

GDR School “Sources in the History of Mathematics”
November 2013

Block 1 – Workshop 3

**Arrangement and textual structures of sources:
What is historiographically at stake?**

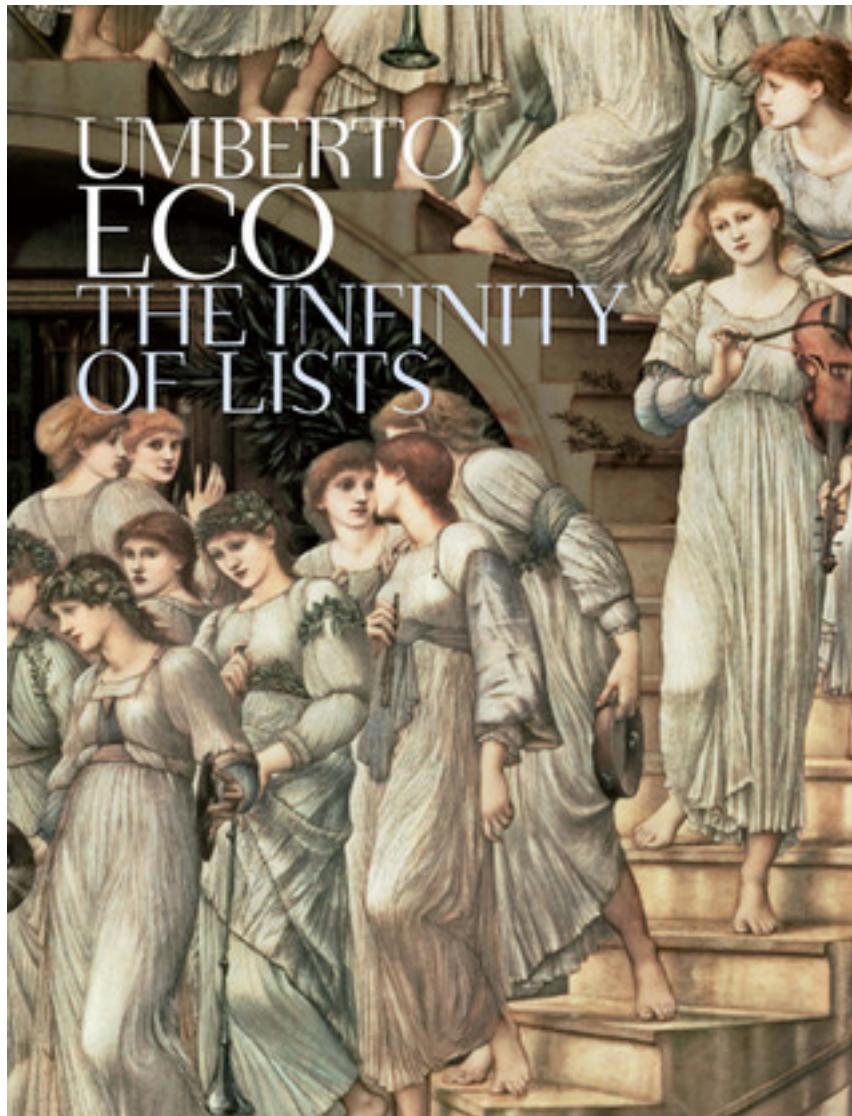
Part 2: Numerical Tables

Dominique Tournès, University of La Réunion and SPHERE

Research Project 2009-2013
funded by the French National Research Agency

History of Numerical Tables

David Aubin – Denis Bayart - Maarten Bullynck
Konstantinos Chatzis – Karine Chemla – Liesbeth De Mol
Marie-José Durand-Richard – Joachim Fischer
Matthieu Husson – Agathe Keller – Mahesh Koolakkodlu
Li Liang – Clemency Montelle – Mathieu Ossendrijver
Christine Proust – Micah Ross – Thomas Sonar – Nathan Sidoli
Renate Tobies – Dominique Tournès – Glen Van Brummelen



“At first, we think that a list is primitive and typical of very early cultures, which had no exact concept of the universe and were therefore limited to listing the characteristics they could name. But, in cultural history, the list has prevailed over and over again.”

Wolfram *Mathematica*[®] 9

Seamlessly Flow Ideas to Results:
Compute, Develop, Deploy the *Mathematica* Way

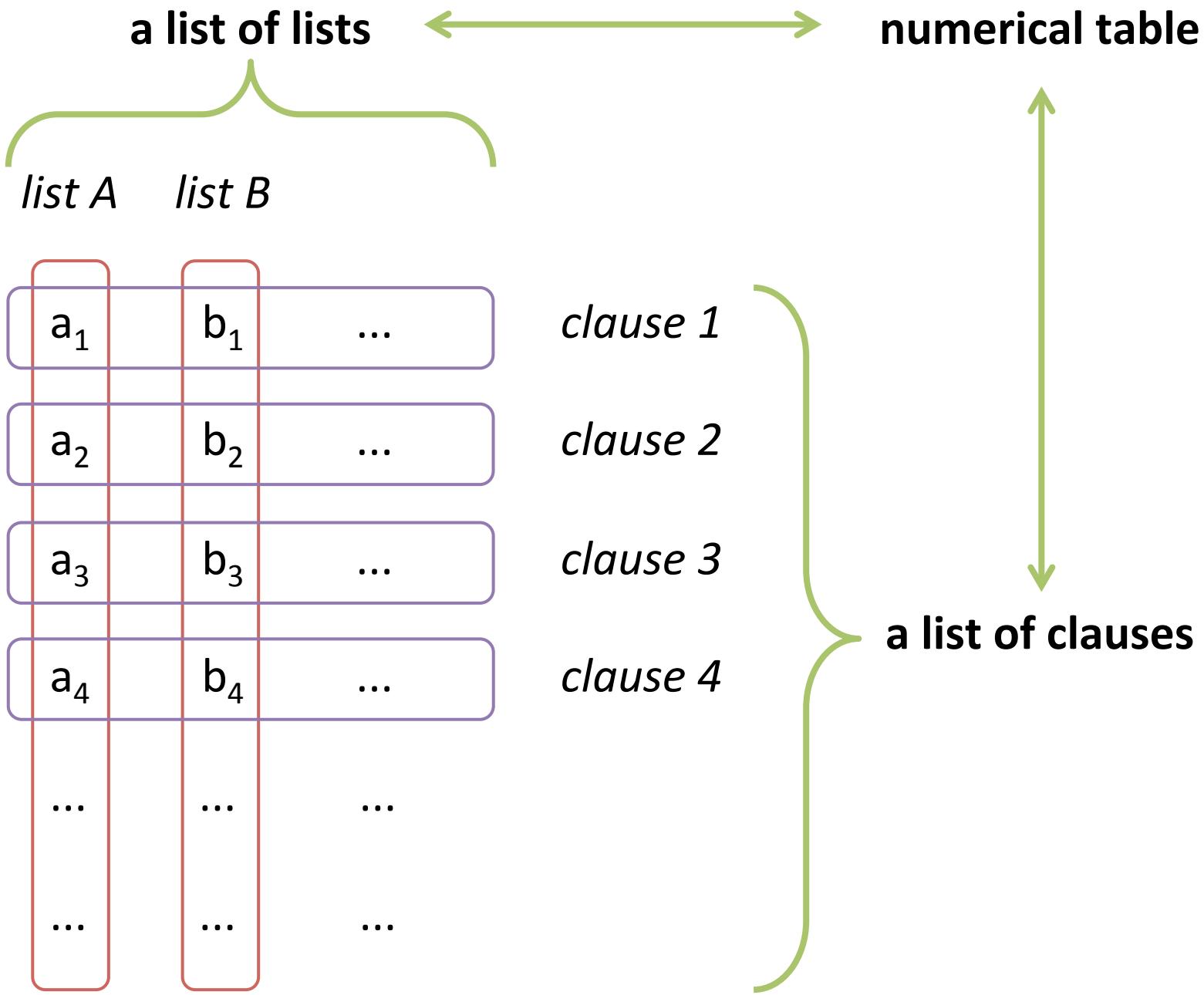


“Lists are central constructs in *Mathematica*, used to represent collections, arrays, sets and sequences of all kinds. Lists can have any structure and size, and can routinely involve even millions of elements. Well over a thousand built-in functions throughout *Mathematica* operate directly on lists, making lists a powerful vehicle for interoperability.”

1. What is a numerical table?

Tables are a form that the statement of one or more relationships between two or more sets of entities can take. They are characterized by the fact that they have the form of a *list of clauses*.

In this context, *numerical* tables represent a form that the statement of *quantitative* relationships can take. In them, each clause provides a particular statement of the relationship by means of *numerical values*.



$$\begin{array}{r} & 1 & 1 \\ & 2 & 4 & 7 \\ + & 1 & 8 & 3 \\ + & 4 & 2 & 9 \\ \hline = & 8 & 5 & 9 \end{array}$$

An array of numbers is not necessarily a numerical table.

A numerical table has not necessarily an array form.

Different presentations for a table of squares

The square of one is one, the square of two is four, the square of three is nine, the square of four is sixteen, the square of five is twenty-five, ...

(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), ...

1, 4, 9, 16, 25, ...

The square of 1 is 1

The square of 2 is 4

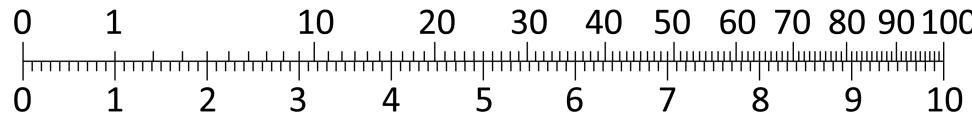
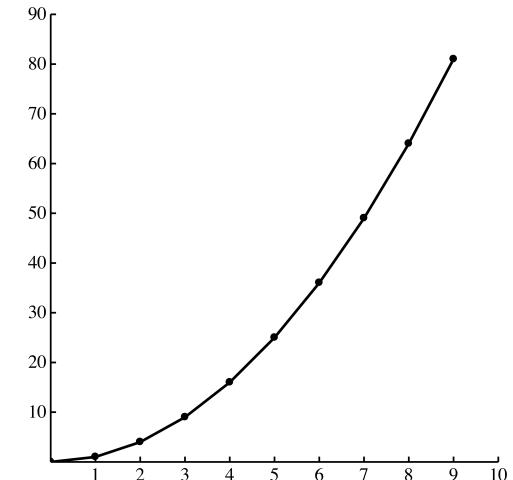
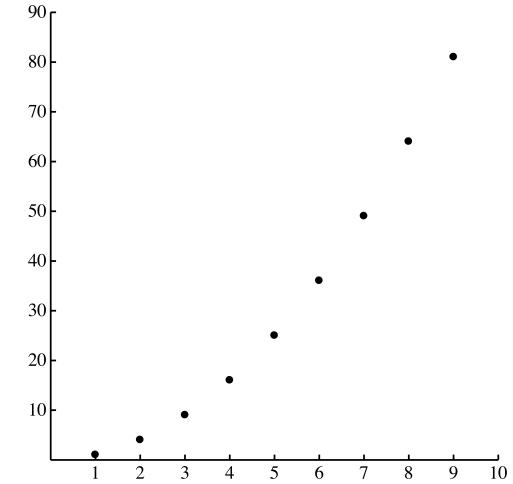
The square of 3 is 9

The square of 4 is 16

The square of 5 is 25

...

1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
...	...



$$f = \{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16), (5,25) \dots\} = \{(x,x^2)\}$$

Encyclopédie méthodique

Mathématiques

1784-1789

T A B L E S. s. f. (*Mathém.*) On entend par ce mot la suite de toutes les valeurs particulières d'une fonction, qu'on obtient en donnant à la variable principale ou aux variables principales, s'il y en a plusieurs, toutes les valeurs particulières renfermées dans la suite la plus convenable à l'objet qu'on se propose. *Voyez FONCTION.*

Quand la fonction n'a qu'une variable principale, on place ordinairement la suite des valeurs de la variable principale dans une même colonne verticale, & à chacune de ces valeurs on fait correspondre horizontalement la valeur de la fonction.

E X E M P L E.

Soit $\phi(x) = \log x$ & 1, 2, 3, &c. la suite des valeurs de x , on formera la *table* ainsi:

x	$\log x$
1.....	0.000000
2.....	0.301030
3.....	0.477121
4.....	0.602060
&c.....	&c.

Si la fonction a deux variables principales, la *table* doit être à double entrée. On place, dans une colonne verticale, la suite appartenante à l'une des variables principales, dans une ligne horizontale la suite appartenante à l'autre variable, & à l'intersection de deux lignes horizontales & verticales correspondantes à deux valeurs particulières des variables principales, la valeur de la fonction.

E X E M P L E.

Soit $\phi(x, y) = yx$; 1, 3, 6, & les autres nombres triangulaires, la suite appartenante à x ; 1, 4, 9, & les autres nombres quarrés, la suite appartenante à y , on formera la *table* ainsi:

x	y					
	1	1.	4.	9.	16	&c.
1	1	1.	4.	9.	16	&c.
3	3	3.	12.	27.	48	&c.
6	6	6.	24.	54.	96	&c.
10	10	10.	40.	90.	160	&c.
	&c. &c. &c. &c. &c. &c.					

Si la fonction contenoit un plus grand nombre de variables principales, les *tables* ne pourroient pas se former d'une manière si simple, aussi sont-elles peu en usage dans les Mathématiques. Celles qui sont les plus importantes pour la pratique de l'Astronomie & de la géodésie, sont les *tables* des logarithmes des nombres, & les *tables* des logarithmes des sinus.

$$y = f(x)$$

x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
\vdots	\vdots

$$z = f(x, y)$$

	y_1	y_2	y_3	\dots
x_1	z_{11}	z_{12}	z_{13}	\dots
x_2	z_{21}	z_{22}	z_{23}	\dots
x_3	z_{31}	z_{32}	z_{33}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

\ddots

z_3	y_1	y_2	y_3	\dots
x_1	t_{113}	t_{123}	t_{133}	\dots
x_2	t_{213}	z_2	y_1	y_2
x_3	t_{313}	x_1	t_{112}	t_{122}
\vdots	\vdots	x_2	t_{212}	t_{132}
		x_3	t_{312}	\dots
		\vdots	\vdots	\vdots

z_1	y_1	y_2	y_3	\dots
x_1	t_{111}	t_{121}	t_{131}	\dots
x_2	t_{211}	t_{221}	t_{231}	\dots
x_3	t_{311}	t_{321}	t_{331}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

t	x	y	z
$f(x, y, z)$			

Squares from 0 to 99

$$f(x) = f(10a + b) = g(a, b) = (10a + b)^2$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
10	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
20	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
30	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
40	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
50	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
60	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
70	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
80	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
90	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

One-dimensional table represented by a two-dimensional array

Squares from 0 to 999

$$f(x) = f(100a + 10b + c) = h(a, b, c) = (100a + 10b + c)^2$$

One-dimensional table represented by a three-dimensional array

1873

It was necessary as a preliminary to form a classification of mathematical (numerical) tables; and the following classification was drawn up by Prof. Cayley and adopted by the Committee.

- A. Auxiliary for non-logarithmic computations.
 - 1. Multiplication.
 - 2. Quarter-squares.
 - 3. Squares, cubes, and higher powers, and reciprocals.
- B. Logarithmic and circular.
 - 4. Logarithms (Briggian) and antilogarithms (do.); addition and subtraction logarithms, &c.
 - 5. Circular functions (sines, cosines, &c.), natural, and lengths of circular arcs.
 - 6. Circular functions (sines, cosines, &c.), logarithmic.
- C. Exponential.
 - 7. Hyperbolic logarithms.
 - 8. Do. antilogarithms (e^x) and $h \cdot i \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\phi)$, and hyperbolic sines, cosines, &c., natural and logarithmic.
- D. Algebraic constants.
 - 9. Accurate integer or fractional values. Bernoulli's Nos., $\Delta^n 0^m$, &c.
Binomial coefficients.
 - 10. Decimal values auxiliary to the calculation of series.
- E. 11. Transcendental constants, e , π , γ , &c., and their powers and functions.
- F. Arithmological.
 - 12. Divisors and prime numbers. Prime roots. The Canon arithmeticus &c.
 - 13. The Pellian equation.
 - 14. Partitions.
 - 15. Quadratic forms $a^2 + b^2$, &c., and partition of numbers into squares, cubes, and biquadrates.
 - 16. Binary, ternary, &c. quadratic and higher forms.
 - 17. Complex theories.
- G. Transcendental functions.
 - 18. Elliptic.
 - 19. Gamma.
 - 20. Sine-integral, cosine-integral, and exponential-integral.
 - 21. Bessel's and allied functions.
 - 22. Planetary coefficients for given $\frac{a}{a'}$.
 - 23. Logarithmic transcendental.
 - 24. Miscellaneous.

1940

Classification.—The need for some system of classification of tables was early recognized, and such a system was made by Arthur Cayley (1821–95) to accompany the extensive report by James W. L. Glaisher on *Mathematical Tables* published by the British Association for the Advancement of Science in 1873. Modern development of the field revealed the inadequacy of this classification, and a system was devised in 1940 by the Committee on Mathematical Tables and Other Aids to Computation of the National Research Committee of the United States as follows:

- A. Arithmetical tables; mathematical constants
- B. Powers
- C. Logarithms
- D. Circular functions
- E. Hyperbolic and exponential functions
- F. Theory of numbers
- G. Higher algebra
- H. Numerical solution of equations
- I. Finite differences
- J. Summation of series
- K. Statistics
- L. Higher mathematical functions
- M. Integrals
- N. Interest and investment
- O. Actuarial science
- P. Engineering
- Q. Astronomy
- R. Geodesy
- S. Physics
- T. Chemistry
- U. Navigation
- V. Calculating machines and mechanical computation

Numerical tables and concept of function

Ancient times: numerical tables as the only way to express precisely a dependance relation between two or more than two quantities

.
.
.

From 16th century: analytical formula, algorithm of calculation

Euler: « *Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodounque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus* »

.
.

