Un parcours dans les mathématiques médiévales

- Le Haut Moyen Age :
  - Boèce (mort en 525 à Pavie)
  - Isidore de Séville (mort en 636 à Séville)
  - Bède le Vénérable (mort en 735 à Jarrow)
  - Gerbert d'Aurillac (mort en 1003 à Rome)

Sabine Rommevaux

Boèce en Italie, Isidore de Séville en Espagne et Bède le Vénérable en Angleterre écrivent quelques textes de nature mathématiques, fondés sur des textes grecs néo-pythagoriciens (en particulier de Nicomaque de Gérase), qui mettent l'accent sur l'art de compter et la mystique des nombres. À la même époque, les érudits ont aussi accès à quelques rudiments de la géométrie euclidienne.
Au Xe siècle, Gerbert d'Aurillac, qui deviendra pape sous le nom de Sylvestre II, fut avant cela le précepteur puis le conseiller de l'empereur Otton II. Gerbert séjourna trois ans en Espagne où il eut accès aux traités scientifiques arabes. C'est là qu'il aurait appris le système de numération indo-arabe qu'il introduisit en Europe grâce à sa table à calcul ou abaque de Gerbert. Il s'intéressa aussi à la géométrie et à la musique.
Au XIe siècle, les érudits de l'Europe latine possèdent des éléments d'arithmétique, avec les opérations sur les nombres indo-arabes, des éléments de géométrie, essentiellement plane, et quelques notions d'astronomie. C'est en tout cas l'image que nous donnent les manuscrits conservés, souvent anonymes.

Un parcours dans les mathématiques médiévales

– Le XII^e siècle, le siècle des traducteurs :
  - Adélard de Bath (né en Angleterre, mort vers 1160)
  - Robert de Chester (Angleterre, actif entre 1140 et 1150)
  - Gérard de Crémone (mort en 1187 à Tolède)

Sabine Rommevaux

Parmi les grands traducteurs de la science grecque et arabe du XIIe siècle, on peut retenir Adélart de Bath. D'origine anglaise, Adélard fit des études à Tours et enseigna à Laon, avant de se rendre dans le Sud de l'Italie et en Sicile. Il voyagea aussi dans le Royaume de Jérusalem et en Cilicie, à Tolède, à Antioche, à Damas, en Egypte, en Arabie et en Grèce. De retour à Bath, il produisit plusieurs traductions latines d'ouvrages en arabe, en particulier les *Eléments* d'Euclide. Les premiers historiens qui se sont intéressés à ces traductions, attribuent même trois traductions du traité euclidien à Adélard, mais finalement on lui en doit une seule. Une de ces traductions, faussement attribuée à Adélard, est en fait l'œuvre de Robert de Chester, surtout connu pour avoir sans doute produit la première traduction du Coran, en collaboration avec d'autres traducteurs. Sa traduction des *Eléments*, produite en Espagne, a été très populaire et on en a plusieurs versions. Elle se caractérise par des démonstrations abrégées, qui mettent en évidence la structure logique du traité euclidien. L'ouvrage a sans doute servi pour l'enseignement. A une autre tradition appartient la traduction des *Eléments* par Gérard de Crémone, d'origine italienne, qui officia à Tolède et à qui on doit de très nombreuses traductions d'ouvrages scientifiques et philosophiques grecs et arabes.
Grâce à toutes ces traductions, l'Occident se trouve tout à coup face à une masse importante de connaissances scientifiques et philosophiques, qu'il leur faudra assimiler avant de les restituer et de les dépasser.

Un parcours dans les mathématiques médiévales

– Au XIII^{e} siècle, le début du développement d'une mathématique latine occidentale :
  - Fibonacci (mort vers 1250)
  - Jordanus de Nemore (XIII^{e} siècle)
  - Campanus de Novare (mort à Viterbe en 1296)

Sabine Rommevaux

Le XIIIe siècle voit l'émergence d'une mathématique latine occidentale, certes encore très tributaire de la science grecque et arabe, mais qui produit des œuvres originales. Le mathématicien de cet époque le plus connu des non spécialistes est sans conteste Leonard de Pise, dit aussi Fibonacci. Né à Pise, fils de marchand, il aurait été éduqué dans l'actuelle Algérie, à Bejaïa. Il voyage en Egypte, en Syrie, et en Sicile pour le compte de son père et se trouve ainsi en contact avec la science arabe. Il produit en 1202 le *Liber abaci*, ouvrage d'arithmétique et d'algèbre, dans lequel il présente le système de numération indo-arabe, mais aussi des rudiments d'algèbre. Cet ouvrage sera à l'origine de toute une tradition d'ouvrages d'arithmétique pratique, qui sera enseignée notamment dans les écoles dite d'abaque, qui se développèrent particulièrement en Italie et dans le Sud de la France, écoles, où les jeunes enfants des marchands apprenaient les règles du calcul et leur application à des problèmes plus ou moins concrets. On doit aussi à Fibonacci des traités importants de géométrie et de trigonométrie.
On ne sait rien de Jordanus de Nemore, autre figure importante de ce XIIIe siècle, dans un registre plus spéculatif. Nous verrons tout à l'heure à quoi ressemble son *Arithmétique*, qui est purement théorique et n'a rien de pratique. On attribue aussi à Jordanus des ouvrages de géométrie et un traité sur les poids. Tous ces ouvrages eurent une grande influence à la fin du Moyen Age et à la Renaissance.

Un parcours dans les mathématiques médiévales

– Au XIII^{e} siècle, le début du développement d'une mathématique latine occidentale :
  - Fibonacci (mort vers 1250)
  - Jordanus de Nemore (XIII^{e} siècle)
  - Campanus de Novare (mort à Viterbe en 1296)

On en sait un peu plus sur l'autre mathématicien très important du XIIIe siècle, Campanus. Chapelain du pape Urbain IV puis médecin particulier du pape Boniface VIII, Campanus produisit des ouvrages d'astronomie, de géométrie, écrit sur la calendrier et le comput ecclésiastique. En mathématiques, il produisit une version de *Éléments* d'Euclide, qui n'est pas une traduction, mais une récriture accompagnée de nombreux commentaires, très intéressants mathématiquement. Il s s'attache notamment à rendre le traité plus complet logiquement. Les *Eléments* de Campanus est le premier ouvrage de mathématique à avoir été édité à la Renaissance.

Un parcours dans les mathématiques médiévales

– Au XIV^{e} siècle, des développements originaux :
- les « calculateurs » d'Oxford :
  – Thomas Bradwardine (mort en 1349)
  – Richard Swineshead (actif entre 1340 et 1354)
  – William Heytesbury (mort en 1372)
  – Kilvington (mort en 1361)
  – John Dumbleton (mort en1349)
- à Paris :
  – Albert de Saxe (mort en 1390)
  – Jean Buridan (mort vers 1358)
  – Nicole Oresme (mort en 1382)
- nombreux auteurs partout en Europe

Sabine Rommevaux

Le XIVe siècle voit fleurir les développements vraiment originaux, notamment à Oxford, par quelques maîtres de l'université que l'on nommera plus tard les Calculateurs, du nom du traité de l'un d'eux, Swineshead qui rédigea des Calculationes. Ces maîtres sont célèbres pour avoir introduit pour l'étude de la philosophie naturelle ou physique de nouveaux outils philosophique, logique et mathématiques. La plupart de leurs ouvrages ont été largement diffusés dans toute l'Europe durant le Moyen Age et pour certains, ils ont été publiés au début du XVIe siècle (seuls les ouvrages de Bradwardine ont a ce jour bénéficiés d'une édition critique moderne). Ces auteurs changèrent notablement l'étude de la physique, mais contribuèrent aussi au développement des mathématiques.
Leurs idées furent en particulier reprises et discutées à Paris, par Albert de Saxe, Jean Buridan, ou encore Nicole Oresme.
Ce dernier réussit une brillante carrière universitaire, ecclésiastique et politique. Il a écrit de nombreux ouvrages de philosophie naturelle, de mathématiques, mais aussi de politique. Certains sont en français, à destination des membres de la cour du roi Charles V à laquelle il appartenait. En 1377 il est nommé évêque de Lisieux, après avoir été Grand Maître du College de Navarre puis chanoine et doyen à la Cathédrale de Rouen. Nicole Oresme est l'un des plus grand mathématicien du XIVe siècle, avec Swineshead, qui nous étonne par ses intuitions mathématiques, alors qu'il n'a pas toujours les outils adéquats afin de les étayer.

