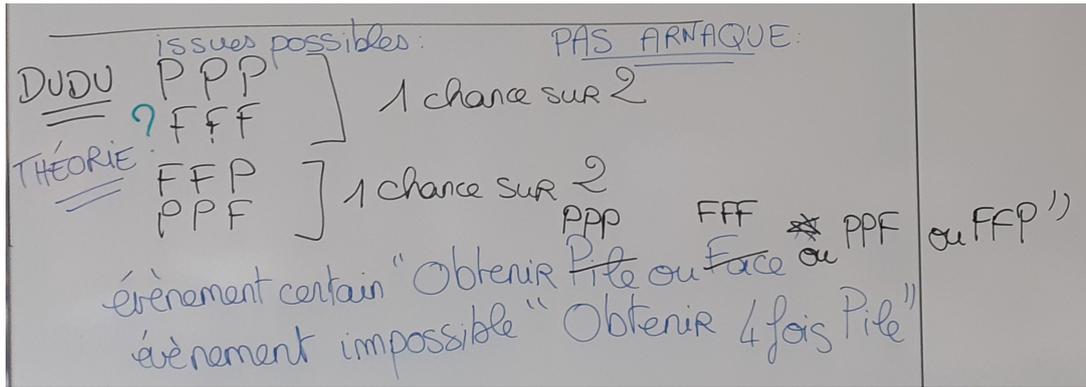
$\frac{15}{20} = \frac{5 \times 3}{8 \times 4} = \frac{3}{4}$

Le dernier groupe à passer à l'oral explicite le fait qu'ils se sont basés sur 20 lancers pour "avoir une meilleure statistique" et que 1/4 (pour les 3 faces égales) est inférieur à 1/2 et 3/4 (pour les 2 faces égales et 1 différente) supérieur à 1/2. Le groupe précédent en profite pour traduire 1/4 en 25% ou 0,25.

Alors que deux élèves commencent à s'agiter, la professeure documentaliste souligne que la compréhension des pourcentages est essentielle dans la vie : elle fait le lien avec les soldes et le fait qu'il est important d'être capable d'identifier si une réduction affichée dans une publicité "n'est pas une arnaque". L'attention du collectif revient immédiatement.

**d- Synthèse**

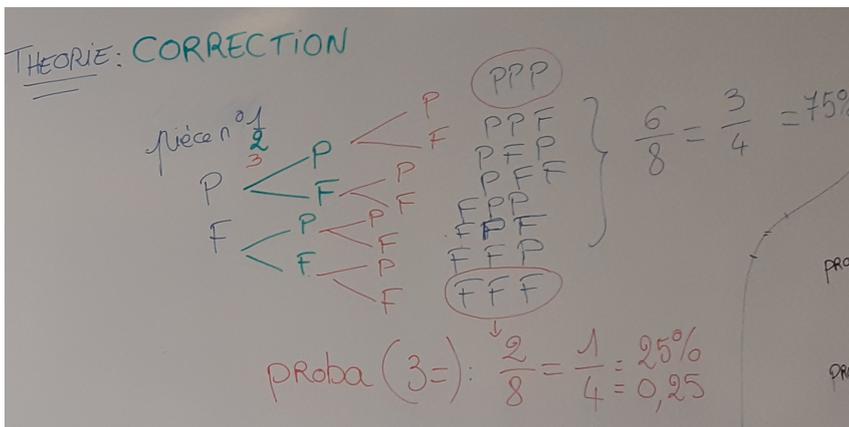
Les notes prises au fur et à mesure des restitutions orales de chaque groupe conduisent à la trace écrite suivante au tableau :



**e- Ouvertures**

Les élèves se questionnent alors sur ce qui est faux dans la stratégie supposée équitable du DUDU, et tout particulièrement l'élève persuadée qu'il n'y avait pas arnaque.

**Je m'appuie sur un arbre de probabilités pour dénombrer les différentes issues possibles à un lancer de 3 pièces et expliquer l'arnaque du point de vue théorique.**



Un élève demande à ce que l'arbre de probabilités soit réexpliqué car s'il le comprend, il ne comprend toujours pas ce qu'il y a de faux dans le raisonnement du DUDU qui affirme que sa stratégie est équitable. Je reprends le fait que, pour le DUDU en question, obtenir, par exemple, 2F-et-1P est compté comme une seule issue, alors qu'un tel résultat peut en vérité être obtenu grâce à plusieurs issues : FFP ; PFP ; PFF.

Les élèves précisent d'eux-mêmes le lien avec les fractions simplifiées ou les pourcentages. Ils utilisent cependant le mot "proportion" de 3 faces identiques par rapport à toutes les issues possibles. J'introduis donc en fin d'échange la notion de probabilité et son expression sous forme d'une fraction.