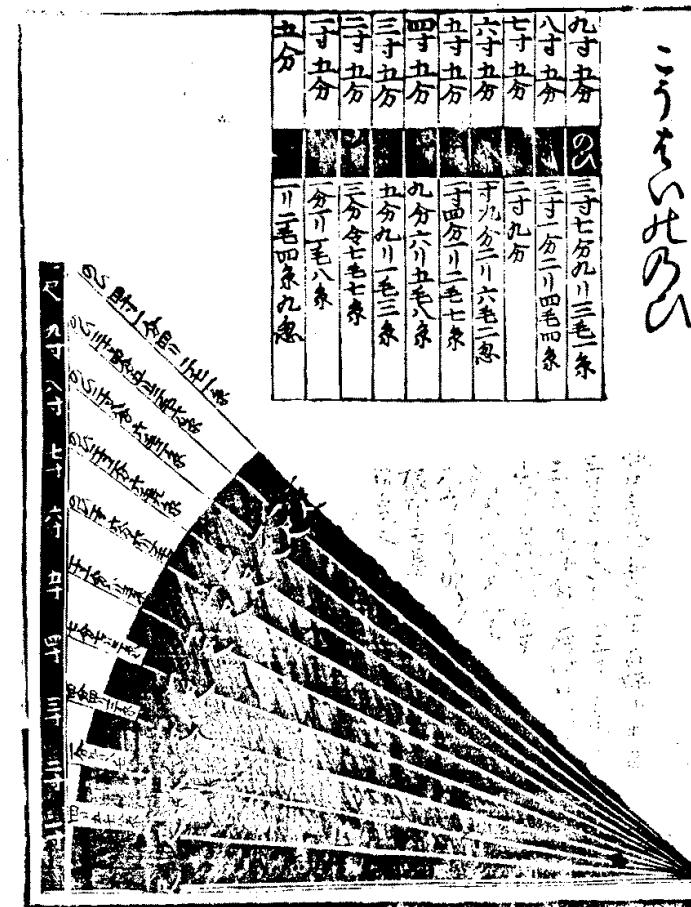
Modern definition of a relation (in particular a function) between two sets X et Y of numbers: a set of couples (x, y) with x in X and y in Y

TABULAR CONCEPT OF FUNCTION



(suggested by Marion Cousin)

あらうとおもひたがはるのせうけとおもひたがはるの
えかく、うとうとおもひたがはるのじかうをなまうたがはるの時
三万二千三十六筆文多あれど
ほふ二店よめくせすとうかへ一丈四尺八寸
立す、いとひのひひ一す一分八寸三筆よめくせす
三字九分、七字九分、九字九分、十一字九分
右へ二丈四尺八寸五筆文多あれど
一丈九尺八寸七分六厘五毫八分
のりひきかへとつて、うつてのせ
あらうとおもひたがはる



計都星真言 羅喉帶珠寶二執並日
唵嚩日羅三合計都曩引曩乞赦二合怛羅三合

遷惹野名位吽婆嚩賀

一切如來說破一切宿曜障吉祥真言

唵薩嚩諾利怛羅二合三廢曳室聖曳屬底

迦俱嚩婆嚩二合賀引

歲星東方木之精一名攝提徑一百里其色青而光明所在有福與太白合宿有喪其行

*三年一周天強三百九十九日一伏見初

晨見東方六日行一度一百一十四日順行

十九度乃留而不行二十七日遂逆行七日半退一度八十二日半退十一度則又留二

正二三四五六七八九十一十二

十七日復順行一百一十四日行十九度而夕見伏於西方伏經三十二日又晨見如初。八十三年凡七十六終而七周天也貞元十年甲戌入曆當日

年數正二三四五六七八九十一十二

本延曆十三年甲戌

三十一年

一年 退張 二十二退 留張 張翼 翼八度翼十二 翼軫軫 四日留

退軫 二十二退 留 留 軫 十九見角 角亢亢

三日留 氐一 退亢亢 亢初 守亢守亢亢氐 九日伏十一見 房心

尾 尾六 退退 尾二十二日 守心尾尾 十日伏十三日見 風斗

斗斗 斗六日留 退退 二十四退 斗一留 斗二十度牛斗四度 斗

牛女女虛 十四度虛 虛女虛 二十八退 留女虛虛危 十六度危三度

危十二見 危十二 危室室 二十七留 留退室室 五日退 室室室

正二三四五六七八九十一十二

八 二十二伏 伏 一日見 奎五奎 二十四度見留 留退退 十二退 奎婁

壁五 一日伏七日見 壽 胃二胃十一 退退畢 十八退 易四留留畢

婁婁胃 胃二胃十一 昇昂畢畢 四退退畢 易四留留畢

昴畢畢畢 見畢十二參三 參井井井 四日留井十三 退退退 二十二度留

守井井井井 十二伏十三日見 鬼柳柳柳 六日留柳十二 退退

柳二留 十二伏十四見 張張翼 七日留退 張張翼 七日留退

退軫軫 二十五留 留張張翼 翼十三度十四見 軫軫軫 七日留 軫十五留

退軫軫 二十五退 留張張翼 翼十三度十四見 軫軫軫 七日留 軫十五留

七日留 退氐氐亢 二十二留 留亢氐氐 十三度十五見 心尾

四二九

七曜機災決

三〇八

(suggested by Daniel Morgan)

Title: Monthly Ephemeris for Jupiter (1043-1209)
Source: *Qiyao rangzai jue* (Tricks for Averting Planetary Disasters), *Taishō Buddhist Canon*, Tōkyō, 1924-1934; printed from MS ed., Japan, ca. 12th cent. (?); colophon: Kōta, 9th cent.

(suggested by Isabelle Lémonon)

T A B L E
ALPHABÉTIQUE ET ANALYTIQUE
DES M A T I È R E S
CONTENUES DANS LES CINQ TOMES
DU S Y S T È M E
DES
CONNAISSANCES CHIMIQUES,
RÉDIGÉE PAR Mme. DUPIERY,
ET REVUE PAR LE Cen. FOURCROY.



P A R I S ,

BAUDOUIN, Imprimeur de l'Institut national, rue de Grenelle-Saint-Germain, n°. 1131.

V E N T O S E A N X .

- est liquide ou mou; ne donne point d'ammoniaque à la distillation, etc.; laisse très-peu de résidu carbonneux, 506, 507. — A deux principales variétés, 507 et suiv. Voy. *Bitume liquide ou Pétrole, Naphte, etc.* et *Bitume solide ou Asphalte*. **BITUME** liquide ou pétrole, naphte, etc. IV, 507 et suiv. Voy. *Bitume (proprement dit)*. — Ses divers noms et sous-variétés, d'après ses différences de légèreté, consistance, inflammabilité, etc. depuis le naphte, qui est le pétrole le plus léger, etc. jusqu'à la poix minérale, etc. 507 et suiv. — Grande volatilité et inflammabilité, etc. du naphte, 507, 509. — Sa distillation, décomposition, etc.; ses autres altérations et propriétés chimiques, 509. — Ses usages, soit économiques, soit médicinaux, etc. 509, 510.
— solide, ou asphalte, ou bitume de Judée, etc. IV, 507, 510, 511. Voy. *Bitume (proprement dit)*. — Ses propriétés physiques; sa cassure vitreuse, etc. 510. — Son histoire naturelle, et opinions sur sa nature, 510, 511. — Sa combustion, etc.; sa distillation et décomposition; son huile, etc.; ses combinaisons, etc. 511. — Ses usages dans les arts; son mélange avec la poix se reconnaît par l'alcool, qui dissout cette dernière, etc. 511.
— de Judée ou asphalte, etc. Voy. *Bitume solide*, etc.
BLACK-WAD, III, 145. Voy. *Mines de manganèse*.
BLANC de baleine (3^e. classe des matières animales), V, 103, 565, 580 et suiv. Voy. *Animaux, à la comparaison et classification des matières animales*. — Son siège et histoire naturelle; huile avec laquelle il est mêlé, etc.; paraît être un des produits les plus généraux des animaux marins, etc. 580, 581, 584. — Sa cristallisation et autres propriétés physiques, 581, 583. — Sa distillation et ses propriétés chimiques, 581 et suiv. — Précieux erronés sur ses préputées vertus médicales, etc. 583, 584. — Peut être regardé comme étant aux huiles fixes ce qu'est le cainphre aux volatiles, etc.; son analogie avec la matière adipocireuse des calculs biliaires, du parenchyme du foie desséché, etc. 583, 584. Voyez *Adipocie*.
— d'Espagne. Voy. *Craie*.
— de fard ou oxyde blanc de bismuth, III, 174. Voy. *Nitrate et Oxide de bismuth*. — Ses altérations et inconvénients de son usage, 174, 177.
— de plomb; mélange de cérose et de craie, IV, 479. Voy. *Acétite de plomb*.
BLENDRE ou fausse Galène. Voy. *Sulfure de zinc*.
BLEU de montagne, ou Chrysocolle bleue. Voy. *Carbonate de cuivre natif et Mines de cuivre*.
— de Prusse. Voy. *Prussiate de fer et Acide prussique*, etc.
BOCARD, BOCARDAGE, des mines, III, 31. Voy. *Métallurgie*.
Bois. Voy. *Végétaux et ligneux (le corps)*.
— (pour la teinture) de Brésil, etc.; bois d'Inde ou de Campêche, etc. IV, 362, 368, 370, 371. Voy. *Matières colorantes*, etc. — Procédés et agents pour obtenir leurs diverses nuances et pour les fixer, etc. 370, 371.
— fossiles, IV, 502, 503. Voyez *Végétaux, à leurs décompositions lentes*, etc.
— jaune (pour la teinture), IV, 362, 371, 372. Voy. *Matières colorantes*, etc. — Ses différentes nuances, précipitations et mordans, et son utilité, etc. 372.
— pétrifié. Voy. *Végétaux ou Matières végétales pétrifiées*.
— pourri, IV, 491, 495, 496 et suiv. Voy. *Fermentation putride des végétaux*. — Sa phosphorescence, etc.; son odeur analogue à celle des agarics et des bolets, etc. etc.; son charbon fortement salin, etc. etc. 497, 498.
BOLS. Voy. *Pierres mélangées*.
BOMBIATES, sels formés par l'acide bombique, V, 626. Voy. *Acide bombique*.
BORATES, sels formés par l'acide boracique. Voy. *cet Acide et les diff'rens borates*.
— alcalins et terreux (en général), genre 10^e. II, 9, 268 et suiv. Voyez *Sels à bases salifiables alcalines*, etc. et *chaque borate alcalin ou terreau*. — Composés d'acide boracique et de bases salifiables; presque inconnus dans leur généralité, à la réserve de quelques notions qu'en a données Bergman, jusqu'en 1781, où l'auteur, à cette époque et depuis, est le seul qui les ait examinés et traités systématiquement dans ses éléments de chimie, quoique leur principale espèce ait été découverte dès le commencement du siècle, 268, 269. Voy. *Borate sursaturation de soude ou borat*. — Leur histoire naturelle, 269. — Leur saveur acré et styptique, leur nature cassante, etc. et autres propriétés physiques, 269. — Leur fusibilité et vitrification par le calor que, 269. — S'effeuillissent pour la plupart; aucun ne sont délicescens, 270. — Leur inaltérabilité avec les corps combustibles, 270. — Leur combinaison et vitrification diversement colorée avec beaucoup d'oxides métalliques, 270. Voy. ci-dessous, à leur action avec les substances métalliques. — Leurs décompositions par les acides, 270,

(suggested by Isabelle Lémonon)

ÉPHÉMÉRIDES
D E S
MOUVEMENS CÉLESTES,
P O U R
LE MÉRIDIEN DE PARIS,
TOME HUITIÈME,
CONTENANT LES HUIT ANNÉES
de 1785 à 1792;

Revues & publiées par M. DE LA LANDE, de l'Académie Royale des Sciences de Paris, de celles de Londres, de Berlin, de Pétersbourg, de Stockholm, &c. & Professeur Royal d'Astronomie.



A P A R I S , rue Saint-Jacques ,

Chez la Veuve HÉRISSANT, Imprimeur ordinaire du Roi, des Cabinet, Maison & Bâtiments de SA MAJESTÉ, Académie des Arts & Manufactures Royales.

M. D C C. L X X X I I I .

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROL.

INDEX DES NOTATIONS

(suggested by Anne-Sandrine Paumier)

Laurent Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles II, *Annales de l'Institut Fourier*, 1958

Les espaces usuels de distributions \mathfrak{D} , \mathfrak{D}^m , \mathfrak{D}' , \mathfrak{D}'^m , \mathfrak{D}'_+ , \mathfrak{S} , \mathfrak{S}^m , \mathfrak{S}' , \mathfrak{S}'^m , L^p , \mathfrak{D}_{L^p} , \mathfrak{B}^* , \mathfrak{B} , \mathfrak{B}' , \mathcal{I} , \mathcal{I}' , \mathcal{O}_M , \mathcal{O}'_c , sont ceux qui sont définis dans SCHWARTZ [4] et [5] (voir index des notations à la fin de [5]); on peut y ajouter \mathcal{O}'_M et \mathcal{O}_c , duals forts respectifs de \mathcal{O}_M et \mathcal{O}'_c . $\mathcal{I}'(\Gamma)$ est défini dans SCHWARTZ [3]. Les espaces \mathfrak{L} , \mathfrak{L}' , sont définis page 77 (I). \mathfrak{L}'^m (resp. \mathfrak{S}'^m) est l'espace \mathfrak{D}'^m (resp. \mathfrak{S}'^m), muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties compactes de \mathfrak{D}^m (resp. \mathfrak{S}^m). Les espaces \mathfrak{L}^1 , \mathfrak{K}^∞ , sont définis pages 111 et 112 (I), l'espace \mathfrak{L}^p page 48 (II). Les espaces $(\mathfrak{K}^1)^{(-m)}$ et $(\mathfrak{L}^\infty)^{(m)}$ sont définis page 165 (II) et suivantes. La transformation de Fourier se note \mathcal{F} .

Les espaces $\mathcal{H}(E)$ sont définis page 49 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathfrak{D}'^m$) et 52 (I). Les espaces $\mathcal{H}(\overline{E})$ sont définis page 61 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathfrak{S}'^m$), page 63 (I) (pour $\mathcal{H} = \mathfrak{D}^m$), page 48 (II) (pour $\mathcal{H} = L^p$ ou \mathfrak{L}^p).

La notation $\mathcal{H}_c(E; \mathfrak{G})$ est définie page 54 (II), la notation $\mathcal{H}(E_{\otimes})$ page 54 (II),

On adopte la notation de la variable muette marquée par un \hat{x} quand elle n'est écrite qu'une fois : $f(\hat{x})$ pour la fonction $x \rightarrow f(x)$, ou $S(\hat{x})$ pour la distribution $S_x \in \mathfrak{D}'_x$ (pages 2 (II), 71 (I)).

La distribution définie par la masse unité au point a de R^n se note $\delta_{(a)}$, ou δ_{x-a} , ou $\delta(\hat{x}-a)$, ou $\epsilon(a)$.

La symétrie par rapport à l'origine de R^n se note par σ ; \check{f} , \check{T} , sont les symétriques de la fonction f , de la distribution T ; elles sont définies par : $\check{f}(x) = f(-x)$; $\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi})$. Si \mathcal{H} est un espace de distributions, on notera par $\check{\mathcal{H}}$ l'espace de distributions obtenu par cette symétrie (sous disons : espace de distributions, ce qui veut dire qu'il a une topologie, obtenue à partir de celle de \mathcal{H} par symétrie).

τ_h est la translation de R^n par le vecteur h ; $\tau_h f$ est la translatée de la fonction f , définie par $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$; $\tau_h T$ est la translatée de la distribution T , définie par $(\tau_h T)(\varphi) = T(\tau_{-h}(\varphi))$.

Le symétrique $'K$ d'un noyau K est défini page 90 (I).

Les notations $L_{\mathcal{M}} \subset (L_t; M)$, sont définies page 18 (I).

$\mathcal{L}(E; F)$ est l'espace des applications linéaires continues de E dans F ; $\mathcal{L}_c(E; F)$ (resp. $\mathcal{L}_b(E; F)$, resp. $\mathcal{L}_s(E; F)$) veut dire qu'il est muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes équilibrées compactes de E (resp. sur les parties bornées, resp. de la topologie de la convergence simple). $\mathcal{L}(L'_c; M)$ est l'espace des applications linéaires continues de L'_c dans

INDEX TERMINOLOGIQUE

Nous écrivons : page 75 (I), ou page 75 (II), selon qu'il s'agit de la page 75 du chapitre I ou du chapitre II.

(suggested by Anne-Sandrine Paumier)

Laurent Schwartz, Théorie des distributions à valeurs vectorielles II, *Annales de l'Institut Fourier*, 1958

Convexité.

Un *ensemble convexe* d'un espace vectoriel sur le corps des réels ou des complexes est un ensemble qui, toutes les fois qu'il contient deux points, contient le segment qui les joint (BOURBAKI [1], chapitre II, § 1, n° 1 page 42).

Un espace vectoriel topologique sur le corps des réels ou des complexes est dit *localement convexe*, s'il a un système fondamental de voisinages de 0 convexes (BOURBAKI [1], chapitre II, § 2, n° 1, page 57); sa topologie est alors définie par une famille de *semi-normes* (BOURBAKI [1], chapitre II, § 5, n° 4, page 95).

Un *ensemble équilibré* d'un espace vectoriel sur un corps valué K, est un ensemble qui, toutes les fois qu'il contient un élément x , contient tous les éléments λx , $\lambda \in K$, $|\lambda| \leq 1$ (BOURBAKI [1], chap. I, § 1, n° 3, définition 2, page 5).

Un ensemble *disqué* d'un espace localement convexe est un ensemble convexe équilibré fermé.

L'*enveloppe convexe* (resp. *convexe équilibrée*) d'une partie d'un espace vectoriel sur le corps des réels ou des complexes est la plus petite partie convexe (resp. convexe équilibrée) qui la contienne (BOURBAKI [1], chap. I, § 1, n° 3, page 6; chap. II, § 1, n° 3, page 45).

L'*enveloppe* d'une partie d'un espace localement convexe est la plus petite partie disquée qui la contienne. « Enveloppe » est donc une abréviation de « enveloppe disquée ».

Soit A une partie d'un espace vectoriel E sur le corps des réels ou des complexes; supposons A convexe, équilibrée, absorbante (voir plus bas). On appelle *jauge* de A la semi-norme p définie par

$$p(x) = (\sup_{\lambda x \in A} |\lambda|)^{-1} \quad (\text{BOURBAKI, chap. II, § 5, n° 3, page 95}).$$

Ensembles de parties bornées d'un espace vectoriel localement convexe.

Soient A et B deux parties d'un espace vectoriel E sur le corps des réels ou des complexes. On dit que A *absorbe* B, s'il existe un scalaire λ tel que $\lambda A \supset B$. Une partie de E est dite *absorbante*, si elle absorbe toute partie réduite à un point.

Une partie d'un espace localement convexe E est dite *bornée* si elle est absorbée par tout voisinage de 0 (BOURBAKI [2], chap. III, § 2, n° 1, déf. 1, page 4).