L’enseignement des mathématiques

Avant le XI^{e} siècle : écoles rattachées à des établissement religieux
- rudiments de calcul (comput)

Fin XI^{e} - XIII^{e} siècle : naissance des universités
- éléments d’arithmétique et de géométrie dans la faculté des arts

Sabine Rommevaux

Après ce très bref panorama des auteurs importants pour le développement des mathématique au Moyen Age, disons quelques mots maintenant de l’enseignement.
Avant le XIe siècle, quelques rudiments de calculs sont enseignés dans les écoles rattachés aux établissements religieux.
A la fin du XIe siècle, mais surtout au XIIe siècle, on assiste à la naissance progressive des universités.
Les premiers statuts datent de 1215 pour Paris, de 1252 pour Bologne, des environs de 1220 pour Oxford et Cambridge ou Montpellier.
A la fin du XVe siècle, on compte environ 60 universités en Europe.
Il est difficile de se faire une idée précise de ce que pouvait être l’enseignement des mathématiques à la fin du Moyen Age. L’université médiévale a privilégié l’apprentissage de la grammaire, de la logique et de la rhétorique (le *Trivium*), en délaissant, plus ou moins, selon les endroits, les disciplines du quadrivium (arithmétique, musique, géométrie, astronomie). Toutefois au début du XIVe siècle les statuts d’Oxford mentionnent, pour l’arithmétique et la géométrie, un enseignement de l’Institution arithmétique de Boèce, de la pratique du calcul à l’aide du système positionnel indo-arabe et les premiers livres d’Euclide pour la géométrie.
Pour l’université de Paris, il semble qu’au XIVe siècle, les mathématiques étaient enseignées par les maîtres, à leur propre domicile, les jours fériés.
Toutefois on connaît des professeurs de renom à Paris : jean de Murs ou Nicole Oresme et on a de nombreux ouvrages qui semblent être à visée pédagogique, qu’ils

Quelques exemples de textes de mathématiques

Sabine Rommevaux

Des exercices d'arithmétique pratique

- les traités d'abaque
- les algorithmes
- les ouvrages à destination des marchands

Sabine Rommevaux

Pour l'arithmétique pratique, on doit d'abord distinguer deux types de textes. Les traités d'abaque et les algorithmes. Dans les traités d'abaque le calcul est enseigné à partir de la manipulation de jetons sur une table à calculer ou abaque. Les algorithmes présentent quant à eux le système décimal et les opérations sur les nombres. Ils sont parfois complétés par des séries de problèmes plus ou moins pratiques. Le nom « algorithme » vient du nom du mathématicien arabe al-Khwarismi qui a écrit un Calcul indien qui sert de base à ces traités. Les algorithmes servent de manuels pour l'enseignement de l'arithmétique dans les universités. Cet enseignement vise des applications dans les calculs liés à l'astronomie et au comput ecclésiastique qui fixe les dates des fêtes chrétiennes. Les traités sont écrits en latin. A la fin du Moyen Age se développe une autre tradition, liée à la formation mathématique des futurs marchands. On voit alors fleurir une littérature en langue vernaculaire pour cet enseignement. On a recensé une quinzaine de textes de ce type en France datant du XVe siècle. Il y a en environ 300 en Italie pour les XIVe et XVe siècles.

- Règle de trois

  Et l'on doit multiplier la chose que l'on veut savoir par son contraire et puis diviser par ce qui lui est semblable. [...] Comme si l'on dit, si 3 florins d'Avignon valent 2 francs, combien vaudront 20 florins d'Avignon ? 20ff d'Avignon est la chose que vous voulez savoir, que vous devez multiplier par 2 francs qui est son contraire, le produit fait 40 que vous devez diviser par 3 ff qui est semblable à 20 ff, il en vient 13 et 1/3 et les 20 ff d'Avignon valent 13 francs et 1/3 de franc.

Sabine Rommevaux

Exercice tiré du *Kadran aux marchands* de Jehan Certain (France, XVe siècle)

Traductions des *Éléments* d'Euclide

- Plusieurs traductions arabo-latines des *Éléments* d'Euclide au XIIe siècle :
    - Gérard de Crémone
    - Herman de Carinthie
    - Adélard de Bath (« Adelard I »)
    - Robert de Chester (« Adelard II »)
- Une version gréco-latine anonyme du XIIe siècle
- Des versions commentées :
    - Jean de Tinemue (« Adelard III »)
    - Campanus

Sabine Rommevaux

Avant le XII^{e} siècle, on ne connaissait que des fragments des *Éléments*. Selon des témoignages anciens, notamment de Cassiodore, Boèce (480-525) aurait traduit le traité euclidien à partir d'une source grecque. Mais si une telle traduction a bien existée, elle est aujourd'hui perdue. Toutefois, on trouve quelques définitions euclidiennes, géométriques et arithmétiques, dans les encyclopédies de Calcidius (début V^{e} siècle) et de Martianus Capella (V^{e} siècle). Et on a conservé dans les manuscrits deux traités de mathématiques faussement attribués par les copistes à Boèce, dans lesquels on trouve là aussi des extraits des *Éléments*. Le premier texte, dit « *Geometria* I », est formé de cinq livres et date probablement du VIII^{e} siècle ; le second, dit « *Geometria* II », en deux livres, date de la première moitié du XI^{e} siècle. Finalement il semble que la totalité des *Éléments* n'ait été connue en Occident qu'à partir des traductions exécutées au XII^{e} siècle, soit à partir d'un manuscrit grec, pour l'une d'entre elles, soit à partir de traductions arabes.
On voit aussi apparaître au XIIIe siècle des versions commentées.

Traduction des *Éléments* par Robert de Chester

Sabine Rommevaux

L'histoire du texte de la traduction des *Eléments* que l'on attribue à Robert de Chester est complexe. Il existerait en effet plusieurs états de cette version. Initialement, le texte ne comporterait que les énoncés compilés à partir d'une ou de plusieurs traductions arabes, comme en témoignent les plus vieux manuscrits conservés. Puis l'auteur, vraisemblablement Robert de Chester, aurait ajouté, en marge, des preuves, souvent résumées. Ces preuves ont été insérées dans le texte par les utilisateurs de cette version, qui les ont retravaillées. Il y a donc des divergences importantes entre les manuscrits au niveau des preuves, mais les énoncés sont semblables.
Les *Éléments* de Robert de Chester sont la version la plus diffusée ; on en a conservé de nombreux manuscrits. Et elle a probablement été utilisée en vue d'enseigner les mathématiques.

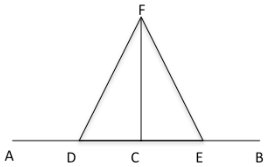
Traduction des *Éléments* par Robert de Chester

Livre I, Définitions

Robert de Chester		traduc. Vitrac
Punctus est illud cui pars non est.	Le point est ce dont il n'y a pas de partie.	Le point est ce dont il n'y a aucune partie.
Linea est longitudo sine latitudine, cuius extremitates quidem duo puncta sunt.	La ligne est une longueur sans largeur, dont les extrémités sont précisément deux points.	Une ligne est une longueur sans largeur. Les limites d'une droite sont des points.
Linea recta est ab uno puncto ad alium extensio in extremitates suas utrumque eorum recipiens.	Une ligne droite est une extension d'un point à un autre prenant chacun d'eux pour extrémité.	Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elles.

Sabine Rommevaux

Les divergences que l'on observe ici entre la version de Robert de Chester, et la version grecque (dans la traduction de Bernard Vitrac) sont sans doute dues au modèle arabe (qui n'a toutefois pas été identifié).



Proposition I. 11 (trad. Vitrac)

Mener un ligne droite à angles droits avec une droite donnée, à partir d'un point donné sur celle-ci.

<**Ecthèse**> Soit d'une part une droite donnée **AB** et d'autre part le point **C** donné sur elle.
Il faut alors mener, à partir du point C, une ligne droite à angles droits avec la droite AB.

<**Kataskeuè**> Que soit pris hasard le point **D** sur AC, et que soit placée **CE** égale à CD (**Prop. 2**). Que soit construit sur DE le triangle équilatéral FDE (**Prop. 1**), et que **FC** soit jointe.

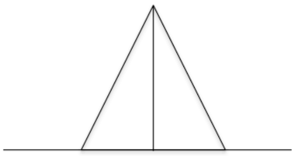
<**Diorisme**> Je dis que la droite FC est menée à angles droits avec la droite donnée AB à partir du point C donné sur celle-ci.

<**Apodeixis**> En effet, puisque CD est égale à CE, que CF est commune, alors les deux DC, CF sont égales aux deux EC, CF, chacune à chacune. Et la base DF est égale à la base FE (**Df. 20**). Donc l'angle sous DCF est égal à l'angle sous ECF (**Prop. 8**). Et ils sont adjacents.
Quand une droite, ayant été élevée sur une droite, fait des angles adjacents égaux entre eux, chacun de ces angles égaux est droit (**Df. 10**). Donc chacun des angles sous DCF, FCE est droit ?

<**Symperasma**> Donc la droite CF a été menée à angles droits avec la droite donnée AB à partir du point C donné sur celle-ci. Ce qu'il fallait démontrer.

Sabine Rommevaux

3 remarques sur cette proportion (que l'on pourrait faire sur les autres) :
1) Un découpage formelle de la démonstration en :
Ecthèse = exposition
diorisme = détermination
kataskeuè = construction
apodeixis =démonstration
symperasma = conclusion
Ces étapes ont été identifiées et nommées par Proclus.
2) Les éléments de la figures sont nommés.
3) Références aux définitions et propositions utilisées (souvent ajoutées par les scholiastes).



Proposition I. 11
Robert de Chester

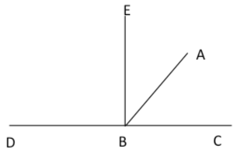
Sur une ligne droite donnée, à partir d'un point désigné sur elle, mener une perpendiculaire appuyée à angles égaux et droits de part et d'autre.

Ayant pris deux points sur cette même droite, l'un ici et l'autre éloigné de manière égale du point donné, construit un triangle équilatéral sur la ligne qu'ils déterminent, et à partir du point donné mène une perpendiculaire dirigée vers l'angle supérieur.

Ensuite, **tu démontreras** que la ligne érigée est commune aux deux parties de la base à partir de la **proposition 8** et que la perpendiculaire est la perpendiculaire-même qui a été érigée par construction.

Sabine Rommevaux

Pas de lettrage
Démonstration réduite à l'injonction de ce qui doit être fait et le renvoi à la proposition 8



Proposition I. 13 traduc. Vitrac

Si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits.

En effet, qu'une droite AB élevée sur la droite CD produise les angles sous CBA, ABD.

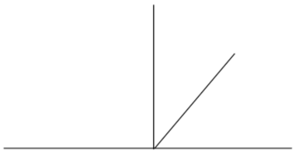
Je dis que les angles sous CBA, ABD sont soit droits, soit égaux à deux droits.