**Utilisation du Tableur pour simuler un nombre de lancers de plus en plus important**

Un élève du dernier groupe ayant présenté son affiche, ayant raisonné avec 20 lancers, demande "Madame, on pourrait faire avec 100 lancers, ou même plus ?"

Nous en profitons avec la professeure Documentaliste pour introduire le Tableur et la fonction "ALEA.ENTRE.BORNES" qui permet d'associer "1" à "P" et "0" à "F" pour simuler aisément respectivement 1000, 5000 puis 10000 lancers de 3 pièces. L'élève précédent exprime son souhait d'essayer pour 1000000 de lancers : nous le sensibilisons aux limites de l'outil Tableur.

|    | A | B | C | D | E | F                             | G    | H | I | J     | K |
|----|---|---|---|---|---|-------------------------------|------|---|---|-------|---|
| 1  | 1 | 1 | 0 |   | 2 | FFF                           | 132  |   |   | F = 0 |   |
| 2  | 1 | 1 | 1 |   | 3 | PPP                           | 139  |   |   | P = 1 |   |
| 3  | 0 | 0 | 0 |   | 0 |                               |      |   |   |       |   |
| 4  | 1 | 0 | 1 |   | 2 | A = Trois pièces du même côté |      |   |   | 271   |   |
| 5  | 0 | 0 | 0 |   | 0 | B = Deux pièces du même côté  |      |   |   | 729   |   |
| 6  | 1 | 0 | 0 |   | 1 | P (A)                         | 0,27 |   |   |       |   |
| 7  | 0 | 0 | 1 |   | 1 | P (B)                         | 0,73 |   |   |       |   |
| 8  | 0 | 0 | 0 |   | 0 |                               |      |   |   |       |   |
| 9  | 0 | 0 | 1 |   | 1 |                               |      |   |   |       |   |
| 10 | 0 | 0 | 1 |   | 1 |                               |      |   |   |       |   |
| 11 | 1 | 1 | 0 |   | 2 |                               |      |   |   |       |   |
| 12 | 1 | 1 | 1 |   | 3 |                               |      |   |   |       |   |
| 13 | 0 | 0 | 0 |   | 0 |                               |      |   |   |       |   |
| 14 | 0 | 0 | 0 |   | 0 |                               |      |   |   |       |   |
| 15 | 1 | 1 | 0 |   | 2 |                               |      |   |   |       |   |

Nous invitons alors les élèves, pour chaque "grand nombre" de lancers, à calculer collectivement les "proportions" de "3 faces égales" puis celles de "2 faces égales et 1 différente".

**ARNAQUE**

• expérience lancers de 3 pièces

| 3 = | 2 = | Total |
|-----|-----|-------|
| 3   | 7   | 10    |
| 2   | 18  | 10    |
| 1   | 19  | 20    |
| 5   | 15  | 20    |

proportion :  $\frac{2}{10} = \frac{1 \times 2}{5 \times 2} < \frac{1}{2}$

$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\frac{5}{20} = \frac{5 \times 1}{5 \times 4} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

25%

proportion :  $\frac{8}{10} = \frac{80}{100}$

80% > 50%

1 chance sur 2

$\frac{15}{20} = \frac{5 \times 3}{5 \times 4} = \frac{3}{4}$

75%

>  $\frac{1}{2}$

Quand on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la proportion se stabilise autour de la probabilité théorique.

Plusieurs d'entre eux constatent que la "proportion" de "3 faces égales" se stabilise autour de la même valeur que celle trouvée à la fois théoriquement avec l'arbre de probabilités, mais aussi, "par hasard", avec l'expérience des 20 lancers menée par le dernier groupe ayant présenté son affiche.

## SUITE

### **Pour les séances juste après la recherche : Institutionnalisation sur la définition, les propriétés et les calculs de probabilités, suivie d'exercices d'application**

Le débat, la synthèse et les ouvertures ont permis d'aborder des notions qui peuvent être reprises dans la leçon :

- la probabilité d'un événement estime sa chance théorique de se produire. Elle peut s'exprimer sous forme décimale, sous forme fractionnaire ou par un pourcentage.
- Une probabilité est comprise entre 0 et 1.
- La probabilité de l'événement contraire  $\bar{E}$  d'un événement E est :  $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$  —> avec l'exemple de l'événement contraire de "Obtenir 3 faces égales" qui est "Obtenir 2 faces égales et 1 face différente".
- On peut réaliser une expérience aléatoire un grand nombre de fois pour approcher les probabilités par les fréquences d'apparition (nommées "proportions" dans le débat de la classe sur le problème de la télécommande).

**Plus tard dans la progression, au moment de la séquence sur les Statistiques, les calculs de "proportions" menés pour l'expérience de plusieurs lancers de 3 pièces seront utilisés pour réinvestir les fréquences.**