(suggested by François Lê)

A. Clebsch, Ueber die Flächen vierter
Ordnung, welche eine Doppelcurve
zweiten Grades besitzen, *Journal für
die reine und angewandte
Mathematik*, 1826

(I)	1) 6, 7, 8, 9, 16 2) 6, 10, 11, 12, 16 3) 7, 10, 13, 14, 16 4) 8, 11, 13, 15, 16 5) 9, 12, 14, 15, 16 6) 1, 2, 13, 14, 15 7) 1, 3, 11, 12, 15 8) 1, 4, 10, 12, 14	9) 1, 5, 10, 11, 13 10) 2, 3, 8, 9, 15 11) 2, 4, 7, 9, 14 12) 2, 5, 7, 8, 13 13) 3, 4, 6, 9, 12 14) 3, 5, 6, 8, 11 15) 4, 5, 6, 7, 10 16) 1, 2, 3, 4, 5.
-----	--	---

(II.)	$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} 1,6 & 2,6 & 3,7 & 4,8 & 5,9 & 6,13 & 7,15 & 9,11 \\ 1,7 & 2,10 & 3,10 & 4,11 & 5,12 & 6,14 & 8,10 & 9,13 \\ 1,8 & 2,11 & 3,13 & 4,13 & 5,14 & 6,15 & 8,12 & 10,15 \\ 1,9 & 2,12 & 3,14 & 4,15 & 5,15 & 7,11 & 8,14 & 11,14 \\ 1,16 & 2,16 & 3,16 & 4,16 & 5,16 & 7,12 & 9,10 & 12,13; \end{array} \right.$
-------	--

$$(III.) \left\{ \begin{array}{l} 1, 6, 15, 7; 1, 6, 14, 8; 1, 6, 13, 9; 1, 6, 2, 16; 1, 7, 12, 8; 1, 7, 11, 9; 1, 7, 3, 16; 1, 8, 10, 9; \\ 1, 8, 4, 16; 1, 9, 5, 16; 2, 6, 15, 10; 2, 6, 14, 11; 2, 6, 13, 12; 2, 10, 3, 16; 2, 10, 8, 12; 2, 10, 9, 11; \\ 2, 11, 4, 16; 2, 11, 7, 12; 2, 12, 5, 16; 3, 7, 11, 14; 3, 7, 12, 13; 3, 7, 15, 10; 3, 10, 9, 13; 3, 10, 8, 14; \\ 3, 13, 6, 14; 3, 13, 4, 16; 3, 14, 5, 16; 4, 8, 14, 11; 4, 8, 12, 13; 4, 8, 10, 15; 4, 11, 9, 13; 4, 11, 7, 15; \\ 4, 13, 6, 15; 4, 15, 5, 16; 5, 9, 13, 12; 5, 9, 11, 14; 5, 9, 10, 15; 5, 12, 8, 14; 5, 12, 7, 15; 5, 14, 6, 15. \end{array} \right.$$

(IV.)	$\begin{cases} 2,6; \ 3,7; \ 4,8; \ 5,9. \\ 1,6; \ 3,10; \ 4,11; \ 5,12. \\ 1,7; \ 2,10; \ 4,13; \ 5,14. \\ 1,8; \ 2,11; \ 3,13; \ 5,15. \\ 1,9; \ 2,12; \ 3,14; \ 4,15. \end{cases}$	$\begin{cases} 1,16; \ 10,15; \ 11,14; \ 12,13. \\ 2,16; \ 7,15; \ 8,14; \ 9,13. \\ 3,16; \ 6,15; \ 8,12; \ 9,11. \\ 4,16; \ 6,14; \ 7,12; \ 9,10. \\ 5,16; \ 6,13; \ 7,11; \ 8,10. \end{cases}$
-------	---	--

2. Tables as texts and objects

1. Stating clauses, composing sets of clauses, making them into a text

1.1. Stating clauses

- Stating the relationship
- Stating the numerical values

1.2. Composing sets of clauses

1.3. Arranging clauses into texts

1.4. Paratext/Peritext for tables and sets of tables

1.5. Sets of tables and their architecture

1.6. Authors for tables and sets of tables

1.7. Tables as objects

2. Producing and using of tables

2.1. Producing tables

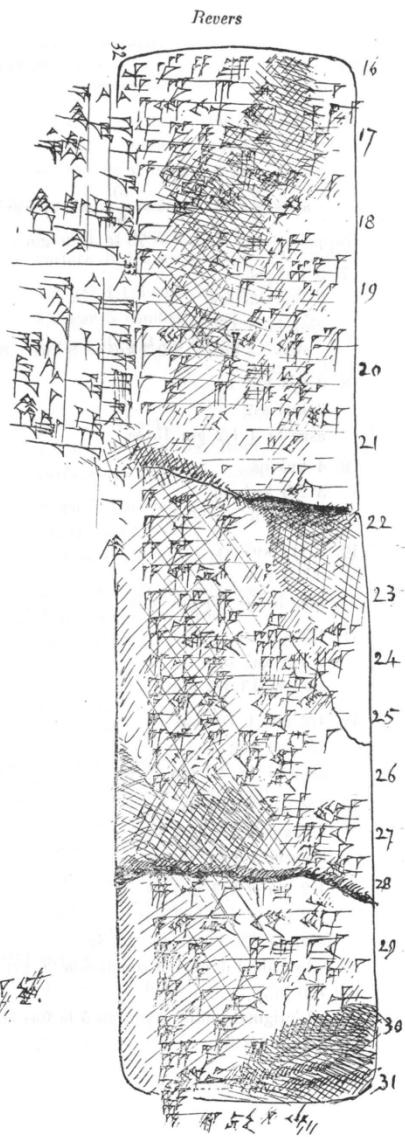
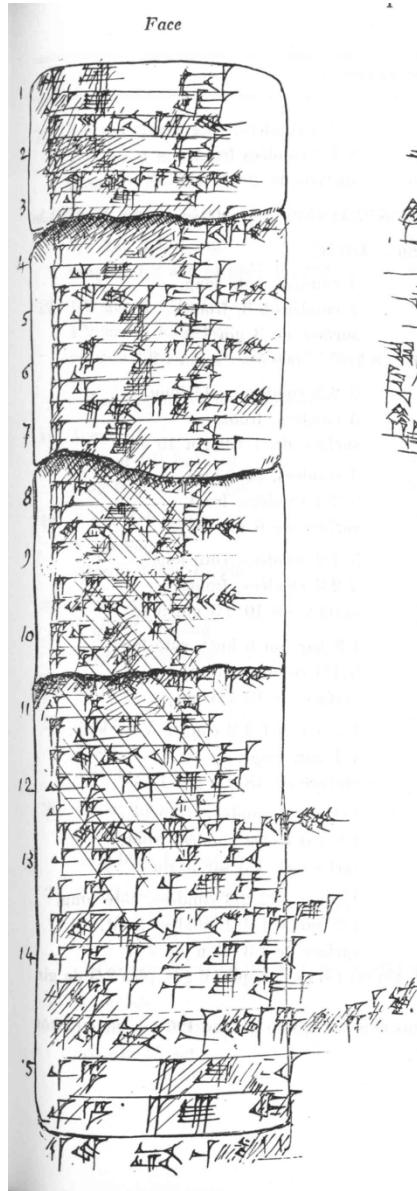
2.2. Handling tables and the locus for use

2.3. Using tables or practices attached to tables

2.4. Changes in the text of tables while editing or copying and their meanings

2.5. Interpretation of a table

(suggested by Christine Proust)



8. 3 2/3 kuš uš
3 kuš sag
ašag-bi 4 1/2 gin 15 še
9. 4 kuš uš
3 2/3 kuš sag
ašag-bi 6 gin 20 še
10. 5 1/2 kuš uš
4 2/3 kuš sag
ašag-bi 10 2/3 gin 5 še
11. 1/2 gar uš
5 1/3 kuš sag
ašag-bi 13 1/3 gin
12. 1/2 gar 1 1/2 kuš uš
1/2 gar sag
ašag-bi 18 2/3 gin 15 še
13. 1/2 gar 2 kuš uš
1/2 gar 1 1/2 kuš sag
ašag-bi 1/3 šar 5 gin
14. 1/2 gar 2 2/3 kuš uš
1/2 gar 1 1/2 kuš sag
ašag-bi 1/3 šar 6 gin 2/3 še
- 3 2/3 coudées, côté long,
3 coudées, front,
surface de 4 1/2 gin 15 še
- 4 coudées, côté long,
3 2/3 coudées, front,
surface de 6 gin 20 še
- 5 1/2 coudées, côté long,
4 2/3 coudées, front,
surface de 10 2/3 gin 5 še
- 1/2 gar (ou 6 kuš), côté long,
5 1/3 coudées, front,
surface de 13 1/3 gin
- 1/2 gar + 1 1/2 coudée, côté long,
1/2 gar, front,
surface de 18 2/3 gin 15 še
- 1/2 gar 2 coudées, côté long,
1/2 gar 1 1/2 coudée, front,
surface de 1/3 šar 5 gin
- 1/2 gar + 2 2/3 coudées, côté long,
1/2 gar + 1 1/2 coudée, front,
surface de 1/3 šar 6 gin ? še

(suggested by Christine Proust)

	Length	Width	Area
Tablet I			
Obverse			
No. 1	$\frac{1}{2}$ kùš	$\frac{1}{3}$ kùš	$12\frac{1}{2}$ še
2	1 kùš	$\frac{2}{3}$ kùš	4 (gín) 5 še
3	$1\frac{1}{2}$ kùš	[1 kùš]	[$\frac{1}{2}$] gín 22 $\frac{1}{2}$ še
4	2 kùš	$1\frac{1}{2}$ kùš	1 gín 4
5	$2\frac{1}{2}$ kùš	2 kùš	2 gín 15 še ³²
6	$2\frac{2}{3}$ kùš	$2\frac{1}{2}$ kùš	$2\frac{2}{3}$ gín 20 še
7	3 kùš	$2\frac{2}{3}$ kùš	$3\frac{1}{3}$ gín
8	$3\frac{2}{3}$ kùš	3 kùš	$4\frac{1}{2}$ gín 15 še
9	4 kùš	$3\frac{2}{3}$ kùš	6 gín 20 še
10	$5\frac{1}{2}$ kùš	$4\frac{2}{3}$ kùš	$10\frac{2}{3}$ gín 5 še
11	$\frac{1}{2}$ GAR	$5\frac{1}{3}$ kùš	$13\frac{1}{3}$ gín
12	$\frac{1}{2}$ GAR $1\frac{1}{2}$ kùš	$\frac{1}{2}$ GAR	$18\frac{2}{3}$ gín 15 še
13	$\frac{1}{2}$ GAR 2 kùš	$\frac{1}{2}$ GAR $1\frac{1}{2}$ kùš	$\frac{1}{3}$ SAR 5 gín
14	$\frac{1}{2}$ GAR $2\frac{2}{3}$ kùš	$\frac{1}{2}$ GAR $1\frac{1}{2}$ kùš	$\frac{1}{3}$ SAR 7 [gín 1]5 še ³³
15	$\frac{1}{2}$ GAR 3 kùš	$\frac{1}{2}$ GAR 2 kùš	$\frac{1}{2}$ SAR
Reverse			
16	$\frac{1}{2}$ GAR 4 kùš	$\frac{1}{2}$ GAR 3 kùš	$\frac{1}{2}$ SAR [7] $\frac{1}{2}$ gín
17	$\frac{1}{2}$ GAR $4\frac{2}{3}$ kùš	$\frac{1}{2}$ GAR 4 kùš	$\frac{2}{3}$ SAR $4\frac{1}{3}$ gín [2]0 še ³⁴
18	1 GAR	$\frac{1}{2}$ GAR [3] kùš	$\frac{2}{3}$ SAR 5 gín
19	1 GAR 3 kùš	1 GAR	1 SAR 15 gín
20	1 GAR 4 kùš	1 GAR 3 kùš	$1\frac{2}{3}$ SAR
21	[2] GAR	[1 GAR 4 kùš]	[$2\frac{2}{3}$] SAR
22	$2\frac{1}{2}$ GAR	2 GAR	5 [SAR]
23	3 GAR 4 kùš	$2\frac{1}{2}$ GAR	$8\frac{1}{3}$ SAR
24	$3\frac{1}{2}$ GAR 3 kùš	3 GAR 4 kùš	$12\frac{1}{2}$ SAR
25	4 GAR	$3\frac{1}{2}$ GAR 3 kùš	15 SAR
26	[5] $\frac{1}{2}$ GAR	[5 GAR]	[27] $\frac{1}{2}$ SAR
27	[$6\frac{1}{2}$] GAR 2 kùš	[$5\frac{1}{2}$ GAR]	[36] $\frac{2}{3}$ SAR
28	[$7\frac{1}{2}$] GAR	$6\frac{1}{2}$ GAR 2 kùš	50 SAR
29	8 GAR 4 kùš	$7\frac{1}{2}$ GAR	1, $2\frac{1}{2}$ [SAR]
30	9 GAR	8 GAR [4 kùš]	[1,15 SAR]
31	10 GAR	9 GAR	1,30 [SAR]
32	$12\frac{1}{2}$ GAR	10 GAR	1 iku 25 SAR
33	13 GAR 4 kùš	$12\frac{1}{2}$ GAR	1 iku 1, $6\frac{2}{3}$ SAR

It is not our intention to republish these two tablets here, but merely to describe their contents by a simple table headed by examples given in full to show the terminology common to each group.

Neugebauer & Sachs, p. 6-7

(suggested by Christine Proust)

ED IIIa table 1: VAT 12 593

Early Dynastic IIIa tablet from Fara (ancient Šuruppak).



Col. i	Col. ii	Col. iii
10×60 <i>ninda</i> the width	10×60 [the side]	[3(šar ₂) 2(bur'u) GAN ₂]
9×60	9×60 the side	2(šar ₂) 4 (bur'u) ₂2(bur ₃)₇
8×60	8×60 the side	2(šar ₂) 8(bur ₃)
7×60	7×60 the side	[1(šar ₂)] 3(bur'u) ₇8(bur ₃)₇
6×60	[6×60 the side]	1(šar ₂) 1(bur'u) 2(bur ₃)
5×60	5×60 the side	5(bur'u)
4×60	4×60 the side	3(bur'u) 2(bur ₃)
₇3×60₇	3×60 the side	1(bur'u) 8(bur ₃)
2×60	2×60 the side	₇8(bur ₃)₇
60	1×60 the side	2(bur ₃)

Col. i	Col. ii	Col. iii
50	50 the side	1(bur ₃) 1(eše ₃) 1(iku)
40	40 the side	2(eše ₃) ₇4(iku)₇
30	30 the side	1(eše ₃) 3(iku)
20	20 the side	[4(iku)]
₇10₇	[10 the side]	[1(iku)]
5	₇5₇ [the side]	[¼(iku)]
Blank	[...]	[...]

(suggested by Christine Proust)

Table of the moon's latitude, degrees of separation

Common numbers				D	1 st	2 nd	Common numbers				D	1 st	2 nd	Common numbers				D	1 st	2 nd
1	359	4	59	40	31	329	4	17	0	61	299	2	25	20	91	269	0	5	20	
2	358	4	59	20	32	328	4	14	0	62	298	2	20	40	92	268	0	10	40	
...	
30	330	4	20	0	60	300	2	30	0	90	270	0	0	0	120	240	2	30	0	

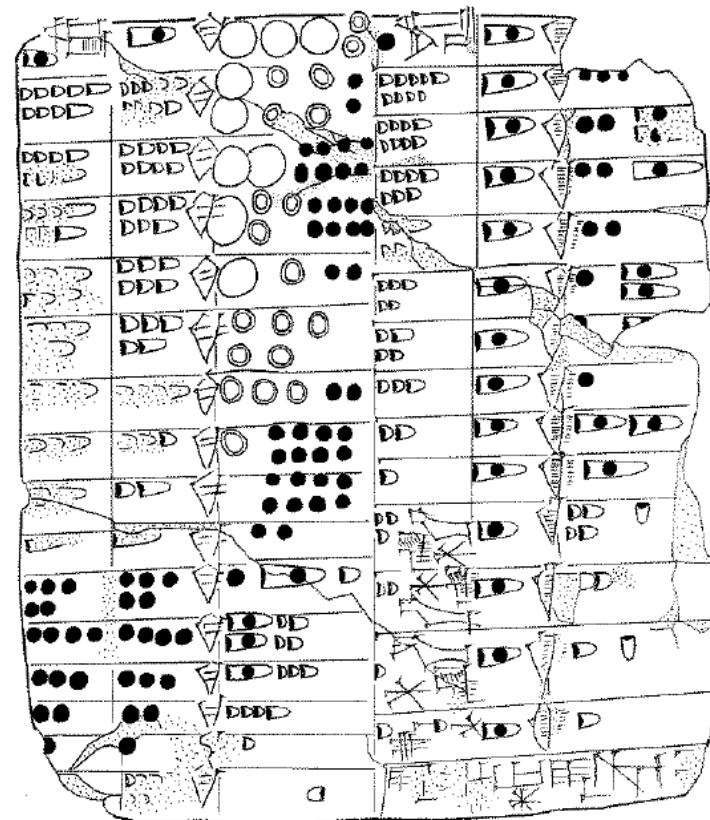
- 1 Ptolemy's *Handy Tables*: Table of the latitude of the moon. (*Vatican Gr.* 1291, f. 45v)

Obv.

(suggested by Christine Proust)



Obv. I II III IV V VI



(suggested by Christine Proust)



(suggested by Karine Chemla)

Book on mathematical procedures 算數書 (*Suanshushu*)

Recently excavated from a tomb sealed before ca. 186 BCE

相乘 寸而乘寸=, (寸)也匁; 乘尺, 十分尺一也匁; 乘十尺, 一尺也匁;
乘百尺, 十尺也; 乘千尺, 百尺也匁。半[寸以] 乘尺, 廿分尺一
也; , 1 (...)

Multiply by one another a *cun* multiplying a *cun* is a *cun*; multiplying a *chi* is one tenth of *chi*; multiplying 10 *chi* is one *chi*; multiplying a hundred *chi* is ten *chi*; multiplying a thousand *chi* is a hundred *chi*. **Half [a *cun*]** being multiplied by a *chi* is one twentieth of *chi*. (...)

廿四朱(銖)一兩匁。三百八十四朱(銖)一斤匁。萬一千五百廿朱(銖)一鈞匁。
四萬六千八十朱(銖)一石。, 47

24 *zhu* is 1 *liang*. 384 *zhu* is 1 *jin*. 11520 *zhu* is 1 *jun*. 46080 *zhu* is 1 *dan*.

*Tratado dela artilleria y uso della platicado por el capitan Diego Ufano
en las guerras de Flandes*

Brussels, 1617 (French translation, 1621)

Au premier degré il iettera sa balle à la distance de 244. pas, contant chascun à 2'. pieds.
Au 2. degré 287. Au 3. 329. Au 4. 370.

Au cinquiesme 410. Au 6. 429. Au 7. 487. Au 8. 524. Au neusieme 560.

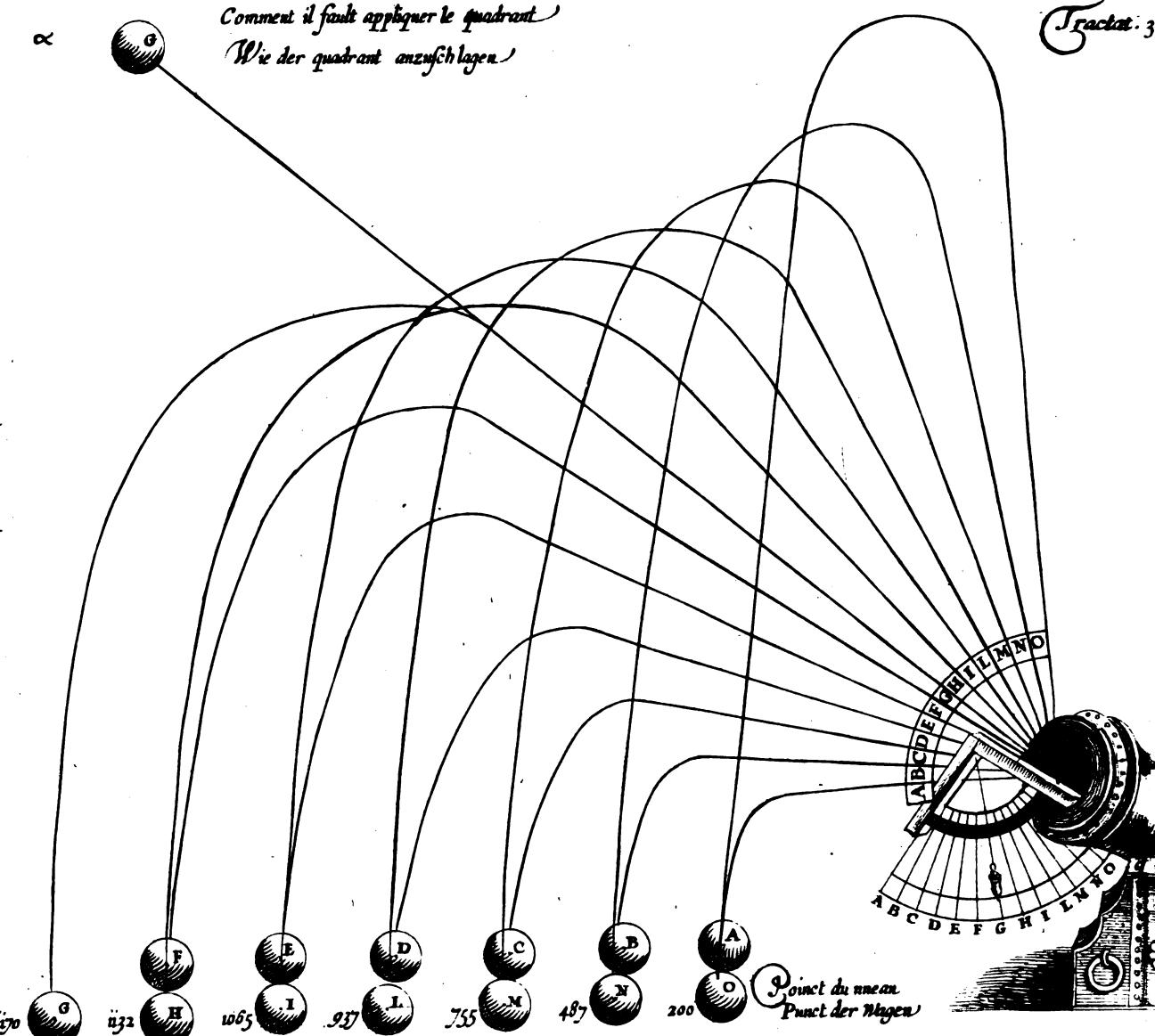
Au 10. qui est le premier point du quadrant reparti en 9. points, il fait 595. A l'onziemesme 629. Au 12. 662. Au 13. 694. Au 14. 725. Au 15. 755. Au 16. 784. Au 17. 812. Au 18. 839. Au 19. 865.