Or d'une parte, si celui sous CBA est égal à celui sous ABD, ils sont deux droits (**Df. 10**). Sinon, d'autre part, que AB, soit menée à angles droits avec CD à partir d'un point B (**Prop. 11**). Donc ceux sous CBE, EBD sont deux droits ; et puisque celui sous CBE est égal aux deux sous CBA, ABE, que celui sous ABD soit ajouté de part et d'autre. Donc ceux sous CBE, EBD sont égaux aux trois sous CNA, ABE, ABD (**N. C. 2**). Ensuite, puisque celui sous DBA est égal aux deux sous DBE, EBA, que celui sous ABC soit ajouté de part et d'autre. Donc ceux sous DBA, ABC sont égaux aux trois sous DBE, EBA, ABC (**N. C. 2**).

Et il a été démontré aussi que ceux sous CNE, ABD sont égaux aux trois mêmes. Or les choses égales à la même chose sont égales entre elles (**N. C. 1**). Et donc ceux sous CBE, EBD sont égaux à ceux sous DBA, ABC. Mais ceux sous CBE, EBD sont deux droits. Et donc ceux sous DBA, ABC sont égaux à deux droits.

Donc si une droite élevée sur une droite produit des angles, elle produira deux angles soit droits, soit égaux à deux droits. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition I. 13
Robert de Chester



Les deux angles de chaque côté de n'importe quelle ligne droite élevée sur une droite sont droits, ou sont égaux à deux droits.

Par la onzième.

Campanus
Elementa

Sabine Rommevaux

Dès la fin du XIIIe siècle, la version de Robert de Chester est supplantée par la version de Campanus, produite vers 1259. Campanus reprend à Robert de Chester ses énoncés des définitions, principes et propositions. Toutefois, il rédige entièrement les démonstrations, il ajoute des définitions, des principes et des propositions, ainsi que des commentaires et pour ce faire il puise à plusieurs sources. Cette version est utilisée jusqu'à la Renaissance ; elle est publiée dès 1482 à Venise, par Ratdolt.

Campanus
Elementa, définitions du livre I

1. Une quantité est une partie d'une quantité, une plus petite d'une plus grande quand la plus petite nombre la plus grande.

La partie, quand on la prend au sens propre, est celle qui prise quelques fois constitue son tout exactement, sans diminution ni augmentation. Et elle est dite nombrer son tout par ce nombre selon lequel il est pris pour la constitution de son tout, et il [l'auteur] définit ici une telle partie que nous appelons multiplicative. Et quand on la prend au sens commun, elle est n'importe quelle quantité plus petite, qui prise plusieurs fois constitue plus ou moins que son tout et que nous appelons agrégative, du fait qu'elle constituerait son tout avec une autre quantité différente, mais prise plusieurs fois elle-même, elle ne le produirait pas.

2. La plus grande est multiple de la plus petite quand la plus petite la mesure.

La partie est dite relativement au tout et leur relation mutuelle consiste dans ces deux extrêmes. Et pour cette raison ayant défini le plus petit extrême, il [l'auteur] définit ici le plus grand, et il dit que c'est le multiple, parce que le plus petit pris quelques fois le constitue. C'est pourquoi elles seront dites relativement l'une à l'autre, partie et multiple. En effet toute partie est un sous-multiple, comme il est clair selon sa définition.

Exemples de commentaires de définitions.

Campanus
Elementa, prop. X.7

<*Enoncé*>

Pour deux surfaces carrées quelconques dont les côtés sont commensurables en longueur, le rapport de l'une à l'autre est comme le rapport d'un nombre carré à un nombre carré. Et si le rapport d'une surface carrée à une surface carrée est comme le rapport d'un nombre carré à un nombre carré, leurs côtés seront commensurables en longueur. Et si le rapport de la surface carré à la surface carrée n'est pas comme d'un nombre carré à un nombre carré, leurs côtés seront incommensurables en longueur.

Exemple de commentaire de propositions

Campanus,
Elementa, Prop. X. 7, *annotatio*

À partir de la troisième partie de cette proposition, note que la diagonale est incommensurable au côté. En effet, puisque le carré de la diagonale est le double du carré du côté, et que le rapport double n'est pas comme entre des nombres carrés, il s'ensuit que la diagonale est incommensurable au côté en longueur. Autrement, puisque quatre est un nombre carré, tous les pairement pairs seraient des carrés et aussi une infinité d'autres nombres qui ne sont pas des carrés.

Campanus, *Elementa,* Prop. X. 7, *annotatio*

Mais Aristote mène à cet inconvénient : si la diagonale est posée commensurable au côté, un nombre impair sera égal à un nombre pair.

Toujours en effet quand on effectue un raisonnement par l'absurde, on conclut le faux par syllogisme, mais la proposition initiale à démontrer est prouvée hypothétiquement quand une impossibilité résulte de la proposition contradictoire <à la proposition initiale>.

On prouve par exemple l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire.

Le modèle des *Eléments* d'Euclide

– organisation en plusieurs livres
– axiomes et postulats
– définitions
– propositions avec démonstration, selon un ordre logico-déductif

Sabine Rommevaux

Les *Éléments* d'Euclide suivent une structure particulière, qui servira de modèle de composition des ouvrages mathématiques jusqu'à aujourd'hui. Certains livres débutent par les définitions des termes et des notions fondamentales et se poursuivent par l'énoncé des principes (axiomes et postulats). Dans tous les livres on trouve une suite de propositions (486 pour les livres I à XV dans l'édition du texte grec par Heiberg) accompagnée chacun de sa démonstration. L'ordre des propositions n'est pas quelconque : chaque proposition doit dépendre pour sa démonstration uniquement des propositions qui la précèdent et des principes qui ont été posés avant elle.

L'arithmétique de Jordanus

Sabine Rommevaux

C'est ce modèle que suit Jordanus pour son Arithmétique ou *De elementis arithmetice artis.* Ce traité se compose de dix livres. Ils sont consacrés aux différents types de nombres que l'on trouve en arithmétiques : nombres premiers, pairs, impairs, nombres solides, nombres figurés, mais aussi les proportions. Ses sources sont principalement les *Eléments* d'Euclide, dans la traduction de Robert de Chester, et l'arithmétique de Boèce. Le traité de Jordanus est un ouvrage de référence qui sera utilisé jusqu'à la Renaissance.

L'arithmétique de Jordanus
Livre I

1. L'unité est l'être de la chose discrète prise pour elle-même
2. Un nombre est une quantité collective de discrets
3. On appelle série naturelle de nombres ce dans quoi leur énumération est faite par l'addition d'une unité.
4. Le nombre selon lequel un plus grand surpasse un plus petit est appelé différence des nombres.
5. Des nombres sont dits être équidistants d'autres nombres lorsque les différences des uns aux autres sont égales.
6. Un nombre est multiplié par un autre, quand il est ajouté autant de fois qu'il y a d'unité dans le multiplicateur ; et ce qui est obtenu à partir de la multiplication est appelé le produit.
7. Un nombre est dit mesurer un autre nombre, quand il le produit selon quelque multiple.

Sabine Rommevaux

Définition de l'unité chez Euclide : l'unité est ce selon quoi chaque chose existante est dite une.

8. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, quand le plus petit mesure le plus grand et celui qui est mesuré est appelé le multiple du mesurant.

9. Dénommant est le nombre selon lequel la partie est prise dans son tout.

10. Des parties qui sont dénommées par un même nombre sont dites semblables.

11. Un nombre selon lequel est divisé un autre nombre est appelé le diviseur.

12. Et les parties selon lesquelles il est distribué sont appelées les dividendes.

13. La partie première et simple d'un nombre est l'unité.

14. Quand deux nombres ont une partie commune, on dit que le plus petit est autant de parties du plus grand que cette partie commune est de fois dans le plus petit.

L'arithmétique de Jordanus
Livre I

Les postulats sont au nombre de trois :

1. Pouvoir prendre autant de nombres que l'on veut égaux à n'importe quel nombre.
2. N'importe quel nombre étant donné, avoir un autre plus grand autant que l'on veut.
3. Pouvoir étendre à l'infini la série des nombres.

L’arithmétique de Jordanus
Livre I

Les notions communes sont au nombre de huit et ce sont les suivantes :

1. Toute partie est plus petite que son tout.
2. Toute partie qui a une plus grande dénomination est plus petite.
3. Quels que soient les équimultiples de nombres identiques ou égaux, ils seront aussi égaux.
4. Ceux dont un même nombre est multiple ou dont les multiples sont égaux sont aussi égaux.
5. L’unité est la partie de tout nombre dénommée par ce nombre.
6. N’importe quel nombre est un tout pour l’unité autant que l’unité en est une partie.
7. Si l’unité est multipliée par quelque nombre ou si un nombre est multiplié par l’unité, est produit le nombre lui-même.
8. La différence entre des extrêmes est composée des différences entre chacun d’eux et un médian.

Sabine Rommevaux

L'arithmétique de Jordanus
Livre I

- Proposition I : Tout nombre plus petit est une partie ou des parties d'un plus grand.

  En effet, ou bien le plus petit mesure le plus grand ou bien il ne le mesure pas. S'il le mesure, c'est sa partie. S'il ne le mesure pas et si quelque nombre les mesure ensemble, ce même nombre sera une partie de chacun d'eux. Et le plus petit sera autant de parties du plus grand que ce nombre est de fois dans le plus petit. Et s'il n'en est pas ainsi, puisque l'unité est la partie de tout nombre, la même chose sera démontrée à partir des unités.

L'arithmétique de Jordanus
Livre I

Proposition II. Tout nombre est un médian entre ceux qui sont posés de part et d'autre de lui et qui sont placés à distances égales de lui. Et s'il est leur médian, il advient qu'ils sont équidistants de lui.