Au 20. qui est le premier degré du second point, il fait 890. pas. Au 21. 914. Au 22. 937. Au 23. 959. Au 24. 980. Au 25. 1000. Au 26. 1019. Au 27. 1037. Au 28. 1054. Au 29. 1070.

Au trentiesme, qui est le premier degré du troisieme point, 1065. Au 31. 1079. Au 32. 1082. Au 33. 1094. Au 34. 1105. Au 35. 1115. Au 36. 1124. Au 37. 1132. Au 38. 1149. pas. Au 39. 1155. pas.

Au quaranteufme qui est le premier du quatrieme point, 1160. Au 41. 1164. Au 42. 1167. Au 43. 1169.

*Tratado dela artilleria y
uso della platicado por
el capitan Diego Ufano
en las guerras de
Flandes
Brussels, 1617 (French
translation, 1621)*



Thakkura Pherū (ca. 1315), *Ganitasārakaumudi*

*dīnayar aggi rasa tera caüras iṁdiya juga īsara
iya kuṭṭhihi cha igāi igigi samahiya lihi maṇahara
kara nihi solasa taha ya uvahi vasu tihi disi sasihara*

12, 3, 6, 13; 14, 5, 4, 11; 2, 9, 16, 7; 8, 15, 10, 1

'Sun' (12), 'fires' (3), 'tastes' (6), thirteen, fourteen, 'sense organs' (5), 'Yugas' (4), and 'Isvara' (11).

Write down these 'six, one' (16) <numbers> one by one, assembled in <sixteen> cells (*kuṭṭha*): an attractive <figure will be obtained>.

'Hands' (2), 'treasures' (9), sixteen, 'seas' (*uvahi*) (7), 'vasus' (8), 'lunar days' (15), 'directions' (10), and 'moon' (1).

12	3	6	13
14	5	4	11
7	16	9	2
1	10	15	8

D E S
Q U A R R E Z.
O U

TABLES MAGIQUES.

Par M. FRENICLE.

1693

TABLE GENERALE
DES
QUARREZ DE QUATRE.

β	β	β	β
1 13 8 12	1 13 12 8	1 13 8 12	1 13 12 8
16 4 9 5	16 4 5 9	16 4 9 5	16 4 5 9
11 7 14 2	7 11 14 2	10 6 15 3	6 10 15 3
6 10 3 15	10 6 3 15	7 11 2 14	11 7 2 14
γ	α	α	γ
1 14 8 11	1 14 11 8	1 14 7 12	1 14 12 7
15 4 10 5	15 4 5 10	15 4 9 6	15 4 6 9
12 7 13 2	6 9 16 3	10 5 16 3	8 11 13 2
6 9 3 16	12 7 2 13	8 11 2 13	10 5 3 16
δ	δ	α	δ
1 11 14 8	1 14 11 8	1 14 7 12	1 10 15 8
16 5 4 9	16 5 4 9	16 5 10 3	16 6 3 9
7 12 13 2	7 12 13 2	9 4 15 6	5 11 14 4
10 6 3 15	10 3 6 15	8 11 2 13	12 7 2 13
β	β	β	β
1 15 10 8	1 11 8 14	1 11 14 8	1 11 14 8
16 6 3 9	16 6 9 3	16 6 3 9	16 6 3 9
5 11 14 4	13 7 12 14	4 10 15 5	7 13 14 2
12 2 7 13	4 10 5 15	13 7 2 12	10 4 5 15

Table of the 880 basic magic squares of order 4
<http://www.magic-squares.net/order4lista.htm>

Sol	Gr	Gr	Co	Row 1					Row 2					Row 3					Row 4					PR.	PR.
#	#	Co		01	02	15	16	12	14	03	05	13	07	10	04	08	11	06	09	A	B				
001	6	22		01	02	15	16	12	14	03	05	13	07	10	04	08	11	06	09	999	1				
002	6	22		01	02	15	16	13	14	03	04	12	07	10	05	08	11	06	09	999	2				
003	12	2		01	02	16	15	13	14	04	03	12	07	09	06	08	11	05	10	1	209				
004	6	22		01	03	14	16	10	13	04	07	15	06	11	02	08	12	05	09	999	4				
005	6	22		01	03	14	16	12	13	04	05	15	08	09	02	06	10	07	11	999	5				
006	6	22		01	03	14	16	15	13	04	02	10	06	11	07	08	12	05	09	999	6				
007	6	22		01	03	14	16	15	13	04	02	12	08	09	05	06	10	07	11	999	7				
008	8	2		01	03	16	14	08	15	02	09	13	06	11	04	12	10	05	07	2	409				
009	8	2		01	03	16	14	12	15	02	05	13	10	07	04	08	06	09	11	3	410				
010	8	2		01	03	16	14	13	15	02	04	08	06	11	09	12	10	05	07	4	411				
011	8	2		01	03	16	14	13	15	02	04	12	10	07	05	08	06	09	11	5	412				
012	6	22		01	04	13	16	08	14	03	09	15	05	12	02	10	11	06	07	999	12				
013	6	22		01	04	13	16	08	15	02	09	14	05	12	03	11	10	07	06	999	13				
014	6	22		01	04	13	16	12	14	03	05	15	09	08	02	06	07	10	11	999	14				
015	6	22		01	04	13	16	12	15	02	05	14	09	08	03	07	06	11	10	999	15				
016	6	21		01	04	13	16	14	15	02	03	08	05	12	09	11	10	07	06	999	16				
017	6	21		01	04	13	16	14	15	02	03	12	09	08	05	07	06	11	10	999	17				
018	6	21		01	04	13	16	15	14	03	02	08	05	12	09	10	11	06	07	999	18				
019	6	21		01	04	13	16	15	14	03	02	12	09	08	05	06	07	10	11	999	19				
020	8	1		01	04	14	15	09	12	06	07	16	05	11	02	08	13	03	10	6	212				
021	2	1		01	04	14	15	13	16	02	03	08	05	11	10	12	09	07	06	7	213				
022	2	1		01	04	14	15	13	16	02	03	12	09	07	06	08	05	11	10	8	214				
023	9	1		01	04	14	15	16	11	05	02	09	06	12	07	08	13	03	10	9	215				
024	4	1		01	04	14	15	16	13	03	02	07	06	12	09	10	11	05	08	10	216				
025	4	1		01	04	14	15	16	13	03	02	11	10	08	05	06	07	09	12	11	217				
026	8	1		01	04	15	14	09	12	07	06	16	05	10	03	08	13	02	11	12	417				
027	2	1		01	04	15	14	13	16	03	02	08	05	10	11	12	09	06	07	13	421				
028	2	1		01	04	15	14	13	16	03	02	12	09	06	07	08	05	10	11	14	422				
029	9	1		01	04	15	14	16	10	05	03	09	07	12	06	08	13	02	11	15	418				
030	4	1		01	04	15	14	16	13	02	03	06	07	12	09	11	10	05	08	16	419				

Two examples of sanskrit “table texts”:
Āryabhaṭa’s (499) table of sine differences
and a table of transits of the sun in the *Vākyakarana*
(ca. 14th century)

(suggested by Agathe Keller)

सप्तराशिक इत्युद्देशकः द्विष्ठंच कानिवासांसि त्रीष्ठिष्ठुः पणे प्रदि ॥ त्रिष्ठानिगहीनानिदरामूलवद
 न्यासः ३ ३ फलसंकमणादिकं पंचराशिक वत्कल्पा फलस्तुपं ३६१ उद्देशकः द्विष्ठंच का वासांसि
 द्विः प ४ ४ लोर्यादिष्ठद्वृत्या कनिवासांसि त्रिष्ठानिवदास्तमे ॥ न्यासः ३ ३ प्रत्रोभयतः फलस्तु
 कल्पा ४ ४ श्रीष्ठंप्राग्वक्लवासांसि १० एवंभिन्नेच्चपुभयतश्छेष्टसंकमणे ४ ४ यो कल्पाद्वाजो घंसर्वम्
 यमभ्यराशिकत्रेणापलानयनं प्रदर्शयेभित्तिसन्तराशिकं ॥ न च ५ ५ राशिकोदाहरणं ॥
 त्ते धवित्तारुष्यो उशाष्ट्रोतथादशा ॥ यासांमूल्यं सज्जातासादीनाराष्ट्रद्वप्रकृतिः ५ ५ तिताः ॥ इष्ठ काम
 न्यासामा पौनाद्वै प्रदूतकैः ॥ सोलैल धंगहीतमस्तमाभिर्यदेयत्तद्वस्तुपं ६ न्यासः १६ ११ १०८
 चफलसंकमणेष्टदसंकमणेत्वक्तेलव्यदी २५३१ एवंनवमराशिनीनारोः हत्वैष्टका ६ ६ नाल
 नमुभयतः फलसंकमणेनात्र त्रिराशिकच ६ ६ तुष्टयेन कलानयनं प्रदर्शयेभित्ति ॥ १७ ३० एवं

Setting aside ephemeral computational tables,
later astral tables, or playful tables like magic squares

22	21	13	5	46	38	30
31	23	15	14	6	47	35
40	32	24	16	8	7	48
49	41	33	25	17	9	1
2	43	42	34	26	18	10
11	3	44	36	35	27	1
20	12	4	45	37	29	2

Figure 21: Nārāyaṇa's method for odd squares (II): diagonal method.

1	24	37	36	2	23	38	35	3	22	39	34
42	31	6	19	41	32	5	20	40	33	4	2
12	13	48	25	11	14	47	26	10	15	46	2
43	30	7	18	44	29	8	17	45	28	9	1

(a) Preliminary Magic Obligation

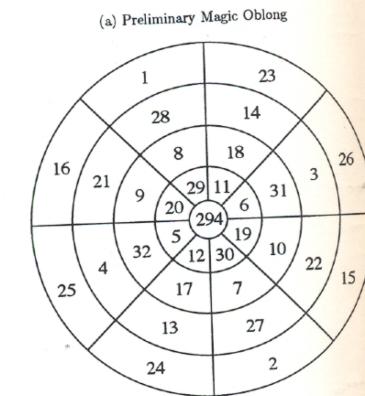
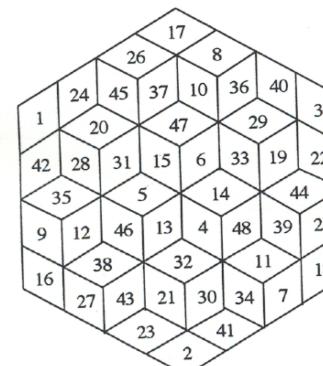


Figure 23: (a) Nārāyaṇa's magic circle: preliminary magic oblong. (b) Nārāyaṇa's magic circle ($p = 360$).



(b) Magic Lotus: $p = 29$

Figure 22: (a) Nārāyaṇa's magic lotus with six petals; preliminary magic oblong. (b) Nārāyaṇa's magic lotus with six petals ($= 294$).
(b) Magic Lotus. $p = 294$

1	8	$a - 7$	$a - 2$
$a - 5$	$a - 4$	3	6
7	2	$a - 1$	$a - 8$
$a - 3$	$a - 6$	5	4

a =

Figure 24: Pattern for magic square of four by Laghunandana.

(suggested by
Agathe Keller)

(suggested by Agathe Keller)

Āryabhaṭīya 499 A.D

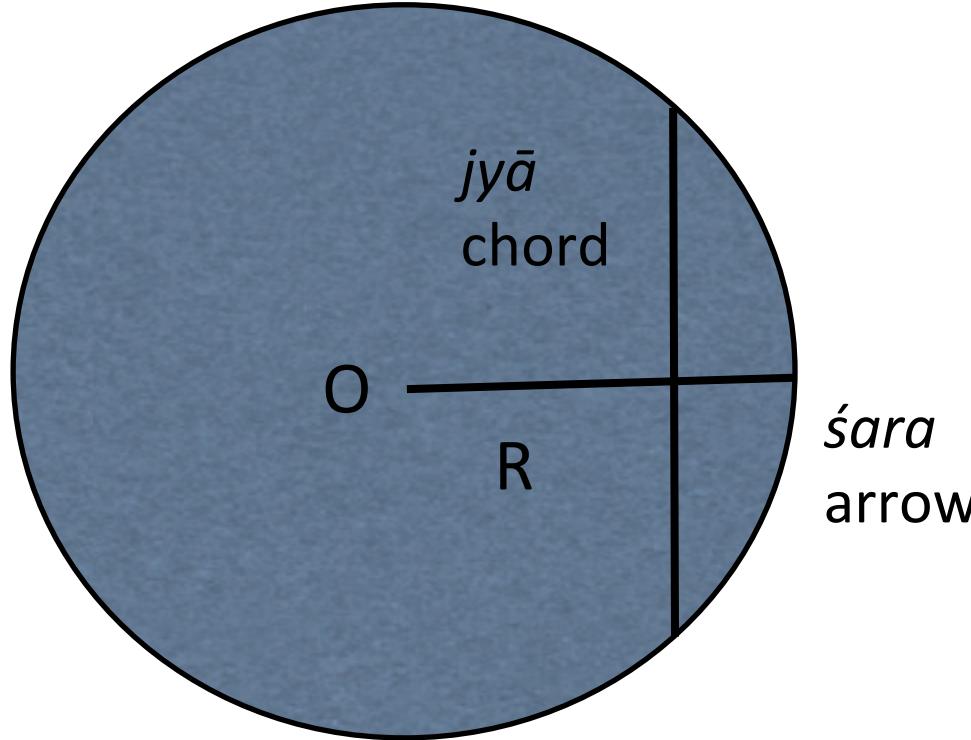
Ab.1.12 Half chords in minutes (*kālārdhajyā*)
are makhi bhakhi phakhi dhakhi ḥakhi ḥakhi/
ḥakhi hasjha skaki kiṣga śghaki kighva ghlaki
kigra hakya dhaki kica sga jhaśa ḥva kla pta pha
cha//

Ab.1.12 Half chords in minutes (*kālārdhajyā*)
are two hundred and twenty-five, two hundred
and twenty-four, two hundred and nineteen, two
hundred and fifteen, two hundred and ten,
two hundred and five/ ...

(suggested by Agathe Keller)

Dhanuhkṣetra

Bow-field



The geometrical derivation of this table is often discussed by following astronomers

$$K_i = J_i - J_{i-1}, \text{ for } 24 \geq i > I \quad K_I = J_I$$

(suggested by
Agathe Keller)

Arc in minutes	List	Rsines
225'	225 K_1	225
450'	224 K_2	449
675'	219	671
900'	215	890
1125'	210	1105
1350'	205	1315
1575'	199	1520
1800'	191	1719
2025'	183	1910
2250'	174	2093
2475'	164	2267

J_1

$$J_2 = K_1 + K_2$$

Understanding how the table is “compacted”, and how it is to be read.

(suggested by
Agathe Keller)

$$K_i = J_i - J_{i-1}, \text{ for } 24 \geq i > 1$$

$$K_1 = J_1$$

$$J_{24} = R$$

Arc in minutes	List	Rsines	Rversesines
1300'	143 K_{13}	2728	853
1525'	131	2859	710
1750'	119	2978	579
1975'	106	3084	460
2200'	93	3177	354
2425'	79	3256	261
2650'	65	3321	182
2875'	51	3372	117
3100'	37 K_{22}	3409	66
3325'	22 K_{23}	3431	29
3600'	7 K_{24}	3438	0

$$J_{13} = K_1 + K_2 + \dots + K_{13}$$

$$R - J_{21} = K_{24} + K_{23} + K_{22}$$

$$R - J_{22} = K_{24} + K_{23}$$

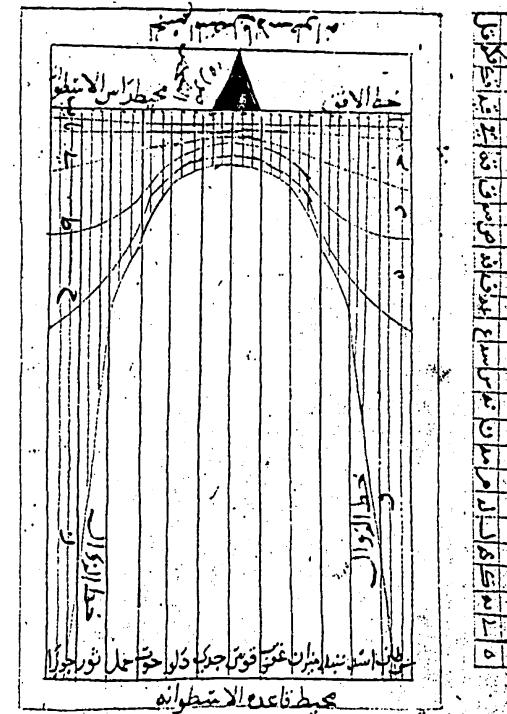
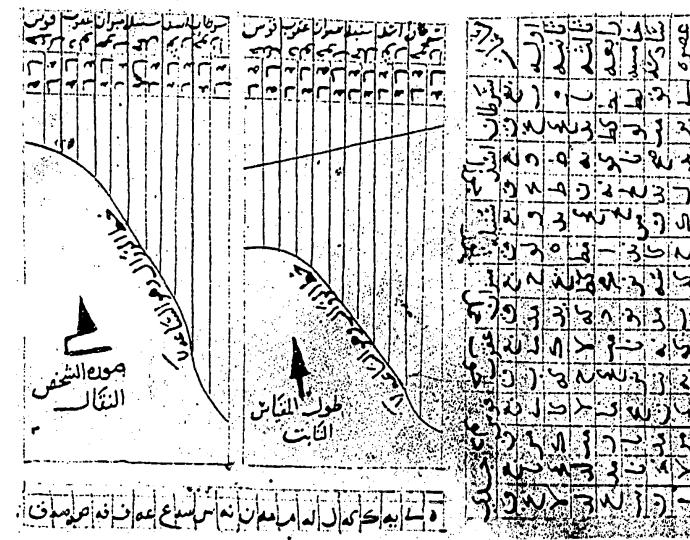
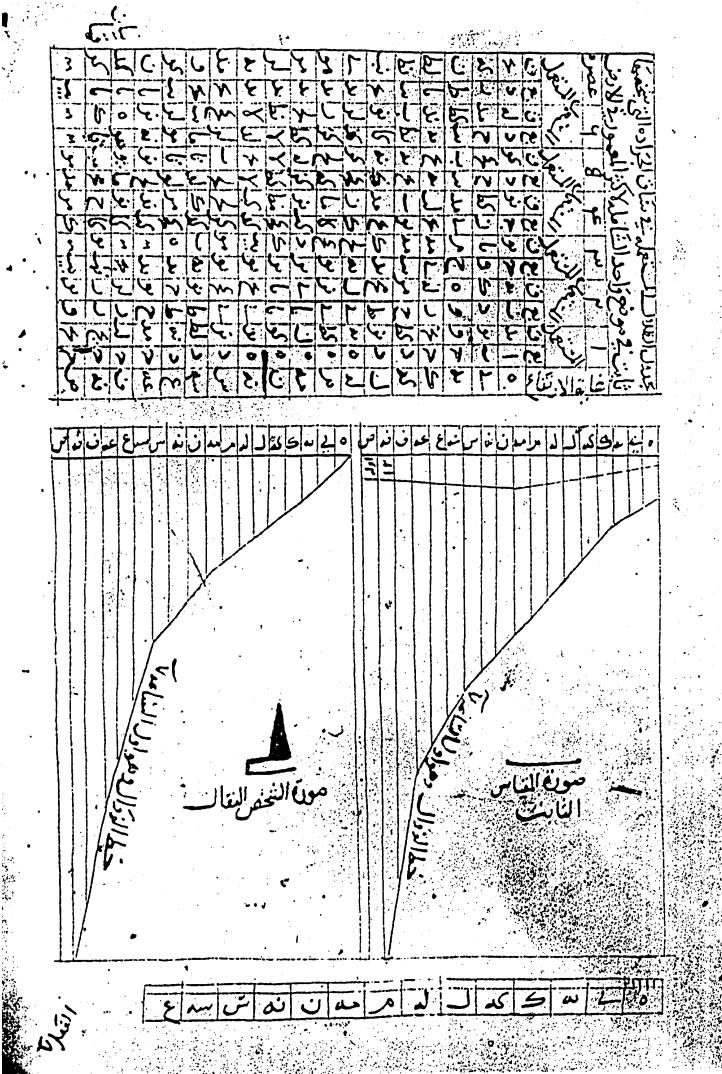
$$J_{23} = K_{24} + K_{23} + K_{22}$$

(suggested by Agathe Keller)

Table 1: *Sankramavākyas*, their meanings as per the commonly employed classical Sanskrit and their decoded numerical values

No.	<i>Vākya</i>	Literal meaning	Long.	Transit on
01	<i>śrīrguṇamitrā</i>	Wealth is a friend of virtues	30°	$2^d55^n32^v$
02	<i>bhūrvidhipaksā</i>	A land supported by law	60°	$6^d19^n44^v$
03	<i>strīratīśurā</i>	A very skillful woman	90°	$2^d56^n22^v$
04	<i>bhogavarāte</i>	A better [source of] enjoyment for you.	120°	$6^d24^n34^v$
05	<i>bhāvacarorih</i>	The [actual] enemy resides in thought	150°	$2^d26^n44^v$
06	<i>tena vaśatvam</i>	Being controlled by that	180°	$4^d54^n06^v$
07	<i>lokajabhītiḥ</i>	Fear arising out of the world	210°	$6^d48^n13^v$
08	<i>sthūlahayo'yam</i>	This is quite a huge horse	240°	$1^d18^n37^v$
09	<i>aṅgadhibigāraḥ</i>	One who has crooked parts	270°	$2^d39^n30^v$
10	<i>stambhitanābhīḥ</i>	One whose centre is fixed	300°	$4^d06^n46^v$
11	<i>nityaśaśīśo</i>	Eternal lord of the Moon	330°	$5^d55^n10^v$
12	<i>yāgamayo'yam</i>	This is full of sacrifice	360°	$1^d15^n31^v$

al-Marrakushi (ca. 1280) Construction of a sundial



Lambert, *Pyrometrie*, Berlin, 1769

Lambert, *Construction d'une échelle ballistique*, 1773

“Il y a huit ans que je lus à l'Académie un Mémoire sur la résistance des fluides, avec la solution du probleme ballistique au moyen des suites infinies. Comme assez souvent l'usage de ces suites demande beaucoup de tems & qu'il est même quelquefois embarrassant, je pensai dès lors à quelque moyen d'abréger les calculs dans les applications particulières, & l'idée d'un calibre ou d'une échelle se présenta comme d'elle-même.

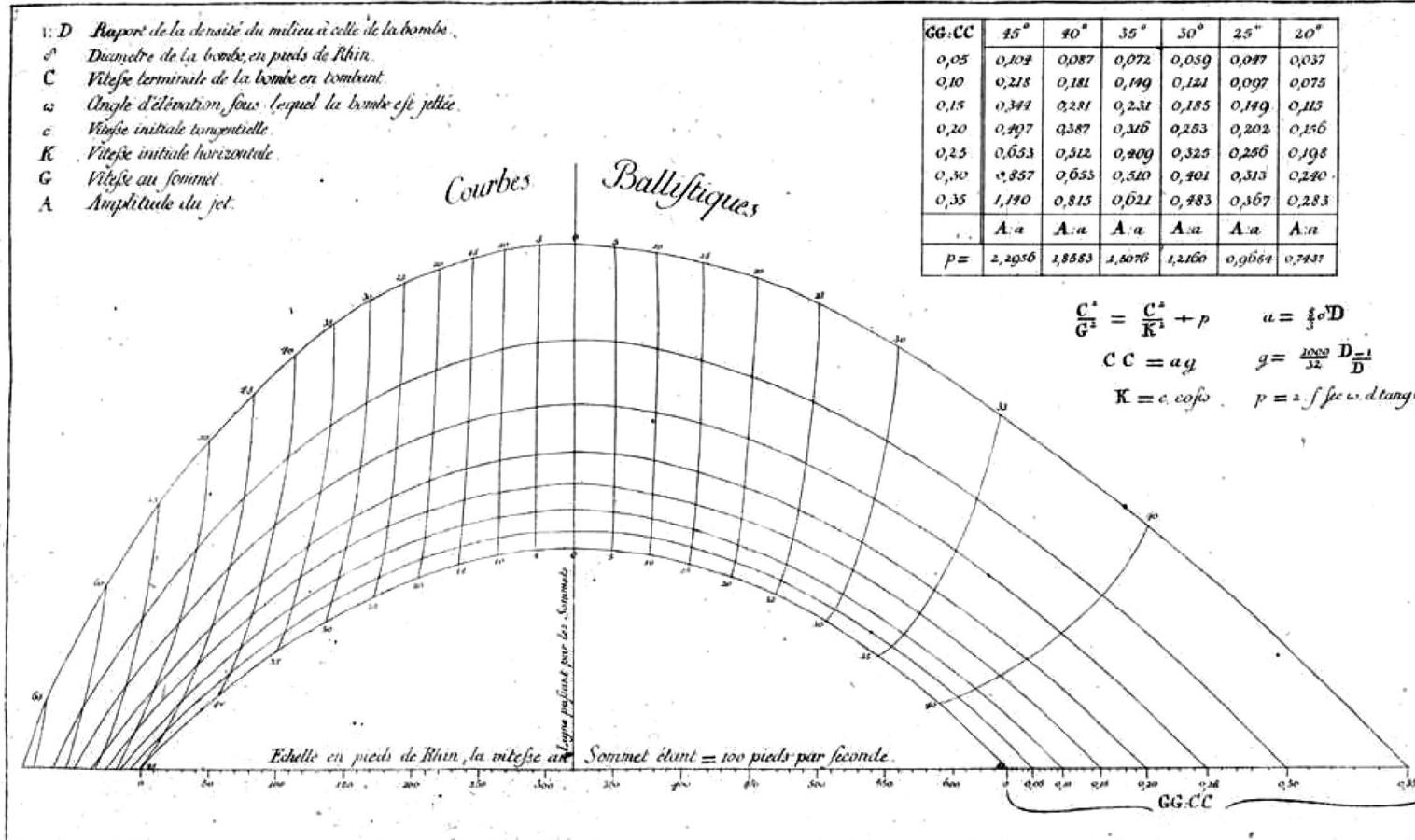
Il s'agissoit donc de construire un certain nombre de courbes ballistiques conformément aux différens degrés de vitesse & de résistance. Pour cet effet je me servis des Tables calculées par feu M. le Comte de Græveniz [...].”

12 ^e ESPÈCE, $\gamma = 55^\circ$				
BRANCHE ASCENDANTE.				
ANGLE de projection	Arc AG =	Portée AF =	Hauteur FG =	Vitesse en G =
	2,302585. c ×	2,302585. c ×	2,302585. c ×	$\sqrt{2 \alpha gc} \times$
0°	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247
5°	0,0213983	0,0243779	0,0009334	0,7622067
10°	0,0444434	0,0442256	0,0039444	0,7947494
15°	0,0699780	0,0694552	0,0094682	0,8343004
20°	0,0991426	0,0969700	0,0182384	0,8836870
25°	0,1336729	0,1288748	0,0314523	0,9533964
30°	0,1763265	0,1666490	0,0511475	1,0479645
35°	0,2319040	0,2434904	0,0840077	1,1844330
40°	0,3097574	0,2752577	0,1284037	1,3814570
45°	0,4347380	0,3654942	0,2108426	1,7222525

BRANCHE DESCENDANTE.				
ANGLE en H	Arc AH =	Portée AE =	Hauteur EH =	Vitesse en H =
	2,302585. c ×	2,302585. c ×	2,302585. c ×	$\sqrt{2 \alpha gc} \times$
5°	0,0203933	0,0203739	0,0008895	0,7264018
10°	0,0403442	0,0404244	0,0034897	0,7481402
15°	0,0602444	0,0593849	0,0078033	0,7455700
20°	0,0806566	0,0790496	0,0139444	0,7484620
25°	0,1020645	0,0988254	0,0224327	0,7267940
30°	0,1250513	0,1492473	0,0327482	0,7407330
35°	0,1503647	0,1405638	0,0463475	0,7606280
40°	0,1789586	0,1632543	0,0637561	0,7870175
45°	0,2124746	0,1877385	0,0861943	0,8206300
50°	0,2549105	0,2445855	0,1154930	0,8623730
55°	0,3040299	0,2444873	0,1544618	0,9432960
60°	0,3639646	0,2783024	0,2075404	0,9744630
65°	0,4480656	0,3474356	0,2821389	1,0464940
70°	0,5639193	0,3622363	0,3940249	1,1290330

Lambert 1773

Recueil Mém. de l'Acad. R. des Sc. et B.L. Pl. II p. 41



Clairaut, *Théorie du mouvement des comètes*, 1760

« Ces premiers calculs généraux étant faits, je procède pour l'exemple proposé de la manière suivante, dont toutes les opérations sont distinguées par des titres que j'avois fait imprimer sur des papiers destinés aux calculs de cette nature que demandoient les trois révolutions à examiner. Ce sont ces mêmes papiers que M. de la Lande a bien voulu se charger de faire remplir en suivant les opérations indiquées.

[...]

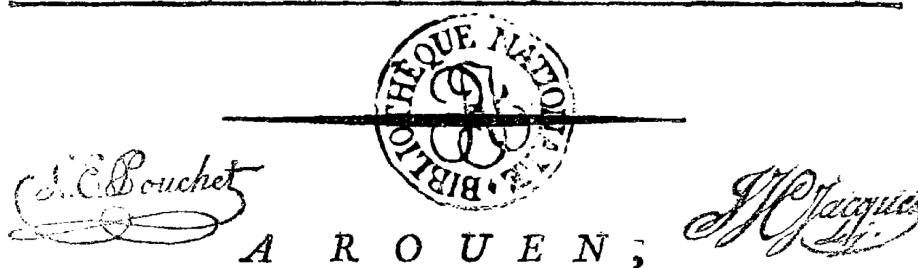
Je faisois ensuite une autre opération plus longue & plus penible, mais très-importante aussi, pour m'assurer de l'exactitude des nombres que j'employois. C'étoit de construire graphiquement avec des échelles bien divisées les courbes dont les ordonnées étoient représentées par ces nombres. Lorsque leur courbure avoit des fautes, je recommençois le calcul des parties où ils avoient lieu. Par ce moyen je me suis apperçu de toutes les fautes qui pouvoient être de quelque conséquence. »

T A B L E A U DES NOUVEAUX POIDS, MESURES ET MONNOIES DE LA RÉPUBLIQUE FRANÇAISE.

SUIVIS des rapports qu'ils ont avec les plus connus de l'Europe, comparés entr'eux ; d'après la Métrologie de PAUCTON et au moyen des lignes proportionnelles.

PAR LOUIS-E. POUCHET.

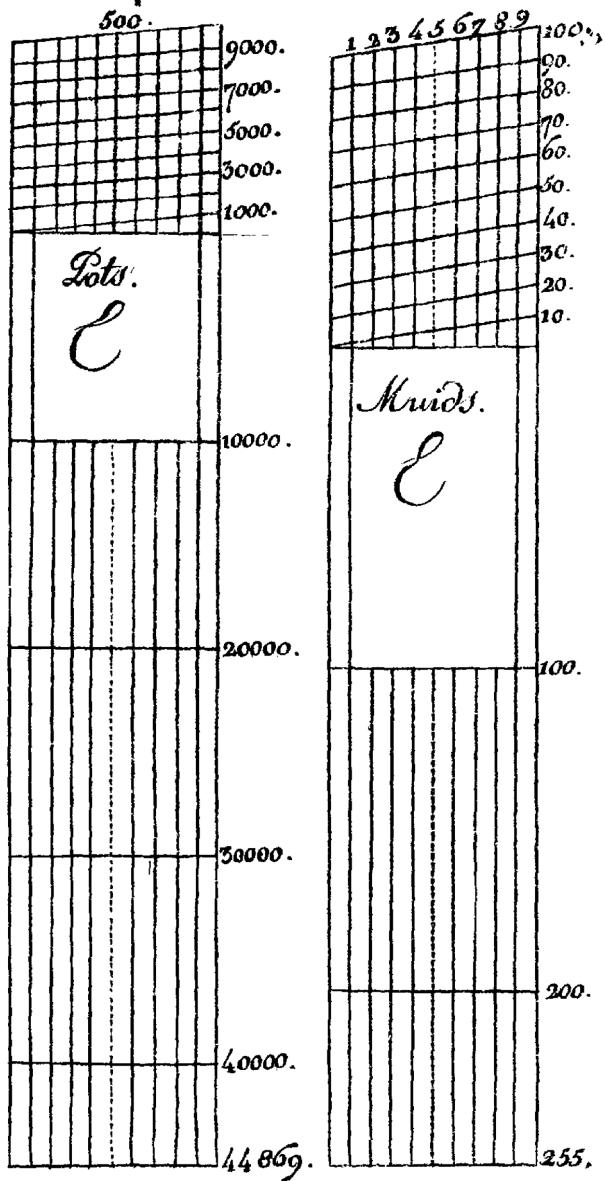
Se vend chez l'AUTEUR, rue de la Régénération, ci-devant de la Vicomté, & chez le Citoyen JACQUES, Graveur.



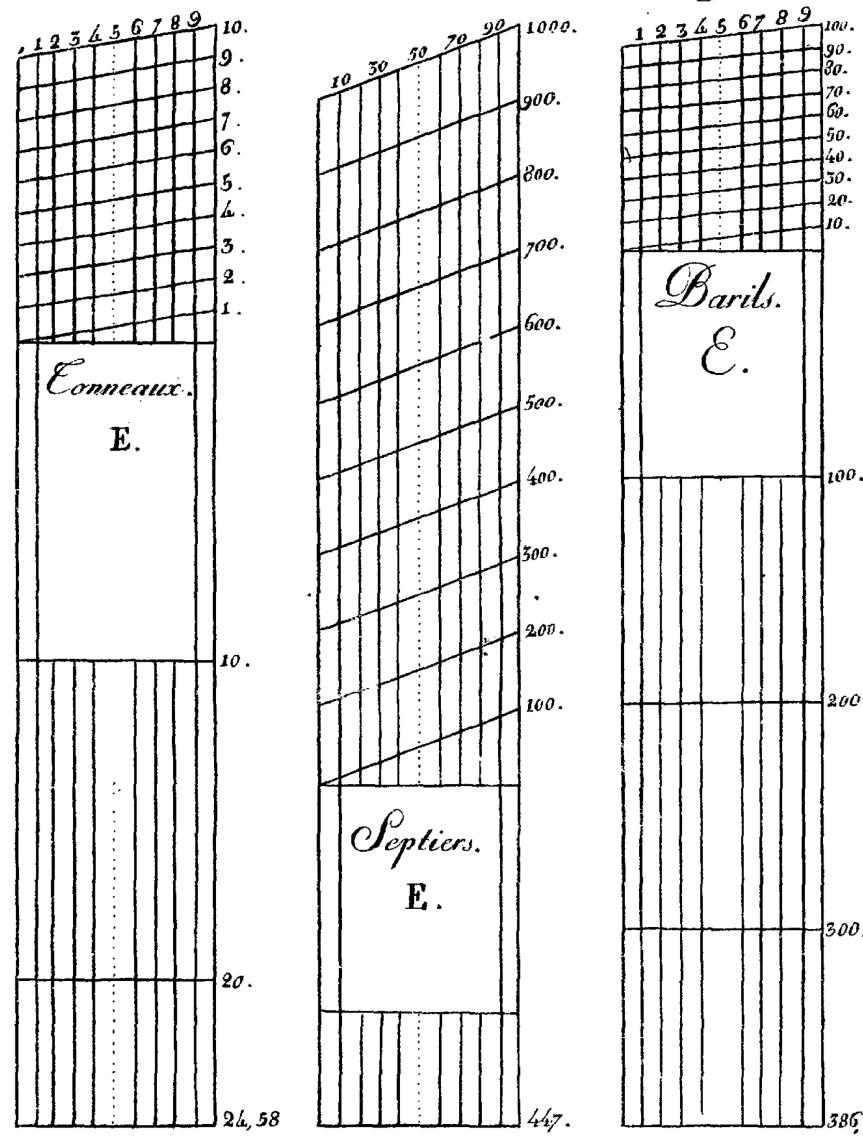
De l'Imprimerie du JOURNAL DE ROUEN & DU DÉPARTEMENT DE LA SEINE INFÉRIEURE, rue Béfroi, n°. 40

AN TROISIÈME DE LA RÉPUBLIQUE.

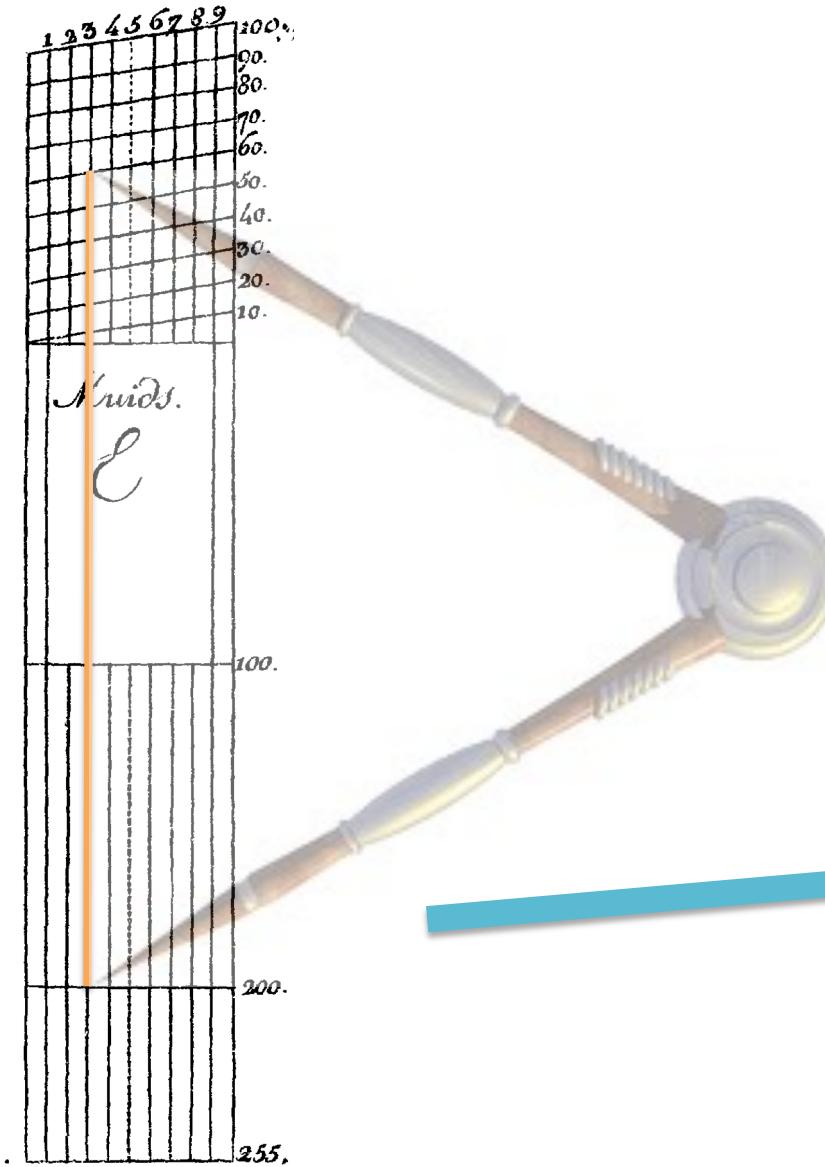
Arques. Auxerre. Beaune.