Soit un même nombre *a* et que soient posés de part et d'autre de lui *b* un plus grand et *c* un plus petit et que la différence commune soit *d*. Et que le composé de *b* et de *c* soit *e* dont la différence à *a* soit *t*. Alors, puisque la différence de *e* à *b* est *c*, d'après la dernière notion commune, *t* est constitué de *d* et *c*. Mais puisque *a* est constitué des mêmes, *t* sera égal à *a*, donc *e* est double de *a*.

Et si on le pose, *t* sera pour cette raison égal à *a*. Mais puisque *t* est constitué de *c* et *d*, *a* sera constitué des mêmes. Donc la différence de *a* à *c* sera *d*. C'est pourquoi *b* et *c* seront équidistants de *a*. Et c'est ce qui a été dit.

Sabine Rommevaux

L'Arithmétique de Jordanus n'est pas le seul ouvrage de mathématiques produit au Moyen Age qui reprend la structure des Eléments, mais c'est sans doute celui qui la suit de la manière la plus scrupuleuse. Bien souvent, même si on retrouve dans les traités de mathématique, une organisation en livres, avec énoncés des définitions utiles au propos, suivie d'une liste de propositions, le style d'exposition s'éloigne du style euclidien, sous l'influence d'une part de l'enseignement universitaire et la pratique de la dispute (nous allons y revenir) et d'autre part de la logique qui se développe au Moyen Age.
Nous allons voir rapidement un exemple de cette utilisation de la logique dans le *De continuo* de Thomas Bradwardine.

Thomas Bradwardine

Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements

Sabine Rommevaux

L'intérêt de Bradwardine pour les mathématiques et leur application aux questions physiques est visible dans certains des ouvrages qu'il a rédigés durant son séjour à Oxford. Il a ainsi composé une *Arithmétique spéculative* sur le modèle de l'*Institution arithmétique* de Boèce et une *Géométrie spéculative* qui connut un vif succès au Moyen Âge et à la Renaissance, si l'on en juge par le nombre important de manuscrits puis d'éditions qui la contiennent. Et dans un traité *Sur le continu*, organisé selon la forme euclidienne en axiomes, définitions et propositions, il réfute mathématiquement la possibilité pour un continu d'être composé d'indivisibles et clôt ainsi un débat qui a agité les maîtres oxoniens durant quelques années (voir plus loin).

De même qu'il a isolé la question du continu des commentaires sur les textes théologiques auxquels elle était traditionnellement rattachée, Thomas Bradwardine traite la question du mouvement dans un traité indépendant, uniquement consacré à ce problème (et non pas dans un commentaire à la *Physique*). La question que se pose Bradwardine, à la suite d'Aristote, est la suivante : comment détermine la rapidité d'un mouvement à partir de la puissance du moteur (ou de ce qui produit le mouvement), et de la résistance du mobile (ou de ce qui est mis en mouvement). La règle du mouvement qu'il énonce, et qui sera reprise par tous après lui et jusqu'à Galilée, mais en scène des rapports ou proportions. De sorte que toute la première partie de son traité est consacré à l'étude mathématique des proportions.

Thomas Bradwardine

Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements

Sabine Rommevaux

Le *Traité des rapports* de Thomas Bradwardine eut une fortune immédiate, aussi bien en Angleterre que sur le continent. Il est ainsi utilisé comme manuel d'enseignement dans certaines universités au Moyen Âge, puis à la Renaissance, comme en témoignent les recueils de questions qui s'y réfèrent (par exemple les *Questions sur le traité des rapports du maître Thomas Bradwardine* rédigées à la fin du XIVe siècle par Blaise de Parme – voir plus loin) ou encore les ouvrages qui reprennent de manière simplifiée son contenu (nous en avons un exemple avec le *Traité des rapports* du maître parisien du XIVe siècle, Albert de Saxe).

Thomas Bradwardine

Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements

PROLOGUE

Puisqu'il se trouve que tout mouvement successif est proportionnel à un autre en rapidité, la philosophie naturelle, qui s'occupe du mouvement, ne doit pas méconnaître quel est le rapport entre les mouvements et les rapidités dans les mouvements. Et du fait que la connaissance de ce rapport est nécessaire, mais qu'elle est très difficile et qu'elle n'a été complètement traitée dans aucune branche de la philosophie, nous avons composé cet ouvrage sur le rapport entre les rapidités dans les mouvements. Et puisque, selon le témoignage de Boèce dans le premier chapitre de son *Arithmétique*, il est clair que quiconque négligerait les sciences mathématiques ruinerait toute connaissance philosophique, nous avons commencé par présenter les choses mathématiques dont nous avons besoin pour notre propos, de sorte que la théorie soit plus facile et plus à la portée de l'étudiant. Et afin de rendre cette théorie plus accessible et facile, cet ouvrage est divisé en quatre sections ou chapitres.

Sabine Rommevaux

Dans le prologue à son *Traité sur les rapports*, Bradwardine insiste sur le fait que les mathématiques sont indispensables pour l'étude de la nature, ce qui n'est pas une opinion communément admise à son époque, car contraire à Aristote. Il se réfère ici à Boèce.

Thomas Bradwardine

Traité des rapports entre les rapidités dans les mouvements

Septième conclusion : Aucun rapport n'est plus grand ou plus petit qu'un rapport d'égalité.

En effet, aucun rapport d'égalité n'est plus grand ou plus petit qu'un rapport d'égalité, d'après la première supposition. Et aucun rapport de plus grande inégalité n'est plus grand ou plus petit qu'un rapport d'égalité, puisque le rapport d'égalité serait alors surpassé par un rapport de plus grande inégalité selon quelque rapport de plus grande inégalité. Et puisque, selon ce même rapport, quelque rapport de plus grande inégalité est surpassé par ce rapport de plus grande inégalité, il s'ensuit, d'après la sixième supposition, que le rapport d'égalité et le rapport de plus grande inégalité sont égaux. Alors, d'après la même supposition, il s'ensuit que le plus grand et le plus petit sont égaux entre eux.

Sabine Rommevaux

Voici l'exemple de la septième conclusion tirée de la première partie, sur la théorie des rapports et des proportions.
Bradwardine commence par une démonstration générale.

Par exemple, posons que le rapport quadruple est plus grand, du double, que le rapport d'égalité, et prenons un rapport de plus grande inégalité deux fois plus petit que le rapport quadruple, ce qui peut être fait si, entre deux extrêmes dont le plus grand est le quadruple du plus petit, est interposé un médian qui soit au plus petit extrême comme le plus grand est au même médian. En effet, interposons 2 entre 4 et 1. Alors, ces trois termes sont continûment proportionnels. Donc, d'après la première conclusion, le rapport du premier au dernier est le double du rapport du premier au deuxième. Donc le rapport du premier au deuxième est le sous-double du rapport du premier au dernier. Donc le rapport double est le sous-double du rapport quadruple. Et selon l'hypothèse fausse, le rapport d'égalité est le sous-double du rapport quadruple. Donc, d'après la sixième supposition, il est égal au rapport double. Donc les rapports de 2 à 1 et de 1 à 1 sont égaux. Donc, d'après la sixième supposition, 2 et 1 sont égaux. Et l'on peut produire un raisonnement semblable pour n'importe quel autre rapport de plus grande inégalité.

Sabine Rommevaux

Il poursuit par un exemple

Mais on peut objecter contre cette conclusion de cette manière : soit A égal à B, C plus grand et D plus petit. Alors, d'après la cinquième supposition, C a un plus grand rapport à B que A à B, et D un plus petit. Et le rapport de A à B est d'égalité, donc etc.

Contre la même conclusion : soient A et C égaux et que chacun d'eux soit le double de B. Alors, que soit interposé entre A et C, les deux extrêmes, le médian B qui a quelque rapport à chacun d'eux. D'après la deuxième supposition, le rapport de A à C est composé des rapports de A à B et de B à C, et le rapport de A à C est un rapport d'égalité. Donc tant le rapport double que le rapport sous-double sont plus petits que le rapport d'égalité.

Contre la même conclusion : soient A, B et C trois termes égaux. Alors, d'après la deuxième supposition, le rapport de A à C est composé des rapports de A à B et de B à C et ces rapports sont égaux. Donc celui-là est le double de chacun d'eux.

[…]

Sabine Rommevaux

Il introduit ensuite trois objections.

En réponse à la première objection, on doit dire qu'Euclide entend la cinquième supposition pour des quantités inégales comparées à une troisième selon le même genre de rapport, de sorte que chacune est comparée à celle-là selon un rapport de plus grande inégalité, ou chacune selon un rapport de plus petite inégalité.

En réponse à la deuxième objection, on doit dire que la deuxième supposition doit être comprise pour des extrêmes et un médian tels que le premier est différent du troisième et le médian différent de chacun d'eux.

La même remarque vaut pour la troisième objection.

En réponse à la quatrième objection, on doit dire qu'Euclide pense seulement à des quantités proportionnelles dans un rapport de plus grande inégalité.

Ainsi cesse toute objection.

Sabine Rommevaux

Auxquelles il répond.

Ce qui est en jeu, ce sont deux conceptions différentes de la relation « être plus grand que » pour les rapports.