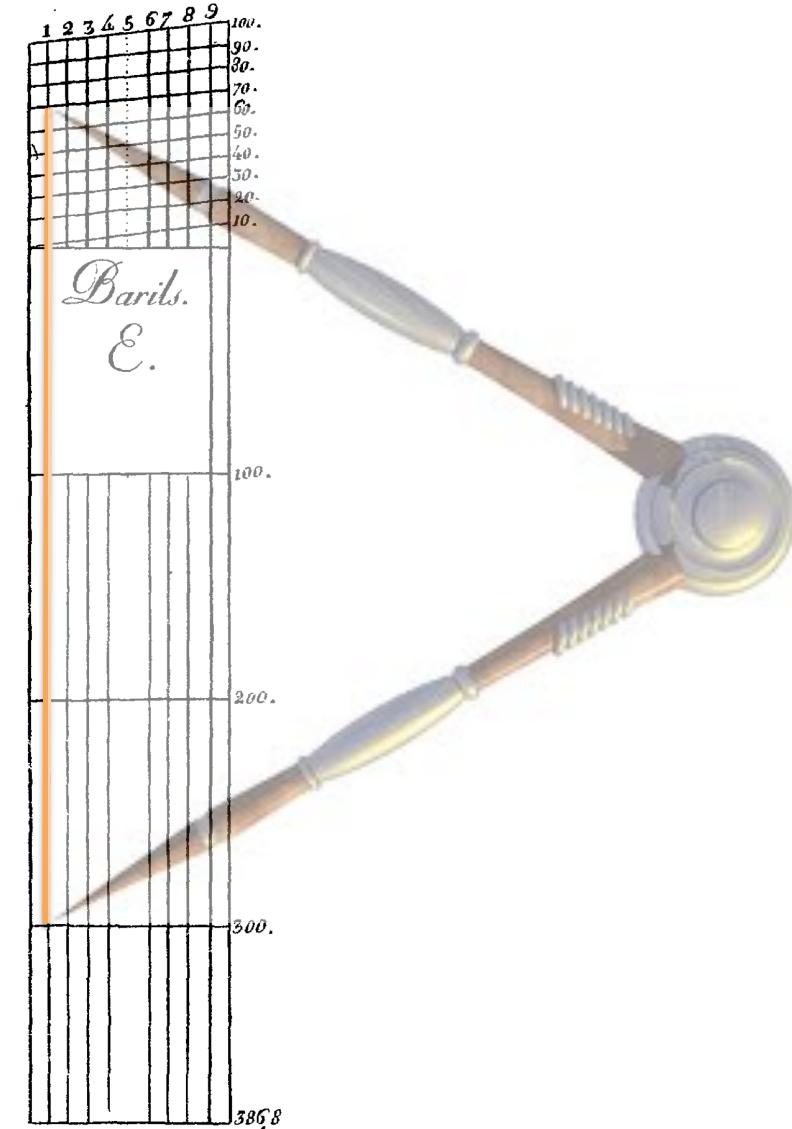
Brest. Castelnau-d'ari. Cognac.



Auxerre.

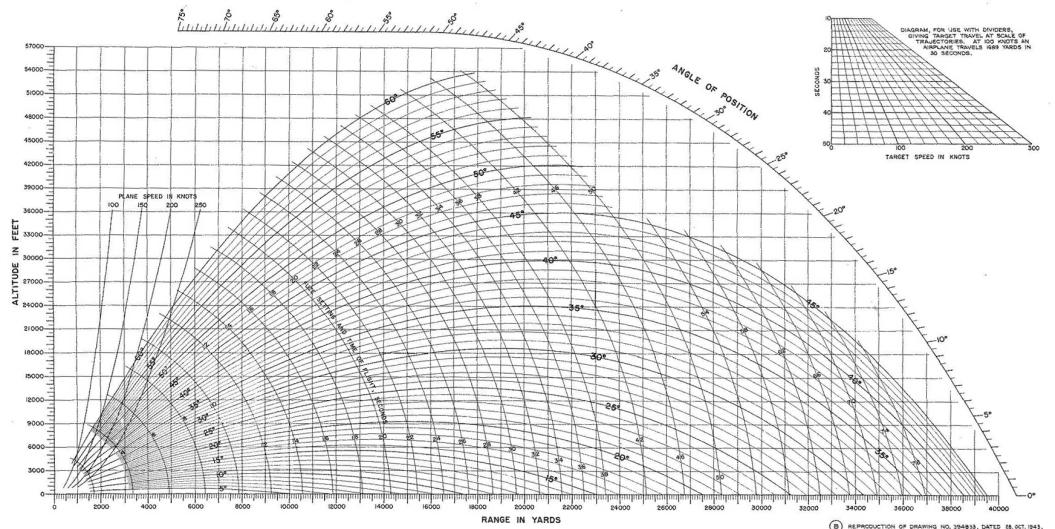


Cognac.



253 Muids of Auxerre = 361 Barils of Cognac

The Aberdeen differential analyzer computed 1560 production trajectories used in the preparation of 10 firing tables, between February 1 and June 30, 1945.



DECLASSIFIED
11/8/2013
Annually

NOTES:

1. THESE TRAJECTORIES ARE APPLICABLE TO 100 INCH HIGH CAPACITY PROJECTILES, FITTED WITH MECHANICAL TIME FUZE, DIA. 1.50 IN., WEIGHT 10.0 POUNDS, ON A FLAT PLANE.
2. IN THE CASE OF THE 100 INCH HIGH CAPACITY PROJECTILE WHEN FIRED WITH SERVICE SPEED OF 2800 FEET PER SECOND, THE INITIAL VELOCITY COMPUTED FOR SEIS S.E.S. IS EXPECTED TO AVERAGE VELOCITY LIFE OF 2700 FEET PER SECOND.
3. THE ANGLE IN DEGREES INDICATED ON THE TRAJECTORY ELEVATION OF THE GUN WITH RESPECT TO THE HORIZONTAL, WHICH IS THE ANGLE OF ELEVATION, IS THE ANGLE OF ELEVATION PROFOUND GRADING FUNDAMENTAL UPON WHICH THESE TRAJECTORIES ARE BASED. NO CORRECTIONS FOR GRAVITY OR AIR RESISTANCE ARE NECESSARY.
4. THE CURVES FOR PLATE SPEEDS OF 1000 FEET PER SECOND ARE THE LOGS FOR RELEASE POINTS FOR A 100 LB. ROME BALLISTIC COEFFICIENT OF .875.

B		REPRODUCTION OF DRAWING NO. 394833, DATED 28, OCT, 1943.	
		16 IN. 50 CAL. GUN	
		TRAJECTORIES	
		I.V. - 2615 F.M.	
		1900 LB. H. C. PROJECTILE	
		TAXY OFFICE BUREAU OF ORDNANCE WASHINGTON, D. C. Doc. 148	
		<i>R.E. Mac</i>	
X-1		CLASSIFICATION REF ID: A1234567890	
X-2		DATA REF ID: A1234567890	
X-3		394833	

U. S. GOVERNMENT PRINTING OFFICE: 1906. 5-1250

3. Tools of the table crackers

1. Restoring the author's sources and methods

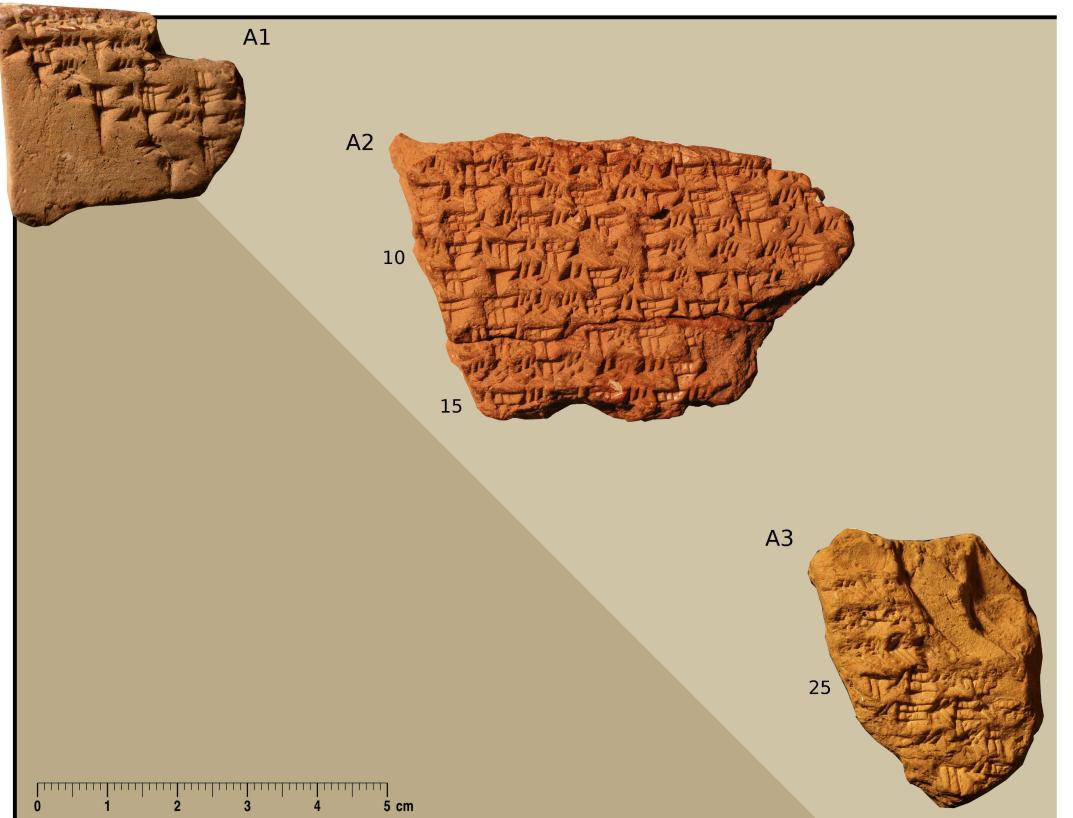
- Understanding the theoretical model underlying a table
- Reconstructing a table's numerical parameters
- Determining dependences between tables
- Restoring missing entries in tables
- Reconstructing the process of computation

2. Restoring tabular context

- Reconstructing the purpose of a table
- The fit with the physical phenomenon analyzed by the table

Columbia University Plimpton 322



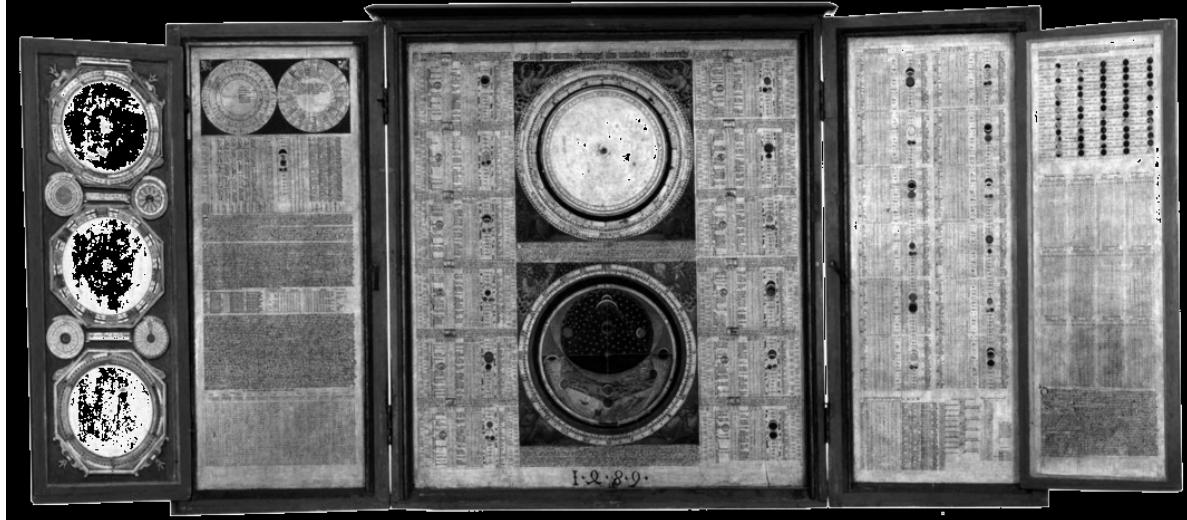


Factorization table for 9 Fragments BM 34249, BM 32401, 34517 Reconstruction by Mathieu Ossendrijver

Obverse

1	ina a-mat ⁴ EN u ⁴ GAŠAN- ^r ia ₂ ¹	[liš-lim]	9 ⁴⁶
2	16.34.3 ^r 9 ¹ .[52.40.21.26.52.57.35.56.49.50.37.38.58.13.38.4.44.57.15.3.37.21]		9 ⁴⁵
3	1.50.31. ^r 5 ¹ .[51.9.2.59.13.3.59.38.52.17.30.59.48.10.53.51.39.41.40.24.9]		9 ⁴⁴
4	12.16.47.1[9.1.0.19.54.47.6.37.39.8.36.46.38.41.12.39.4.24.37.49.21]		9 ⁴³
5	1.21.51.5[5.26.46.42.12.45.14.4.11.05.7.25.10.57.54.44.20.29.24.12.9]		9 ⁴²
6	9.5.[46.9.38]. ^r 31.21.25.1.33.47.53.26 ¹ .[22.47.53.6.4.55.36.36.1.21]		9 ⁴¹
7	1.0.[38.27.44.16]. ^r 4 ¹ 9.2.46.50.25.19.16.15.51. ^r 5 ¹ [9.14.0.32.50.44.0.9]		9 ⁴⁰
8	[6.44.16.24.5] ^r 5 ¹ .12.6.58.32.16.8.48.[28.25.46.34.53.23.38.58.13.21]		9 ³⁹
9	[44.55.9.2] ^r 6 ¹ .8.0.46.30.15.7.38.43.9.3[1.50.32.35.57.39.48.9]		9 ³⁸
10	[4.59.27.42]. ^r 5 ¹ 4.13.25.10.01.40.50.58. ^r 7 ¹ .[43.32.16.57.19.44.25.21]		9 ³⁷
11	[33.16.24.4]6.1.29.27.46.51.12. ^r 1[9.47.31.30.15.13.2.11.36.9]		9 ³⁶
12	[3.41.49.2] ^r 5 ¹ .6.49.56.25. ^r 12.21 ¹ .[22.11.56.50.01.41.26.54.37.21]		9 ³⁵
13	[24.38.49]. ^r 27.25.3 ¹ .2.56. ^r 8 ¹ .[2.22.27.59.38.53.31.16.19.24.9]		9 ³⁴
14	[2.44.18].49.42.50.19.34.1[3.35.49.46.37.39.16.48.28.49.21]		9 ³³
15	[18.15]. ^r 25.31.25.35.30 ¹ .[28.10.38.51.50.51.1.52.3.12.9]		9 ³²
16	[2.1.42.50.09.30.36.43.7.50.59.5.39.0.12.27.1.21]		9 ³¹
17	[13.31.25.34.23.24.4.47.32.19.53.57.40.01.23.0.9]		9 ³⁰
18	[1.30.09.30.29.16.0.31.56.55.32.39.44.26.49.13.21]		9 ²⁹
19	[10.01.3.23.15.6.43.32.59.30.17.44.56.18.48.9]		9 ²⁸
20	[1.6.47.2.35.0.44.50.19.56.41.58.19.35.25.21]		9 ²⁷
21	[7.25.13.37.13.24.58.55.32.57.59.48.50.36.9]		9 ²⁶
22	[49.28.10.48.9.2] ^r 6 ¹ .3 ^r 2.50 ¹ .[19.46.38.45.37.21]		9 ²⁵
23	[5.29.47.52.1.2]. ^r 5 ¹ .6.5 ^r 8 ¹ .[55.31.50.58.24.9]		9 ²⁴
24	[36.38.39.6.46]. ^r 5 ¹ 9.39.[52.50.12.19.49.21]		9 ²³
25	[4.4.17.40.45.1]3.17. ^r 45 ¹ .[52.14.42.12.9]		9 ²²
26	[27.8.37.51.41].28.38.2 ^r 5 ¹ .[48.18.1.21]		9 ²¹
27	[3.0.57.32.24.3] ^r 6 ¹ .30.56. ^r 1 ¹ .[2.2.0.9]		9 ²⁰
28	[20.06.23.36.4].3.2 ^r 6 ¹ .[14.40.13.21]		9 ¹⁹
29	[2.14.2.37.20.27.2.54.57.48.9]		9 ¹⁸
30	[14.53.37.28.56.20.19.26.25.21]		9 ¹⁷
31	[1.39.17.29.52.55.35.29.36.9]		9 ¹⁶
32	[11.1.56.39.12.50.36.37.21]		9 ¹⁵
33	[1.13.32.57.41.25.37.24.9]		9 ¹⁴
34	[8.10.19.44.36.10.49.21]		9 ¹³
35	[54.28.51.37.21.12.9]		9 ¹²
36	[6.3.12.24.9.1.21]		9 ¹¹
37	[40.21.22.41.0.9]		9 ¹⁰
38	[4.29.2.31.13.21]		9 ⁹
39	[29.53.36.48.9]		9 ⁸
40	[3.19.17.25.21]		9 ⁷
41	[22.8.36.9]		9 ⁶
42	[2.27.37.21]		9 ⁵
43	[16.24.9]		9 ⁴
44	[1.49.21]		9 ³
45	[12.9]		9 ²
46	[1.21]		9 ¹

Marcus Schinnagel's winged polyptych of 1489



Tobias Mayer, *Lunar Tables*, 1753

Manuscripts in the Niedersächsische Staats- und Universitäts- Bibliothek, Göttingen, studied by Simon Wepster

Every column a change to a table coefficient

Every row an observation

**Every number is a difference
between tables and observation**

3. Tables as a specific mode of transmission

1. Elements of table transmission

- The symbolic means of expression of numbers
- Levels of precision
- Units of measurement
- Layout and design template
- Increments in the argument of tabulation
- The numerical entries
- The model, the function itself, the underlying parameters

2. Elements of paratextual transmission

- Transmission of language and technical terminology
- Transmission of sets of practice through instructional paratext
- Transmission of belief and social practice through paratext

4. Tables as a medium for creation of mathematics

Gauss, *Disquisitiones Arithmeticæ*

TABVLA I (art. 58, 91)					
		2.	5.	7. 11	15. 17. 19. 25. 29
5	2	1			51. 57. 41. 45. 47
5	2	1. 5			
7	5	2. 1. 5			
9	2	1. *	5. 4		
11	2	1. 8. 4. 7			
13	6	5. 8. 9. 7. 11			
16	5	*	5. 1. 2. 1	5	
17	10	10. 11. 7. 9. 13	12		
19	10	17. 5. 2. 12. 6	13. 8		
23	10	8. 20. 15. 21. 5	12. 17. 5		
25	2	1. 7. *	5. 16	19. 13. 18. 11	
27	2	1. *	5. 16. 13	8. 15. 12. 11	
29	10	11. 27. 18. 20. 25	2. 7. 15. 24		
31	17	12. 13. 20. 4. 29	25. 1. 22. 21. 27		
32	5	*	5. 1. 2. 5	7. 4. 7. 6. 5	0
37	6	11. 54. 1. 28. 6	15. 5. 25. 21. 15	27	
41	6	26. 15. 22. 59. 5	51. 35. 9. 36. 7	28. 59	
43	28	59. 17. 5. 7. 6	40. 16. 29. 20. 25	52. 35. 18	
47	10	50. 18. 17. 58. 27	54. 2. 29. 59. 45	5. 24. 25. 57	
49	10	2. 15. 41. *	16	9. 51. 55. 52. 24	7. 58. 27. 56. 25
53	26	25. 9. 51. 58. 46	28. 42. 41. 39. 6	45. 22. 55. 50. 8	

TABVLA III (art. 516)		
5	(0) .. 3; (1) .. 6	
7	(0) .. 142857	
9	(0) .. 1; (1) .. 2; (2) .. 4; (3) .. 8; (4) .. 7; (5) .. 5	
11	(0) .. 09; (1) .. 18; (2) .. 36; (3) .. 72; (4) .. 45	
13	(0) .. 076923; (1) .. 461538	
17	(0) .. 0588235294	117647
19	(0) .. 0526315789	47368421
23	(0) .. 0434782608	6956521739 13
27	(0) .. 037; (1) .. 074; (2) .. 148; (3) .. 296; (4) .. 592; (5) .. 185	
29	(0) .. 0344827586	2068965517 24137931
31	(0) .. 0322580645	16129
	(1) .. 5483870967	74193
37	(0) .. 027; (1) .. 135; (2) .. 675; (3) .. 378; (4) .. 891; (5) .. 459; (6) .. 297; (7) .. 486; (8) .. 432; (9) .. 162; (10) .. 810; (11) .. 054	
41	(0) .. 02439; (1) .. 14634; (2) .. 87804; (3) .. 26829; (4) .. 60975; (5) .. 65853; (6) .. 95191; (7) .. 70731	
43	(0) .. 0252558159	5548857209 5
	(1) .. 6511627906	9767441860 4
47	(0) .. 0212763957	4468085106 5829787254
	0425531914	895617
49	(0) .. 0204081639	6550612244 8979591856
	7546938775	61
53	(0) .. 0188679045	983; (1) .. 4905660577 558
	(2) .. 7547169811	320; (3) .. 6226415094 539
59	(0) .. 0169491525	4257288155 5932205389
	8305084745	7627118644 06779661
61	(0) .. 016595446	2295081967 9151147540
	9856065575	7704918032 7868852459

M. George CANTOR

Professeur à l'Université de Halle.

VÉRIFICATION JUSQU'A 1000 DU THÉORÈME EMPIRIQUE DE GOLDBACH [19c]

— Séance du 10 août 1894 —

Il y a environ dix ans, j'ai fait calculer pour tous les nombres pairs de 2 à 1000, une table qui contient toutes les partitions de ces nombres en deux nombres premiers.

On arrive par l'examen de cette table, donnant aussi le nombre des décompositions, à la conviction que non seulement la proposition est exacte, mais encore que le nombre des décompositions de $2N$ croît indéfiniment avec N (sauf les oscillations qui se produisent toujours dans les fonctions relatives à la théorie des nombres).

TABLEAU DES DÉCOMPOSITIONS DES NOMBRES PAIRS $2N$, DE 2 À 1000,
EN SOMMES DE DEUX NOMBRES PREMIERS

(Si $2N = x + y$, avec $x < y$, le tableau donne x , le plus petit des deux nombres premiers).
(La dernière colonne indique le nombre n des décompositions.)

$2N$	x	n	$2N$	x	n
2	1.	1	20	1, 3, 7.	3
4	1, 2.	2	22	3, 5, 11.	3
6	1, 3.	2	24	1, 3, 7, 11.	4
8	1, 3.	2	26	3, 7, 13.	3
10	3, 5.	2	28	5, 11.	2
12	1, 5.	2	30	1, 7, 11, 13.	4
14	1, 3, 7.	3	32	1, 3, 13.	3
16	3, 5.	2	34	3, 5, 11, 17.	4
18	1, 5, 7.	3	36	5, 7, 13, 17.	4

$2N$	x	n
408	7, 41, 49, 29, 41, 59, 61, 71, 97, 101, 127, 131, 137, 139, 151, 157, 167, 179, 181, 197.	20
410	1, 43, 31, 37, 43, 61, 73, 79, 97, 103, 127, 139, 181, 191.	14
412	3, 11, 23, 29, 53, 59, 101, 131, 149, 173, 179.	11
414	5, 13, 17, 31, 41, 47, 61, 67, 83, 97, 101, 103, 107, 131, 137, 151, 157, 163, 173, 181, 194.	21
416	7, 19, 37, 43, 67, 79, 103, 109, 139, 193.	10
418	17, 29, 59, 71, 101, 107, 137, 149, 167, 179, 191.	11
420	1, 41, 49, 23, 31, 37, 41, 47, 53, 61, 67, 71, 73, 83, 89, 103, 107, 109, 143, 127, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 179, 181, 191, 193, 197.	31
422	1, 3, 43, 43, 73, 109, 139, 151, 181, 193, 199, 211.	12
424	3, 5, 23, 41, 71, 107, 143, 131, 167, 173, 191, 197.	12
426	5, 7, 17, 29, 37, 43, 47, 53, 59, 67, 73, 79, 89, 109, 143, 149, 157, 163, 193, 197, 199.	21
428	7, 19, 31, 61, 79, 97, 151, 157, 199.	9
430	11, 29, 41, 47, 71, 83, 143, 137, 149, 167, 173, 179, 191, 197.	14
432	1, 41, 43, 23, 31, 43, 53, 59, 73, 79, 83, 101, 139, 149, 151, 163, 181, 191, 193, 199.	20
434	1, 3, 13, 37, 61, 67, 97, 103, 127, 151, 157, 163, 193, 211.	14
436	3, 5, 17, 47, 53, 83, 89, 167, 173, 179, 197.	11
438	3, 7, 17, 49, 29, 37, 41, 59, 71, 79, 89, 104, 107, 127, 131, 157, 167, 181, 197, 199.	21
440	1, 7, 19, 31, 43, 61, 67, 73, 103, 109, 127, 157, 163, 199, 211.	13
442	3, 11, 23, 41, 53, 59, 83, 89, 131, 149, 173, 179, 191.	13
444	1, 5, 11, 13, 23, 43, 47, 61, 71, 97, 107, 113, 127, 131, 137, 151, 163, 167, 173, 181, 211.	22
446	3, 7, 13, 37, 67, 73, 79, 97, 109, 139, 163, 223.	12
448	5, 17, 49, 59, 89, 101, 131, 137, 167, 179, 191, 197.	13
450	1, 7, 11, 17, 19, 29, 31, 41, 53, 61, 67, 71, 83, 97, 101, 103, 113, 137, 139, 157, 167, 173, 179, 181, 193, 199, 211, 223.	28
452	3, 13, 19, 31, 43, 73, 79, 103, 139, 181, 211, 223.	12
454	5, 11, 23, 53, 71, 101, 107, 137, 173, 191, 197, 227.	12
456	7, 13, 17, 23, 37, 47, 59, 67, 73, 83, 89, 97, 103, 107, 109, 139, 149, 163, 173, 193, 199, 223, 227.	24
458	1, 19, 37, 61, 79, 109, 127, 151, 181, 229.	10
460	3, 11, 17, 29, 41, 59, 71, 101, 107, 143, 149, 167, 179, 191, 197, 227.	16
462	1, 5, 13, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 53, 61, 73, 79, 83, 89, 103, 109, 113, 131, 149, 151, 179, 181, 193, 199, 211, 223, 229.	29
464	1, 3, 7, 31, 43, 67, 97, 127, 151, 157, 181, 193, 223.	13
466	3, 5, 17, 23, 47, 83, 107, 113, 149, 173, 197, 227, 233.	13
468	1, 5, 7, 11, 19, 29, 37, 47, 59, 67, 71, 79, 89, 101, 109, 131, 137, 151, 157, 191, 197, 199, 211, 227, 229.	25
470	3, 7, 13, 31, 37, 61, 73, 97, 103, 139, 157, 163, 193, 199, 229.	15
472	3, 11, 23, 29, 41, 53, 71, 83, 89, 113, 173, 191, 233.	13
474	7, 11, 13, 17, 31, 41, 43, 53, 73, 101, 107, 127, 137, 157, 163, 167, 181, 191, 193, 197, 211, 223, 233.	23
476	13, 19, 37, 43, 67, 79, 97, 103, 109, 127, 139, 163, 193, 199.	14
478	11, 17, 29, 47, 59, 89, 131, 167, 197, 227, 239.	11

(suggested by Jenny Boucard)

Jacobi, über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1846

I. Zerfällung der Primzahlen p von der Form $4n+1$ in die Summe zweier Quadrate *).

$$p = a^2 + b^2.$$

p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b	p	a	b
5	1	2	257	1	16	557	19	14	853	23	18	1181	5	34	1549	35	18
13	3	2	269	13	10	569	13	20	857	29	4	1193	13	32	1553	23	32
17	1	4	277	9	14	577	1	24	877	29	6	1201	25	24	1597	21	34
29	5	2	281	5	16	593	23	8	881	25	16	1213	27	22	1601	1	40
37	1	6	293	17	2	601	5	24	929	23	20	1217	31	16	1609	3	40
41	5	4	313	13	12	613	17	18	937	19	24	1229	35	2	1613	13	38
53	7	2	317	11	14	617	19	16	941	29	10	1237	9	34	1621	39	10
61	5	6	337	9	16	641	25	4	953	13	28	1249	15	32	1637	31	26
73	3	8	349	5	18	653	13	22	977	31	4	1277	11	34	1657	19	36
89	5	8	353	17	8	661	25	6	997	31	6	1289	35	8	1669	15	38
97	9	4	373	7	18	673	23	12	1009	15	28	1297	1	36	1693	37	18
101	1	10	389	17	10	677	1	26	1013	23	22	1301	25	26	1697	41	4
109	3	10	397	19	6	701	5	26	1021	11	30	1321	5	36	1709	35	22
113	7	8	401	1	20	709	15	22	1033	3	32	1361	31	20	1721	11	40
137	11	4	409	3	20	733	27	2	1049	5	32	1373	37	2	1733	17	38
149	7	10	421	15	14	757	9	26	1061	31	10	1381	15	34	1741	29	30
157	11	6	433	17	12	761	19	20	1069	13	30	1409	25	28	1753	27	32
173	13	2	449	7	20	769	25	12	1093	33	2	1429	23	30	1777	39	16
181	9	10	457	21	4	773	17	22	1097	29	16	1433	37	8	1789	5	42
193	7	12	461	19	10	797	11	26	1109	25	22	1453	3	38	1801	35	24
229	15	2	509	5	22	809	5	28	1117	21	26	1481	35	16	1861	31	30
233	13	8	521	11	20	821	25	14	1129	27	20	1489	33	20	1873	33	28
241	15	4	541	21	10	829	27	10	1153	33	8	1493	7	38	1877	41	14

*.) Ich lasse hier die Tabellen folgen, die ich in dem vorstehenden Aufsatze erwähnt habe. Die Berechnung der Tabellen I. und II. verdanke ich der Gefälligkeit des Herrn Director Zornow. Oct. 1845. J.

(suggested by Jenny Boucard)

III. Tabelle für die Zerfällung der Primzahlen von der Form $8n+1$ in ein Quadrat und das Doppelte eines andern Quadrats *).

$$p = cc + 2dd.$$

p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d	p	c	d
17	3	2	857	27	8	1777	25	24	2753	21	34	3793	61	6
41	3	4	881	9	20	1801	1	30	2777	27	32	3833	39	34
73	1	6	929	27	10	1873	35	18	2801	51	10	3881	3	44
89	9	2	937	17	18	1889	33	20	2833	41	24	3889	19	42
97	5	6	953	21	16	1913	39	14	2857	47	18	3929	27	40
113	9	4	977	3	22	1993	29	24	2897	3	38	4001	63	4
137	3	8	1009	19	18	2017	37	18	2953	19	36	4049	57	20
193	11	6	1033	31	6	2081	27	26	2969	9	38	4057	23	42
233	15	2	1049	9	22	2089	17	30	3001	43	24	4073	45	32
241	13	6	1097	33	2	2113	31	24	3041	27	34	4129	59	18
257	15	4	1129	29	12	2129	9	32	3049	49	18	4153	25	42
281	9	10	1153	1	24	2137	43	12	3089	39	28	4177	55	24
313	5	12	1193	15	22	2153	45	8	3121	23	36	4201	49	30
337	7	12	1201	7	24	2161	19	30	3137	33	32	4217	57	22
353	15	8	1217	33	8	2273	15	32	3169	37	30	4241	3	46
401	3	14	1249	31	12	2281	47	6	3209	3	40	4273	41	36
409	11	12	1289	33	10	2297	27	28	3217	25	36	4289	33	40
433	19	6	1297	35	6	2377	35	24	3257	57	2	4297	65	6
449	21	2	1321	13	24	2393	9	34	3313	55	12	4337	45	34
457	13	12	1361	3	26	2417	45	14	3329	21	38	4409	39	38
521	3	16	1409	21	22	2441	33	26	3361	47	24	4441	43	36
569	21	8	1433	9	26	2473	49	6	3433	29	36	4457	15	46
577	17	12	1481	33	14	2521	37	24	3449	57	10	4481	63	16
593	9	16	1489	29	18	2593	1	36	3457	53	18	4513	65	12
601	23	6	1553	39	4	2609	51	2	3529	1	42	4561	67	6
617	15	14	1601	33	16	2617	5	36	3593	45	28	4649	51	32
641	21	10	1609	31	18	2633	51	4	3617	27	38	4657	7	48
673	5	18	1657	37	12	2657	33	28	3673	55	18	4673	21	46
761	27	4	1697	27	22	2689	49	12	3697	13	42	4721	39	40
769	11	18	1721	39	10	2713	11	36	3761	57	16	4729	11	48
809	3	20	1753	41	6	2729	51	8	3769	59	12	4793	69	4

*) Der verstorbnen Director des alstädtischen Gymnasiums in Königsberg i. Pr., Dr. Struve, einer der geistreichsten Philologen, machte mir sehr umfangreiche Papiere zum Geschenk, welche die Zerfällungen aller geraden Zahlen bis 12000 in drei Quadrate enthalten. Aus diesen ist die vorstehende Tabelle entnommen. Leider sind in diesen Berechnungen, welche von ihm zur Zerstreitung in einer schweren Krankheit unternommen wurden, bisweilen einige der oft sehr zahlreichen Zerfällungen einer Zahl ausgelassen, wodurch der Werth dieser mühevollen und interessanten Arbeit verringert wird.

IV. Tabelle der Zahlen m' für das Argument m^*).

$$1+g^m \equiv g^{m'} \pmod{p}.$$

p	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103
g	3	2	6	10	10	10	10	17	5	6	28	10	26	10	10	12	62	5	29	50	30	10	2	35
0	2	1	5	10	17	8	11	12	11	26	39	30	25	25	47	29	58	8	50	3	72	86	1	70
1	4	8	7	13	6	3	23	8	9	39	25	27	27	45	45	23	69	14	77	56	57	82	69	74
2	1	4	11	8	4	18	3	29	24	32	6	38	33	43	35	61	43	67	18	72	4	76	24	60
3	*	6	4	2	13	14	17	18	35	27	20	22	15	54	28	56	59	53	51	52	66	26	38	100
4	5	9	2	7	12	5	8	6	16	17	22	44	36	12	37	20	47	73	25	55	1	30	16	
5	3	*	8	9	16	9	26	9	7	11	14	12	24	21	32	6	52	23	66	76	80	40	82	96
6	*	5	*	1	3	21	24	26	20	20	11	43	13	1	57	25	33	16	70	81	76	33	90	36
7	*	3	3	5	14	13	9	23	25	23	33	23	28	9	6	21	24	32	29	23	40	39	11	49
8	*	2	10	*	9	20	13	22	5	3	10	6	5	42	49	47	37	6	23	38	3	61	37	76
9	*	7	1	14	*	19	15	28	28	34	1	4	50	19	2	45	55	36	22	26	64	3	53	
10	*	*	9	11	1	17	20	5	27	18	37	11	1	48	56	44	61	27	56	68	69	12	93	99
11	*	*	6	4	7	*	27	21	34	7	40	39	40	8	22	43	53	40	39	44	48	88	91	88
12	*	*	3	15	7	19	13	6	22	28	45	8	27	17	52	30	9	42	4	43	21	65	35	
13	*	*	15	11	10	25	24	3	4	12	21	45	37	55	4	10	54	3	77	45	56	71	31	
14	*	*	6	8	12	*	17	15	29	7	17	37	31	29	41	6	33	20	40	20	92	86	4	
15	*	*	12	10	6	12	*	10	12	38	25	17	28	31	3	54	11	74	42	34	69	62	72	
16	*	*	*	2	15	7	3	29	9	31	34	22	30	20	24	25	1	63	61	15	57	21	79	
17	*	*	*	5	4	16	11	21	5	36	2	16	6	30	15	40	39	49	31	24	85	98	43	
18	*	*	*	*	1	10	1	*	19	21	14	4	12	52	2	46	49	7	66	71	5	49	19	
19	*	*	*	*	*	11	6	10	4	21	32	5	39	39	38	45	50	45	72	69	41	90	51	51
20	*	*	*	*	*	16	5	25	13	*	8	29	30	56	10	30	13	62	24	57	81	31	74	84
21	*	*	*	*	*	2	2	19	31	2	*	15	3	24	18	32	20	62	19	11	63	63	66	
22	*	*	*	*	*	18	14	1	1	30	35	14	26	48	11	7	59	34	2	47	73	36	50	
23	*	*	*	*	*	21	16	26	28	13	1	18	11	21	36	35	58	60	28	14	29	8	52	
24	*	*	*	*	*	4	20	30	33	3	13	35	23	1	20	38	12	55	9	82	7	70	15	
25	*	*	*	*	*	14	4	23	37	19	40	9	32	43	42	3	4	33	59	54	70	13	59	
26	*	*	*	*	*	1	2	17	15	15	9	*	18	40	31	45	56	13	17	38	46	78	40	
27	*	*	*	*	*	22	15	19	31	23	32	36	49	36	21	3	44	51	62	87	45	7		
28	*	*	*	*	*	27	33	10	35	42	11	5	7	35	15	64	21	60	44	50	76	67		
29	*	*	*	*	*	7	18	36	41	31	47	*	23	9	8	34	26	39	1	37	95	21		
30	*	*	*	*	*	14	8	16	18	44	35	*	12	26	2	35	36	9	34	39	8			
31	*	*	*	*	*	2	25	29	10	34	22	54	16	5	38	45	43	39	24	33	24			
32	*	*	*	*	*	12	35	27	3	10	50	39	60	22	21	11	15	50	16	55	101			
33	*	*	*	*	*	32	16	34	8	20	7	9	*	34	24	58	29	10	47	40	71			
34	*	*	*	*	*	22	14	2	33	38	57	14	28	36	28	43	35	23	49	44	17			
35	*	*	*	*	*	8	6	26	28	51	46	18	51	*	15	54	46	21	30	27	90			
36	*	*	*	*	*	13	5	1	6	4	37	48	2	*	10	54	49	94	64	9				
37	*	*	*	*	*	24	9	41	2	40	58	46	1	52	38	8	64	65	12	62				
38	*	*	*	*	*	30	18	44	23	36	26	7	60	66	40	79	68	48	25	41				
39	*	*	*	*	*	38	17	16	32	20	3	38	44	63	*	20	36	75	96	86				
40	*	*	*	*	*	4	37	48	52	50	5	66	61	2	47	86	59	56	46					
41	*	*	*	*	*	24	7	29	47	19	17	49	7	1	*	5	17	61	37					

*) Diese Tabelle ist während der Wintervorlesungen 1836—37 von meinen Zuhörern berechnet worden. Vermittelst des seitdem von mir herausgegebenen *Canon Arithmeticus* (Berlin 1839 bei Dümmler) kann dieselbe leicht auf alle Primzahlen unter 1000 ausgedehnt werden. Setzt man nämlich für eine Primzahl p unter 1000 eine Zahl der dort mit *Indices* überschriebenen Tabelle $= m'$, so wird die unmittelbar folgende der Tabelle der entsprechenden Werth von m' .