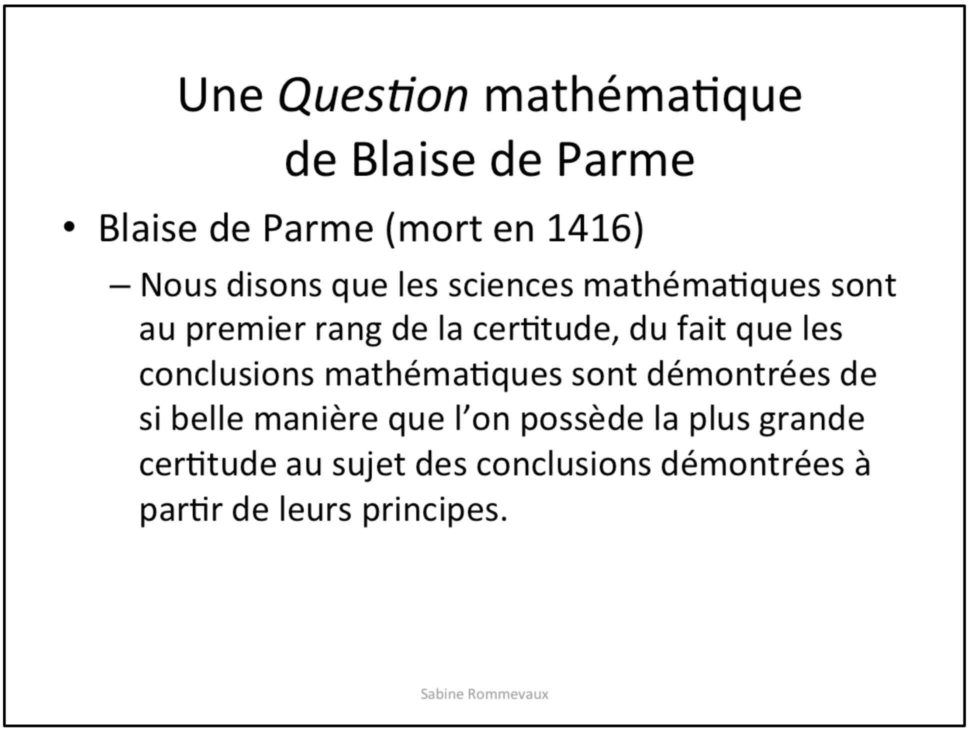
La forme *Question*

Sabine Rommevaux

Au XIVe siècle apparaît une forme textuelle particulière, la Question, qui est directement issue de la manière dont était donné l'enseignement dans les universités médiévales. Cet enseignement était fondé sur la lecture de textes fondamentaux, qui pouvaient soit être des ouvrages d'autorités anciennes comme Aristote ou Euclide, soit des ouvrages plus récents comme la *Sphère* de Sacrobosco ou le *Traité sur les rapports* de Thomas Bradwardine (pour n'évoquer que la faculté des arts). Lors de cette lecture, plusieurs questions ou doutes pouvaient être soulevés, soit à propos de la signification d'un mot, de la compréhension d'un passage ou des théories mises en œuvre, notamment lorsque les autorités proposaient des interprétations contradictoires. Le maître présentait alors les différents arguments, puis tranchait dans un sens ou dans l'autre.

Cette manière de poser les problèmes sous forme de questions va prendre son autonomie par rapport à la lecture des textes pour devenir une pratique distincte très codifiée, la *dispute*. Lors de séances publiques, à l'Université, ou au cours de débats privés organisés par le maître pour ses seuls étudiants, une question était soulevée : plusieurs intervenants dont le maître, au moins un contradicteur et un répondant échangeaient leurs points de vue sur le problème mis en discussion. Lors du cours qui suivait la dispute, le maître reprenait les termes du débat en les réorganisant. La dispute est ainsi à la fois un outil pédagogique, un procédé d'apprentissage et un instrument pour l'élaboration du savoir.

Ce type d'enseignement a donné lieu à un genre littéraire, la *Question disputée*. Il peut s'agir soit de la transcription des débats par les étudiants qui ont assisté à la dispute (on nomme ces transcriptions plus ou moins fidèles des *reportationes*), soit d'une rédaction du maître (*ordinatio*). Il convient ici de noter que les textes qui se présentent sous la forme d'une question disputée sont parfois sans lien avec des débats publics ayant réellement eu lieu ; l'auteur peut avoir choisi cette forme discursive pour l'exposé de sa réflexion plutôt que toute autre forme.
Une *Question*, réellement disputée ou non, s'organise généralement en deux parties. Dans une première partie sont présentés des arguments pour ou contre la question posée (*quod non* et *quod sic*). Ce sont en général des citations tirées d'ouvrages faisant autorité ou des argumentations soutenues par tel ou tel maître contemporain de l'auteur. Les attributions ne sont pas toujours explicitées. Dans une seconde partie, l'auteur présente sa propre thèse et répond aux arguments qui vont contre la réponse qu'il propose.
Cette structure discursive est courante en théologie et en philosophie pour lesquelles elle est particulièrement bien adaptée à la pratique de la dialectique. Mais on la trouve aussi philosophie naturelle et en mathématiques.
En voici un exemple tiré d'un recueil de questions rédigées par Blaise de Parme.



Blaise de Parme (mort en 1416) a enseigné la logique, la philosophie naturelle et la philosophie morale dans différentes universités d'Italie du Nord de 1378 à 1415. Il a aussi enseigné les mathématiques, comme cela se faisait alors en Italie, dans le cadre de ses leçons de philosophie naturelle. On peut noter qu'il assigne même aux mathématiques une place de choix dans l'organisation du savoir. Ainsi, pour Blaise, parmi toutes les sciences, les mathématiques occupe la première place en raison de la certitude et de la beauté de ses démonstrations (la question de la certitude des mathématique et de son rang dans la hiérarchie des savoirs sera très débattue à la Renaissance). Et Blaise fonde la certitude accordée des mathématiques premièrement sur le fait que l'appréhension des termes d'une proposition produit nécessairement l'assentiment à l'égard de cette proposition, deuxièmement sur la nécessité logique de la déduction (de l'inférence) à partir des principes. Or le seul texte de Blaise de Parme dans lequel il traite de mathématique ne se présente pas du tout sous une forme logico-déductive, comme les *Éléments* d'Euclide, mais sous la forme de *Questions.*

Une *Question* mathématique de Blaise de Parme

- *Questions sur le traité des rapports de Thomas Bradwardine*

Sabine Rommevaux

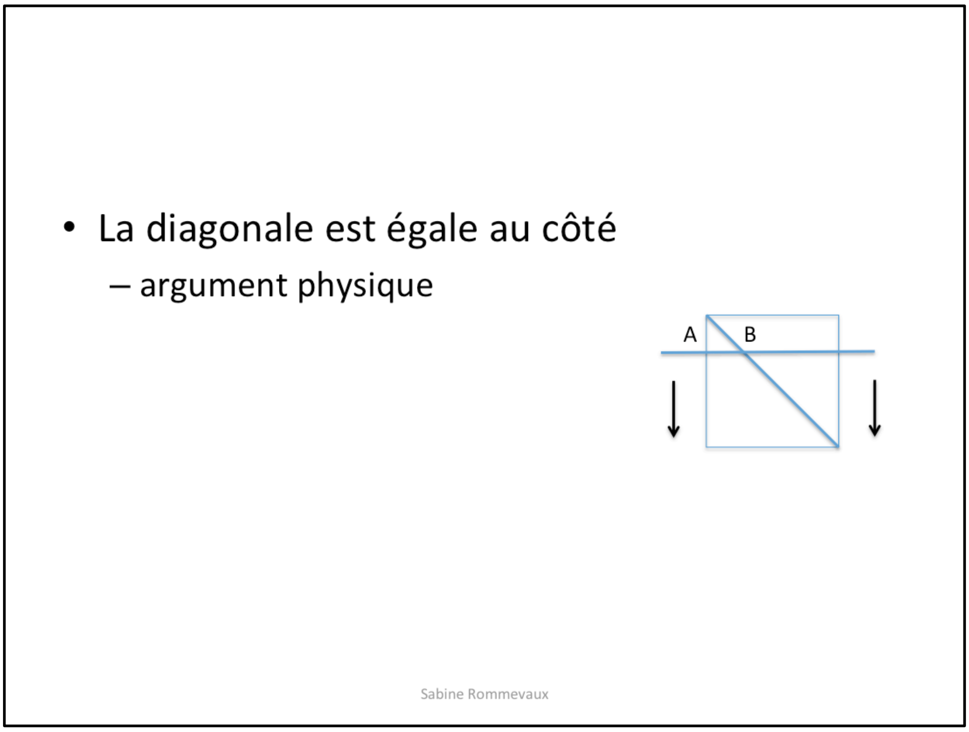
En fait, Blaise traite de mathématiques dans ses *Questions sur le traité des rapports de Thomas Bradwardine*, qui est un commentaire du traité du maître d'Oxford. Plusieurs de ces questions concernent les mathématiques.

Une *Question* mathématique de Blaise de Parme

- *Questions sur le traité des rapports de Thomas Bradwardine*
  - Est-ce que le rapport de la diagonale au côté d'un même carré est rationnel ?

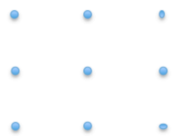
Sabine Rommevaux

Nous allons en examiner une (la question 4) qui est la suivante : Est-ce que le rapport de la diagonale au côté d'un même carré est rationnel ?
On peut être étonné que Blaise se pose cette question. On connaît bien sûr la réponse depuis Euclide et sans doute bien avant lui : elle est négative. La diagonale est incommensurable au côté, le rapport entre les deux lignes est irrationnel (il vaut racine de 2).
Et pourtant Blaise traite de ce problème, en suivant les règles d'exposition d'une *Question*. C'est-à-dire que dans un premier temps, il va donner une série d'arguments prouvant que le rapport de la diagonale au côté est rationnel. Puis il fera appel à une autorité. Enfin, il donnera sa propre solution, et répond aux arguments donnés dans la première partie.