Legendre
Tables d'intégrales elliptiques
1813-1816

ϕ .	E (0°).	E (1°).	E (2°).	E (3°).	E (4°).	E (5°).
0°	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000	0.00000 00000
1°	0.01745 32025	0.01745 32022	0.01745 32014	0.01745 32001	0.01745 32002	0.01745 32000
2°	0.03490 65850	0.03490 65829	0.03490 65764	0.03490 65556	0.03490 65505	0.03490 65312
3°	0.05235 98776	0.05235 98703	0.05235 98484	0.05235 98121	0.05235 97612	0.05235 96960
4°	0.06981 31701	0.06981 31528	0.06981 31010	0.06981 30149	0.06981 28944	0.06981 27301
5°	0.08726 64626	0.08726 64290	0.08726 63278	0.08726 61597	0.08726 59244	0.08726 56252
6°	0.10471 97551	0.10471 96970	0.10471 95234	0.10471 92320	0.10471 88258	0.10471 83635
7°	0.12217 30476	0.12217 29554	0.12217 26784	0.12217 22176	0.12217 15731	0.12217 07138
8°	0.13962 63402	0.13962 62026	0.13962 57896	0.13962 51023	0.13962 41411	0.13962 29933
9°	0.15707 96327	0.15707 94369	0.15707 88497	0.15707 78720	0.15707 65048	0.15707 57168
10°	0.17453 29253	0.17453 26569	0.17453 18525	0.17453 05129	0.17453 86395	0.17453 02355
11°	0.19198 62177	0.19198 58611	0.19198 47017	0.19198 30110	0.19198 05208	0.19198 73443
12°	0.20943 95102	0.20943 90470	0.20943 76615	0.20943 53528	0.20943 21244	0.20943 29863
13°	0.22689 28028	0.22689 22158	0.22689 04558	0.22689 75250	0.22689 34266	0.22689 81657
14°	0.24433 60953	0.24433 53635	0.24433 31688	0.24433 95143	0.24433 44039	0.24433 28138
15°	0.26179 93878	0.26179 84893	0.26179 573918	0.26179 13078	0.26179 56333	0.26179 07187
16°	0.27925 26803	0.27925 15919	0.27924 83281	0.27924 28927	0.27923 52020	0.27923 53358
17°	0.29670 46700	0.29670 42607	0.29669 42565	0.29668 29668	0.29668 51579	0.29668 34781
18°	0.31415 92654	0.31415 77221	0.31415 30943	0.31414 53870	0.31413 46094	0.31413 07742
19°	0.33161 25579	0.33160 07469	0.33160 53164	0.33159 62723	0.33158 36253	0.33158 73908
20°	0.34906 58504	0.34906 37432	0.34905 74244	0.34904 69007	0.34903 21847	0.34901 32933
21°	0.36651 91429	0.36650 67006	0.36650 94131	0.36649 72610	0.36648 02677	0.36645 84566
22°	0.38397 24354	0.38396 96151	0.38396 12776	0.38394 73420	0.38392 78546	0.38390 2936
23°	0.40142 57280	0.40142 25483	0.40141 30133	0.40139 71333	0.40137 49366	0.40134 64183
24°	0.41887 90205	0.41887 54182	0.41886 46556	0.41884 66245	0.41882 13653	0.41880 91607
25°	0.43633 23130	0.43632 82535	0.43631 60800	0.43629 58056	0.43626 74531	0.43623 10547
26°	0.45378 56655	0.45378 10534	0.45376 74022	0.45374 40670	0.45371 28731	0.45367 26059
27°	0.47123 88900	0.47123 38166	0.47121 65583	0.47119 31906	0.47115 77087	0.47111 21449
28°	0.48868 65424	0.48868 18860	0.48866 56043	0.48864 13947	0.48860 19445	0.48855 12971
29°	0.50614 54831	0.50613 92296	0.50612 04765	0.50608 92439	0.50604 55656	0.50598 04803
30°	0.52359 87756	0.52359 18776	0.52357 11914	0.52353 67391	0.52348 85580	0.52339 07009
31°	0.54104 44854	0.54104 20681	0.54102 17457	0.54098 38730	0.54093 09051	0.54086 20077
32°	0.55856 53666	0.55849 70522	0.55847 21362	0.55843 66385	0.55837 26035	0.55830 80909
33°	0.57595 86532	0.57594 95774	0.57592 23598	0.57587 70289	0.57581 36344	0.57573 22372
34°	0.59341 19457	0.59340 20602	0.59337 24140	0.59332 30381	0.59325 39838	0.59316 53238
35°	0.61086 52382	0.61085 41999	0.61083 22970	0.61076 86604	0.61069 36477	0.61059 73361
36°	0.62831 85307	0.62830 68961	0.62827 20041	0.62821 38904	0.62813 26146	0.62802 88601
37°	0.64575 18232	0.64575 92482	0.64572 15355	0.64565 87236	0.64567 08761	0.64555 80823
38°	0.66322 51158	0.66321 15557	0.66317 08885	0.66310 31555	0.66306 84247	0.66288 07933
39°	0.68067 84083	0.68066 38181	0.68062 00615	0.68054 71826	0.68044 5x536	0.68031 43760
40°	0.69813 17008	0.69811 66351	0.69808 90531	0.69799 08014	0.69788 13568	0.69774 08275
41°	0.71556 49933	0.71556 82065	0.71551 78619	0.71543 40091	0.71531 67296	0.71516 61333
42°	0.73303 82858	0.73303 03319	0.73296 64871	0.73287 68035	0.73275 13677	0.73259 03609
43°	0.75049 15784	0.75047 24112	0.75041 49277	0.75031 91828	0.75018 52681	0.75001 33113
44°	0.76709 47009	0.76709 14442	0.76706 31831	0.76706 11458	0.76706 83283	0.76703 51657
45°	0.78539 81634	0.78537 64368	0.78531 12532	0.78520 26615	0.78505 08471	0.78485 58616

Elliptic integral of the first kind

$$F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}}$$

- φ = amplitude
- c = module ($0 \leq c \leq 1$)

Elliptic integral of the second kind

$$E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi} d\psi$$

Elliptic integral of the third kind

$$\Pi(n, c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\psi}{(1 + n \sin^2 \psi) \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \psi}}$$

- n = parameter

Direct computation

x	\sqrt{x}
1	1.000
2	1.414
3	1.732
4	2.000
5	2.236
6	2.449

Indirect computation by interpolating the inverse table

x	x^2	x	\sqrt{x}
1	1.000	1	
1.4	1.960	2	1.414
1.8	3.240	3	
2.2	4.840	4	
2.6	6.760	5	2.236
3.0	9.000	6	

Legendre 1816

Cette Table sera en quelque sorte l'inverse de celle que nous avons construite par la première méthode, et dans laquelle les amplitudes croissent par intervalles égaux ; mais la théorie des fonctions F fournit des formules très élégantes pour construire la Table dans ce nouveau système.

733. Désignons par ϕ un terme quelconque α_n de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, en sorte qu'on ait $F\phi = nF\alpha$; nous ferons par analogie $F(\phi') = (n+1)F\alpha$, $F(\phi'') = (n+2)F\alpha$, et dans le sens inverse, $F(\phi^\circ) = (n-1)F\alpha, \dots, F(\phi^{\circ\circ}) = (n-2)F\alpha, \dots$. Cela posé, soit $\Delta(\alpha)$ ou $\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \alpha} = a$, l'équation générale de l'art. 22, deviendra

$$\tan\left(\frac{1}{2}\phi' + \frac{1}{2}\phi^\circ\right) = a \tan\phi.$$

Soient, comme ci-dessus, ϕ°, ϕ, ϕ' trois amplitudes successives telles qu'on ait $F(\phi^\circ) + F(\alpha) = F(\phi), F(\phi) + F(\alpha) = F(\phi')$

Abel 1827

Je me propose, dans ce mémoire, de considérer la fonction inverse, c'est-à-dire la fonction $\varphi\alpha$, déterminée par les équations

$$\alpha = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}},$$

$$\sin \theta = \varphi \alpha = x.$$

Cela posé, je dis qu'en désignant par α et β deux indéterminées, on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varphi\alpha \cdot f\beta \cdot F\beta + \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}, \\ f(\alpha + \beta) = \frac{f\alpha \cdot f\beta - e^2 \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot F\alpha \cdot F\beta}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}, \\ F(\alpha + \beta) = \frac{F\alpha \cdot F\beta + e^2 \varphi\alpha \cdot \varphi\beta \cdot f\alpha \cdot f\beta}{1 + e^2 c^2 \varphi^2 \alpha \cdot \varphi^2 \beta}. \end{array} \right.$$

Ces formules peuvent être déduites sur le champ des propriétés connues des fonctions elliptiques (*Legendre Exercices de Calcul intégral*)

Pour $k = \sin 45^\circ$ je trouve dans les Exercices III. p. 215

Jacobi 1827

$$\varphi' = 21^\circ 0' 36'',02754 43$$

$$\varphi'' = 58^\circ 38' 10'',81402 70.$$

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\sigma), \quad F(\varphi) - F(\psi) = F(\vartheta)$$

ponitur, notum est haberi

$$\sin \sigma = \frac{\sin \varphi \cos \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} + \sin \psi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\sin \varphi \cos \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi} - \sin \psi \cos \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}.$$

Unde statim sequitur:

$$\sin \sigma + \sin \vartheta = \frac{2 \sin \varphi \cos \psi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}$$

atque reductionibus factis

$$\sin \sigma \sin \vartheta = \frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi}{1 - k^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \psi}.$$

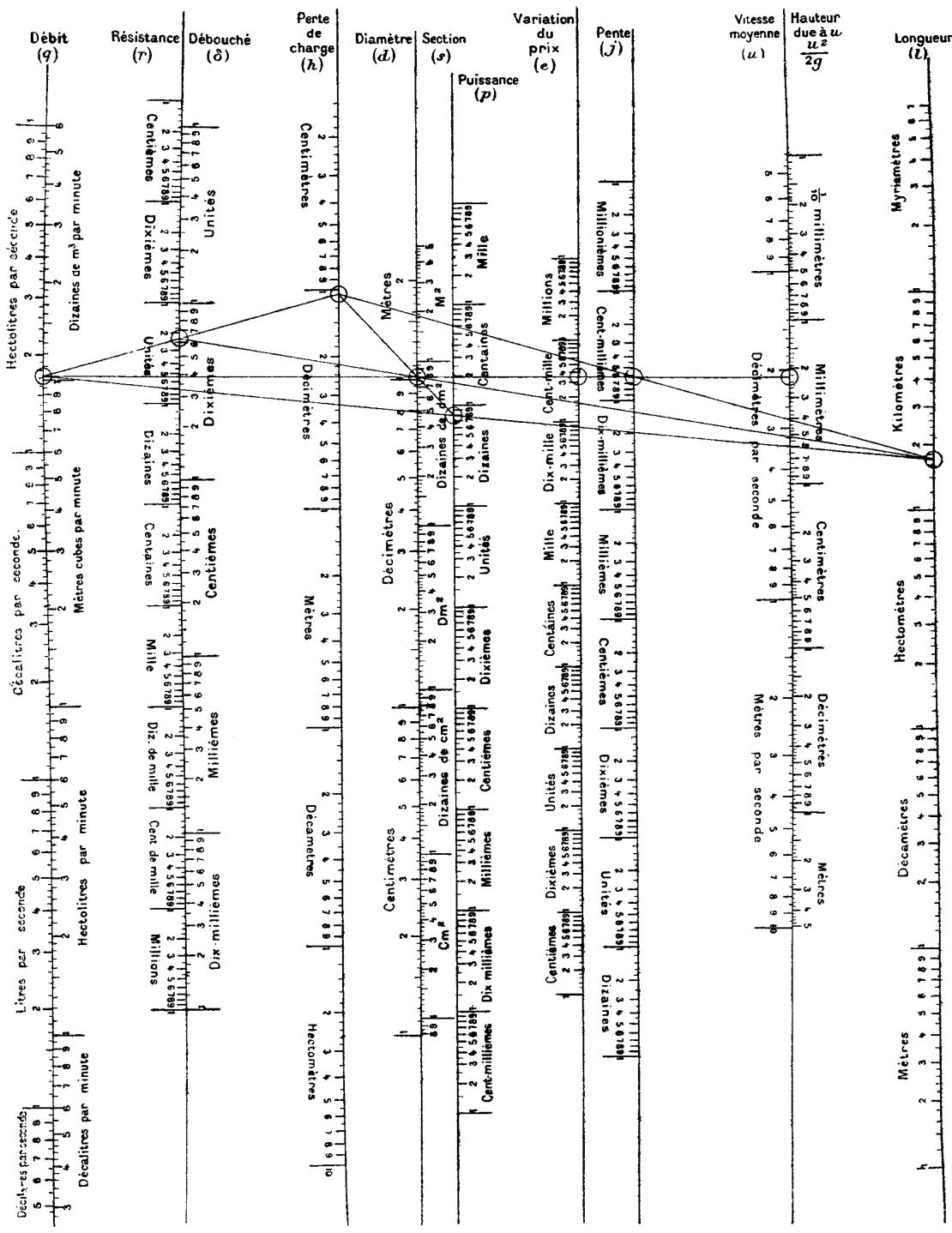
Notatione nova simplicioreque abhinc utar. Sit scilicet $F(\varphi) = \Xi$, tunc vulgo φ amplitudo ipsius Ξ nominatur, quamobrem φ in sequentibus per am Ξ denotabitur. Si itaque

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} = \Xi,$$

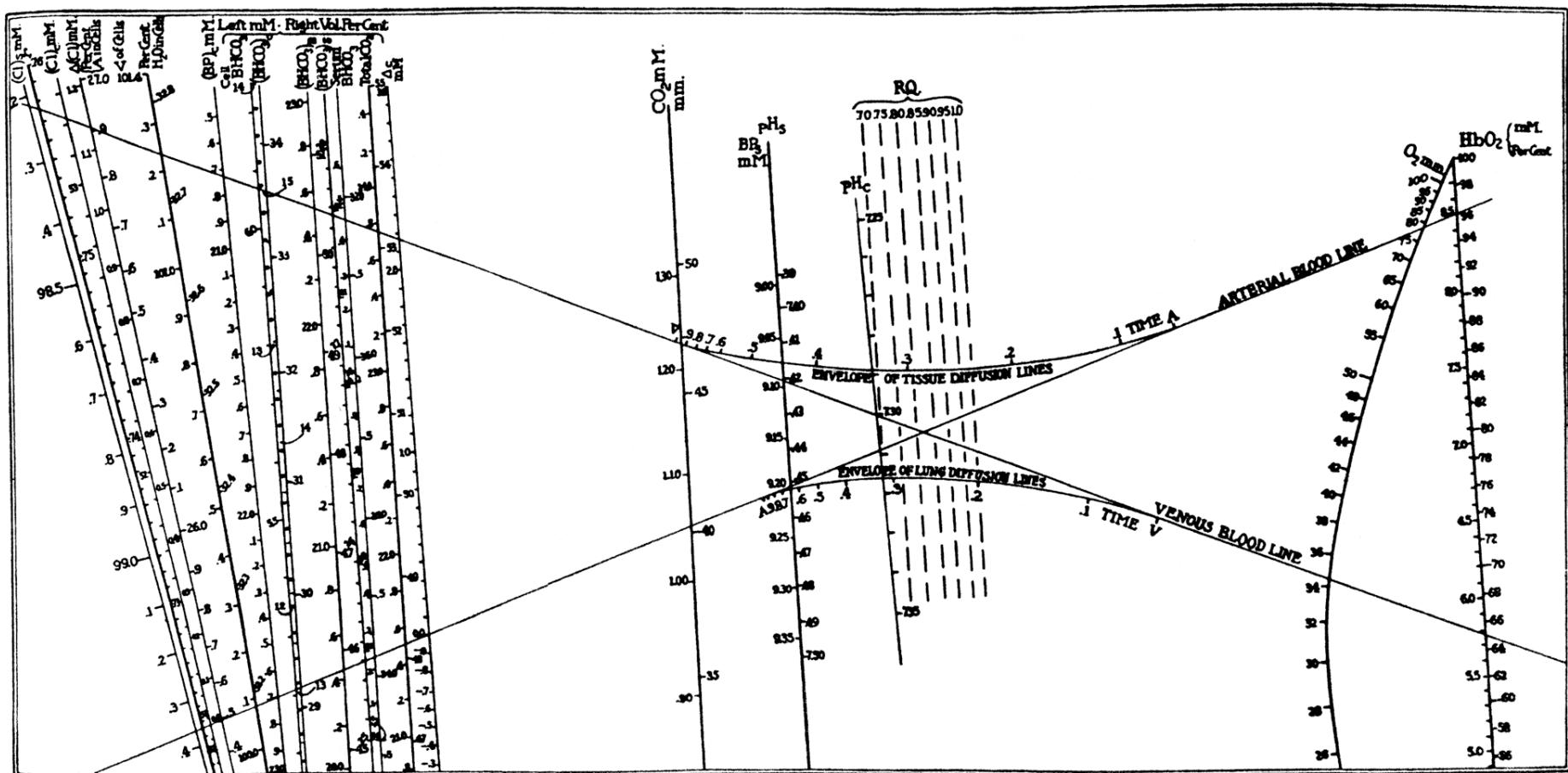
$x = \sin \text{am } \Xi$ erit.

Legendre 1816

739. La méthode que nous venons d'expliquer pour former la Table des fonctions E est d'une simplicité qui ne laisse rien à désirer. Et quand on considère aussi combien est facile la construction de la Table des fonctions F, puisqu'elle ne dépend que d'une seule formule trigonométrique rigoureusement exacte, on serait tenté de croire que cette manière de former des Tables des fonctions F et E, doit être adoptée de préférence à celle que nous avons exposée dans les chapitres précédens. Peut-être que l'exécution dévoilerait encore de nouveaux motifs de préférence; c'est ce que nous laissons à décider à ceux qui voudront entreprendre le long et utile travail de la construction de ces Tables.



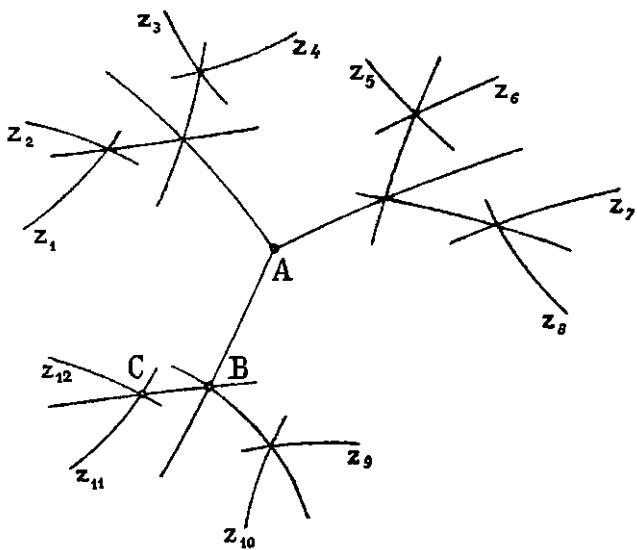
Henderson 1928



The thirteenth problem of Hilbert 1900



XIII. Impossibility of the solution of the general equation of the 7th degree by means of functions of only two arguments.



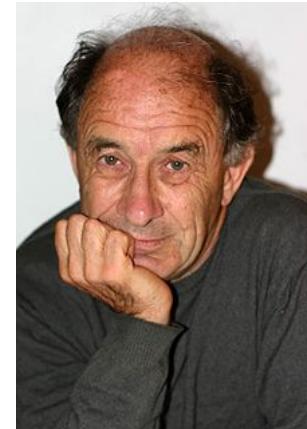
“Now it is probable that the root of the equation of the seventh degree is a function of its coefficients which does not belong to this class of functions capable of nomographic construction, *i. e.*, that it cannot be constructed by a finite number of insertions of functions of two arguments. In order to prove this, the proof would be necessary that the equation of the seventh degree

$$f^7 + xf^3 + yf^2 + zf + 1 = 0$$

is not solvable with the help of any continuous functions of only two arguments.”

Every continuous function of three variables can be written in the form

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^9 g_i(\varphi_i(x, y), z)$$



Vladimir Igorevich Arnold
1957

Every continuous function of n variables, defined on the unit cube, can be written in the form

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} g_i \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j) \right)$$



Andrey Nikolaevich Kolmogorov
1957