Dans un premier temps, Blaise va donc produire trois arguments qui prouvent que la diagonale d'un carré est égale au côté.
Le premier argument est tiré d'une expérience de physique (imaginaire) : on suppose qu'une barre descend parallèlement au côté d'un carré.
Le point A parcourt le côté et le point la diagonale. A et B arrivent en même temps en bas, donc ils ont parcouru la même distance. Ainsi la diagonale est égale au côté.

- La diagonale est égale au côté
  - argument physique
  - argument arithmétique



Sabine Rommevaux

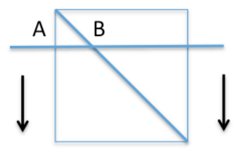
Deuxième argument arithmétique : prenons le nombre figuré 9, qui est un nombre carré. Son côté vaut 3 et sa diagonale aussi.

- La diagonale est égale au côté
  - argument physique
  - argument arithmétique
  - argument philosophique :
    - la diagonale et le côté du carré en sont rien d'autre que la surface du carré elle-même, donc la diagonale et le côté sont égaux.

Sabine Rommevaux

Le troisième argument est philosophique (ou logique et ontologique) : la diagonale et le côté du carré en sont rien d'autre que la surface du carré elle-même, donc la diagonale et le côté sont égaux.
Il faut comprendre que pour Blaise ici, que la diagonale et le carré, qui sont en quelque sorte des attributs du carré, n'ont pas d'existence propre, mais n'existe qu'en raison de l'existence du carré. Il n'y a donc pas de distinction réelle entre le carré (la surface) et sa diagonale ou son côté. Ainsi ces deux dernières entités sont égales (quant à leur mode d'existence).
On voit ici, avec ces trois arguments, comment se mêlent des considérations mathématiques, physiques, ou philosophiques, pour résoudre un problème de mathématique. Nous reviendrons sur ce point.

- Réponse de Blaise :
  - rejet de l'argument physique
    - le mouvement de B n'est égal à celui de A



Sabine Rommevaux

Voyons comment Blaise répond à ces arguments.
Blaise rejette l'argument physique, il note que le mouvement du point B le long de la diagonale n'est pas le même que celui de A. En effet, le mouvement de B se compose d'un mouvement vers le bas et d'un mouvement horizontal. On ne peut donc pas comparer brutalement les deux parcours.

- Réponse de Blaise :
  - rejet de l'argument physique
    - le mouvement de B n'est égal à celui de A
  - argument arithmétique accepté

Sabine Rommevaux

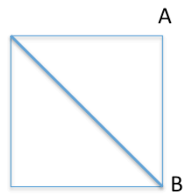
Blaise accepte l'argument arithmétique

- Réponse de Blaise :
  - rejet de l’argument physique
    - le mouvement de B n’est égal à celui de A
  - argument arithmétique accepté
  - argument philosophique accepté :
    - Lorsque l’on dit “la diagonale du carré n’est autre que la surface de ce carré”, je dis que si tu entends parler comme les philosophes, ceux-ci s’expriment en disant que les lignes ne se distinguent pas des surfaces ni les surfaces des corps ; il faudra alors accorder que la diagonale du carré est le carré lui-même, et pareillement du côté de ce carré.
    - Mais différent est le point de vue des mathématiciens qui imaginent des lignes indivisibles selon la longueur, et pour cela, l’argument ne vaut pas

Sabine Rommevaux

Il accepte aussi l’argument philosophique : « Lorsque l’on dit “la diagonale du carré n’est autre que la surface de ce carré”, je dis que si tu entends parler comme les philosophes, ceux-ci s’expriment en disant que les lignes ne se distinguent pas des surfaces ni les surfaces des corps ; il faudra alors accorder que la diagonale du carré est le carré lui-même, et pareillement du côté de ce carré.
Mais il ajoute : » Mais différent est le point de vue des mathématiciens qui imaginent des lignes indivisibles selon la longueur, et pour cela, l’argument ne vaut pas. »
Blaise de Parme distingue deux points de vue sur la question posée, celui du philosophe et celui du mathématicien. L’un comme l’autre ont leur légitimité mais ils conduisent à des réponses contraires. Il faut relier cette démarche à l’épistémologie de Blaise de Parme qui considère qu’une science ne se définit pas par son objet, comme le fait Aristote, mais par le point de vue qu’elle adopte par rapport au monde. Il suit en cela Avicenne et Jean Buridan.

- La diagonale est le double du côté :
  - le carré de la diagonale est le double du carré du côté donc la diagonale est le double du côté
  - l'angle en A, qui est l'angle opposé à la diagonale, est le double de l'angle en B, qui est opposé à côté, donc la diagonale est le double du côté



Dans une seconde série d'arguments, on montre que la diagonale est le double du côté.
Premier argument : le carré de la diagonale est le double du carré du côté donc la diagonale est le double du côté
Deuxième argument : l'angle en A, qui est l'angle opposé à la diagonale, est le double de l'angle en B, qui est opposé à côté, donc la diagonale est le double du côté.
Blaise rejette ces deux arguments qui sont faux. Ces deux arguments servent en fait à mettre en garde les étudiants contre l'idée simpliste selon laquelle tous les éléments d'une figure géométrique sont nécessaire proportionnels. Le carré n'est proportionnel à son côté et même que l'angle opposé à un côté n'est pas proportionnel à ce côté.

- Appel aux autorités :
  - D'un avis contraire sur cette question sont tous les spécialistes des proportions et en particulier Euclide et son commentateur Campanus.

Sabine Rommevaux

- La détermination de Blaise:
  - Dans cette question, il y aura trois articles.
    Dans le premier article, je poserai les définitions d'un certain nombre de mots et les suppositions.
    Dans le deuxième article, je présenterai des conclusions et quelques corollaires.
    Dans le troisième article, je répondrai aux arguments contraires.

Sabine Rommevaux

On retrouve ici, localement, la structure déductive des *Eléments*, avec dans les premiers temps les définitions et suppositions ou principes. Puis les propositions.

- Définitions des grandeurs commensurables et incommensurables.
- Suppositions :
  - algorithme d'Euclide pour deux grandeurs commensurables et incommensurables
  - le carré de la diagonale est le double du côté
  - le rapport entre des carrés est le rapport doublé des côtés de ces carrés : $A^2 / B^2 = (A/B)^2$
  - si A et B sont commensurables, A/B = p/q avec p ou q impair
  - 2.p est pair
  - si p est pair, p^2 est pair ; si p est impair, p^2 est impair

Sabine Rommevaux

Définitions des grandeurs commensurables et incommensurables : en fait, Blaise ne les rappelle pas, il suppose que tout le monde les connaît.
Suppositions :

> Certaines des proposition peuvent être démontrée, mais Blaise les admet comme prémisses, sans démonstration. C'est sur elles qu'il va fonder son raisonnement. Je parle donc d'une axiome « locale », propre au problème posée, et non pas générale, valant pour toute la géométrie, comme chez Euclide.

- Proposition 1 :

  la diagonale est plus grande que le côté selon la longueur.
- Proposition 2 :

  la diagonale n’est pas le double du côté, car sinon le carré de la diagonale serait quadruple de celui du côté.
- Proposition 3 :

  le rapport de la diagonale au côté est la moitié du rapport double.
- Proposition 4 :

  le rapport de la diagonale au côté n’est pas rationnel.

Sabine Rommevaux

« la diagonale est plus grande que le côté selon la longueur ». L’expression « selon la longueur » rappelle que l’on se place dans le contexte de la géométrie et non dans celui des nombres figurés pour lesquels, nous l’avons vu, la diagonale est égale au côté.

pour conclure sur cette partie :
Blaise n’est pas le premier a se poser sous forme de la question le problème de l’incommensurabilité de la diagonale et du côté d’un même carré. Par exemple, Nicole Oresme l’avait fait avant lui. Mais si Nicole Oresme se plie à la forme discursive de la *Question* usuelle à son époque, il le fait du bout des lèvres, en réduisant à la portion congrue la première partie, dans laquelle sont exposés les arguments contraires, et en privilégiant la deuxième partie qui présente sa propre thèse. Par contre, Blaise ne néglige pas la première partie des questions. Bien au contraire, celle-ci semble avoir une place privilégiée. En fait, les arguments de la première partie ont des fonctions essentiellement pédagogiques et épistémologiques.

- Proposition 1 :
  la diagonale est plus grande que le côté selon la longueur.
- Proposition 2 :
  la diagonale n'est pas le double du côté, car sinon le carré de la diagonale serait quadruple de celui du côté.
- Proposition 3 :
  le rapport de la diagonale au côté est la moitié du rapport double.
- Proposition 4 :
  le rapport de la diagonale au côté n'est pas rationnel.

Sabine Rommevaux

On peut distinguer, en effet, deux types de tels arguments dans les questions à caractère mathématique. Du premier type sont les arguments à but pédagogique, qui sont l'occasion pour le maître de mettre en garde les étudiants contre certains raisonnements erronés. C'est le cas, dans l'exemple que nous avons présenté ici, de l'argument sur la descente d'une ligne parallèlement au côté du carré. Il s'agit d'un argument faux, mais dont la fausseté n'apparaît peut-être pas immédiatement aux yeux des étudiants. Il permet au maître de rappeler comment un mouvement peut être décomposé en mouvements élémentaires. Par ailleurs, les deux arguments qui cherchent à prouver que la diagonale est le double du côté permettent de combattre l'idée simple, mais fausse, selon laquelle des éléments d'une même figure – comme les angles, les lignes, la surface etc. – sont proportionnels.
Du deuxième type sont les arguments proposant des points de vue différents sur la même question ou sur l'objet qui y est en jeu. Dans cette catégorie se trouve l'argument portant sur les nombres figurés. Il sert ici à délimiter le champ dans lequel on se place : un carré peut-être soit arithmétique, soit géométrique ; si l'on considère un nombre carré (au sens de nombre figuré), la réponse à la question est positive, si l'on se place dans le champ de la géométrie, la réponse est négative. Ainsi, plusieurs points de vue peuvent s'affronter sur le même objet : celui de l'arithméticien, celui du géomètre, mais aussi celui du physicien ou du philosophe., Bref, l'utilisation de la forme *Question* en mathématique conduit assurément à la production d'arguments faux. Mais elle permet de poser la question de la légitimité d'un discours

Le *De continuo* de Thomas Bradwardine

Sabine Rommevaux

Autre traité de Thomas Bradwardine le *De continuo,* que je voudrais évoquer pour finir, car il pose la question des relations entre mathématiques et philosophie naturelle. Dans ce traité, Bradwardine pose la question de la composition du continu et réfute les théories des atomistes selon lesquels le continu serait composé d'un nombre fini ou infini d'atomes. Il soutient la position d'Aristote d'un continu dont les parties sont indéfiniment divisibles. L' objet de ce traité est donc le continu pour lequel Bradwardine propose un traitement à la fois mathématique et physique. Ainsi, ce traité établit un lien entre les deux disciplines ; il en abolit même les frontières.

Le *De continuo* de Thomas Bradwardine

- 24 définitions : continue, indivisible, corps, surface, ligne, point, degré de mouvement, commencement et fin du mouvement, infini, etc.
- 10 suppositions :
  - Toute chose plus grande qu'une chose donnée peut être divisée en une chose égale à la chose donnée et en la différence selon laquelle la chose plus grande excède la chose donnée.
  - Si un fini est ajouté à un fini, le tout sera fini
  - Là où il n'y a aucune cause de diversité ou de dissemblance, la chose est jugée comme semblable
  - etc.

Sabine Rommevaux

Le traité s'ouvre sur vingt-quatre définitions et sur dix *suppositiones*. Les définitions présentent des termes : continu, indivisible, corps, surface, ligne, point, temps, degré de mouvement, commencement et fin d'un mouvement, infini, etc.

Les suppositions sont des proositions, conçues comme des prémisses délimitant le cadre dans lequel a lieu la discussion. La première : « Toute chose plus grande qu'une chose donnée peut être divisée en une chose égale à la chose donnée et en la différence selon laquelle la chose plus grande excède la chose donnée ». Comme la première, la plupart des suppositions présentent des propriétés sur les grandeurs, le fini, les mouvements, etc. D'autres suppositions proposent des sentences plus générales. Ainsi la supposition 3 demande que « Là où il n'y a aucune cause de diversité ou de dissemblance, la chose est jugée comme semblable ». Cette supposition joue un rôle central dans le traité puisqu'elle permet d'étendre un résultat démontré pour un type particulier de continu, par exemple une ligne, ou un liquide, à tous les continus qu'ils soient physiques ou mathématiques. Cette supposition implique en particulier que le temps ne peut pas être composé d'instants disjoints, alors que la ligne mathématique serait composée de parties indéfiniment divisibles.

« Ces prémisses étant posées, suivent des conclusions démontrées dans l'ordre », comme le dit Bradwardine.

Le *De continuo* de Thomas Bradwardine

- 151 propositions :
  - 1 à 34 : présentation du cadre théorique de la discussions
  - 35 à 137 : réfutation des différentes hypothèses selon lesquelles le continu serait formé d'atomes en nombre fini ou infini
  - 146 à 150 : mode d'existence des atomes
  - 151 : conclusion

Sabine Rommevaux

Ces 151 propositions ou conclusions peuvent être divisées en plusieurs parties.
Dans une première partie, 34 conclusions présentent les propriétés du continu ou de certaines notions fondamentales, comme celle de superposition. Cette première partie permet à Thomas Bradwardine de mettre en place le cadre théorique dans lequel il se place.
Ensuite, Thomas Bradwardine s'attaque aux différentes positions atomistes. Dans les conclusions 35 à 137, il réfute les différentes hypothèses selon lesquelles le continu serait formé d'atomes en nombre fini ou infini
. Enfin, dans les conclusions 146 à 150, il pose la question du mode d'existence des atomes (est-ce que les atomes sont des entités séparées du continu qu'ils composent ?), avant de conclure.
Les réfutations des différentes positions atomistes se présentent sous la forme de propositions dont les énoncés commencent par la formule « S'il en est ainsi » (*Si sic*), c'est-à-dire, si le continu est formé d'atomes, etc,. Thomas Bradwardine montre que ces hypothèses conduisent à des conclusions qui sont soit incompatibles avec les propositions 1 à 34, soit sont en contradiction avec d'autres conclusions que l'on peut déduire de la même hypothèse atomiste (il pointe alors des contradictions internes à la théorie), soit en désaccord avec des résultats communément admis en géométrie, en arithmétique, en musique, en théorie du mouvement, en médecine, etc.
Nous allons voir à quoi ressemble une de ces conclusions, ou plutôt un de ses corollaires.

Le *De continuo* de Thomas Bradwardine

- Proposition 57 : Si le continu est composé d'un nombre fini d'atomes, un continu se rapporte à un autre comme le nombre de ses atomes se rapporte au nombre d'atomes de l'autre.
- Corollaire : si un continu est incommensurable à un autre, un nombre peut être incommensurable à un autre nombre.

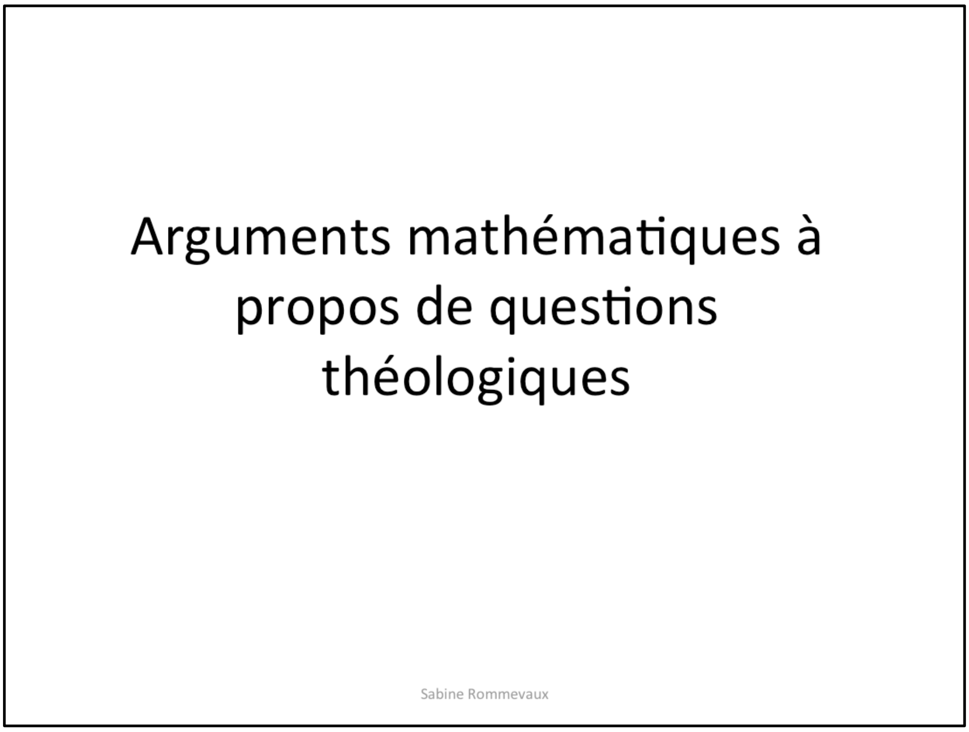
Sabine Rommevaux

Le corollaire se déduit immédiatement de la proposition.
La proposition nous dit que si un continu est formé d'atomes en nombre fini, prenons par exemple deux lignes, l'une composé de 7 atomes, l'autre de 5, alors le rapport entre ces lignes sera comme de 7 à 5.
Et donc, si un continu est incommensurable à un autre, et Bradwardine a en tête la diagonale d'un carré qui est incommensurable au côté, alors ces continus sont composés d'atomes en nombres finis et donc on aurait deux nombres entiers qui seraient incommensurables, ce qui est absurde.
Voici comment Bradwardine réfute le corollaire.

- Dans le corollaire, la vérité de l'antécédent est claire. De même, la fausseté du conséquent est claire, puisque tous les nombres ont la même commune mesure, à savoir l'unité indivise.

Sabine Rommevaux

Dans le corollaire, la vérité de l'antécédent est claire. [il a parlé précédent de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un même carré, ainsi il existe bien un continu incommensurable à un autre continu]. De même, la fausseté du conséquent est claire, puisque tous les nombres ont la même commune mesure, à savoir l'unité indivise.
On voit apparaître les notions d'antécédent et de conséquent. Le corollaire est de la forme si P, alors Q ; P est l'antécédent et Q le conséquent. Selon la théorie des conséquences très répandue au XIV^e siècle, il est impossible que P soit vraie en même temps que Q est fausse. Donc la conséquence est fausse.
On retrouve ce vocabulaire de la logique propositionnelle dans de nombreux traités de cette époque.



Cet exemple m'amène à mon dernier point qui est celui des développements mathématiques suscités par des questions théologiques.
En effet, la question de composition du continu à partir d'atome a d'abord été posée à propos d'une question posée dans un cadre théologique, celui du mouvement des anges.
Dans la pensée médiévale, les anges ne relèvent pas d'un quelconque curiosité exotique, ni uniquement de considérations théologiques ou religieuses.
L'étude des anges fourni des moyens conceptuels pour répondre à plusieurs questions proprement philosophique, par exemple la question de l'individualité (comme distinguer un ange d'un autre ?), la question du langage (comment les anges communiquent-ils entre eux ou avec nous). A leur sujet se pose aussi la question de leur lieu (c'est la fameuse question : combien y a-t-il d'anges sur la pointe d'une aiguille ?) et de leur mouvement. L'ange étant une substance immatérielle, comment peut-il être dans un lieu, le lieu étant défini par Aristote comme la surface du corps enveloppant. L'ange n'étant pas un corps, comme définir le corps qui l'enveloppe ? De même comment définir son mouvement ?
Ces questions, on les trouve dans des commentaires aux *Sentences* de Pierre Lombard.

Les *Sentences* de Pierre Lombard

- Pierre Lombard (mort en 1164)
- 4 livres :
  - Dieu, la fin de l'homme
  - Les créatures : anges et homme
  - Le Christ, unique médiateur entre les créatures et leur fin
  - les sacrements
- Jean Duns Scot (mort en 1308)

Sabine Rommevaux

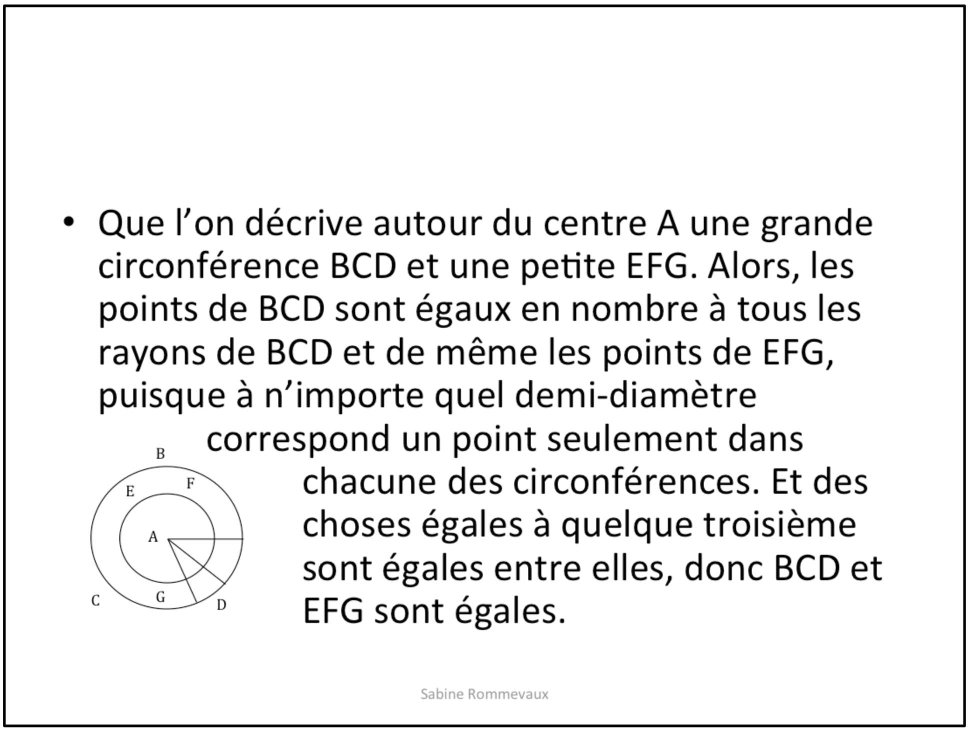
Pierre Lombard, italien, fit ses études à Bologne, Reims puis Paris. Il enseigna la théologie et devint célèbre pour son enseignement. Il termine sa carrière ecclésiastique comme évêque à Paris, durant quelques mois à peine avant de mourir. Son œuvre majeure est *Le livre des sentences*, qui devint progressivement un manuel d'enseignement de la théologie dans toutes les universités européennes. Il est officiellement approuvé par le concile de Latran en 1215. Après 8 ans d'études à la faculté des arts, l'étudiant qui souhaitait entrer dans la corporation des théologien, devait passer deux ans à étudier la Bible puis encore deux ans à commenter les *Sentences* de Pierre Lombard. On a ainsi de très nombreux commentaires des *Sentences*.
Ce traité est composé de 4 livres dont le second est consacré aux créatures, les anges et l'homme.
C'est donc dans le commentaire où livre II que l 'on trouve parfois des considérations sur le mouvement des anges.
C'est le cas chez Duns Scot. Né en Ecosse, Scot étudie à Oxford vers 1291-1291 et commente les *Sentences* vers 1300. A partir de 1302, il enseigne à l'université de Paris. On l'appelait le Docteur Subtil. Son œuvre philosophique et théologique est immense. Il faisait parti de l'ordre des franciscain dont l'intérêt pour les mathématiques à cette époque est connu, notamment en raison de l'influence de Roger Bacon pour qui tout théologien doit connaître les mathématiques. Ainsi Dun Scot introduit des *rationes mathematice*, aussi bien dans ses ouvrages de philosophie

Le commentaire de Scot aux Sentence de Lombard

- Est-ce que l'ange peut se mouvoir d'un lieu à un autre par un mouvement continu ?

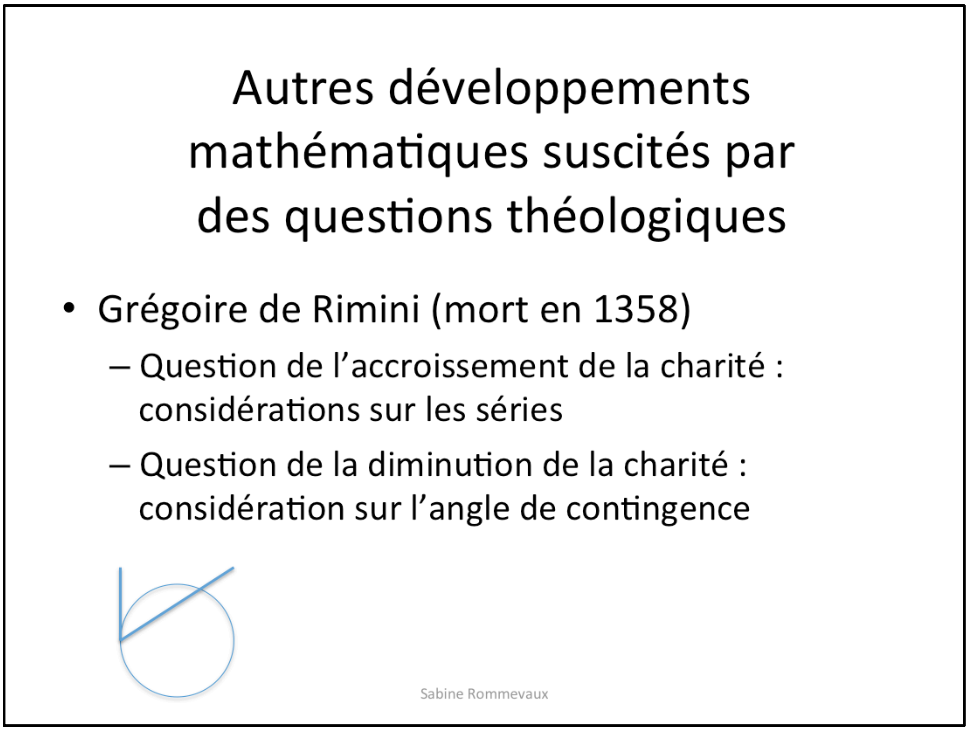
Sabine Rommevaux

Dans un de ses commentaires aux *Sentences* (il en a écrit trois), il se pose la question suivante : « est-ce que l'ange peut se mouvoir d'un lieu à un autre par un mouvement continu ? ».
L'argumentation très longue porte sur la continuité et la succession. L'un des argument fait l'hypothèse que l'ange ne peut pas se mouvoir successivement car aucun continu n'est successif. C'est alors qu'intervient la question de la composition du continu en atomes (ou indivisibles).
L'ange peut être assimilé à un point, et donc la question de son mouvement revient à la question de l'engendrement d'une ligne pas le mouvement d'un point, ou de la division d'un continu en atomes.



Scot introduit alors des *rationes mathematice.* Il veut montrer qu'un continu n'est pas composé d'atomes. Parmi les arguments mathématiques qu'il utilise, on a l'argument de la diagonale et du côté du carré, que nous venons de voir chez Bradwardine. On a un autre argument, que l'on retrouve aussi chez Bradwardine : tous les cercles seraient égaux. En effet, si l'on considère deux cercles BCD et EFG de même centre A, et que l'on tire de A les, il y a autant de rayons qu'il a de points sur le premier cercle et sur le second. Donc les deux cercles ont le même nombre de points.

La question de la composition du continu à partir d'atomes va être très discutée suite à ce premier commentaire de Dun Scot.
Certains, qui soutiennent l'hypothèse d'un continu composé d'atomes, vont rejeter l'utilisation de ces arguments mathématiques, qu'ils considèrent inadéquat pour résoudre des questions physiques ou philosophique (Henry de Harclay notamment).



D'autres questions théologiques vont susciter des développements mathématiques, parfois importants.

Grégoire de Rimini a enseigné en Italie mais aussi à Paris. Son commentaire des Sentences lui a valu le titre de Docteur authentique.
Grégoire n'est pas avare de développement mathématiques et physique dans son commentaire. Ainsi lorsqu'il se demande si la charité peut augmenter indéfiniment, il introduit des considérations sur les séries numériques infinies, qui peuvent être convergentes ou non. Et pour la question symétrique de la diminution de la charité, il considère l'exemple de l'angle de contingence, c'est-à-dire l'angle que fait le cercle avec une de ses tangentes, angle plus petit que tout angle rectiligne donné. C'est donc un exemple d'infiniment petit.
Et lui aussi revient sur la question du mouvement des anges en introduisant 9 *rationes mathematice*.