Multiples et diviseurs : un problème ouvert

Maryvonne Le Berre, IREM de Lyon

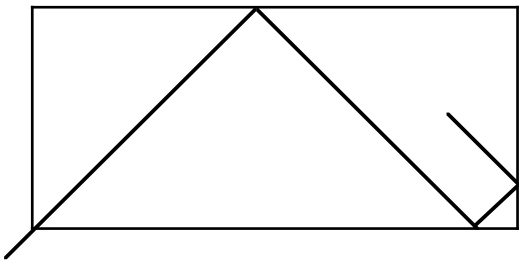
I Introduction

La disparition de l'arithmétique des programmes pendant ces dernières années a pu faire oublier un problème ouvert qui met en jeu les notions de multiples, diviseur, pgcd et ppcm. Il peut être proposé en réinvestissement ou permettre d'introduire les notions au programme : nombres premiers entre eux et pgcd. C'est ce dernier choix que j'ai fait, dans une classe de troisième de niveau faible mais coopérative.

II Le problème

Voici d'abord l'énoncé tel qu'il a été proposé aux élèves :

Un billard un peu spécial



A chacun des sommets d'un billard rectangulaire, une ouverture permet d'envoyer un rayon lumineux qui se réfléchit sur les côtés du rectangle.

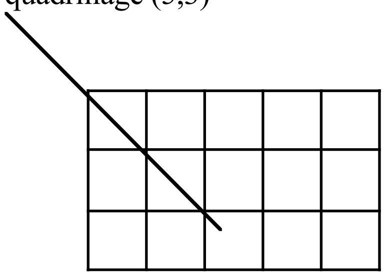
On se donne deux conditions supplémentaires :

1 Le billard peut être quadrillé de façon régulière

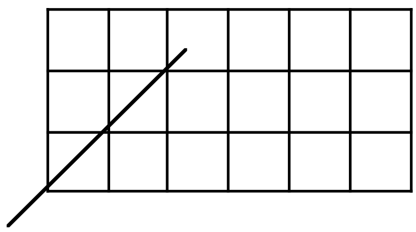
2 On envoie le rayon de lumière suivant la diagonale d'un carré du quadrillage. Il se réfléchit donc de la même façon. Sa trajectoire suit toujours les diagonales du quadrillage.

Exemples :

quadrillage (5,3)



quadrillage (6,3)

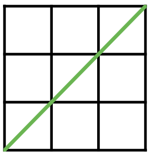


Pour chaque exemple :
- dessiner la trajectoire de la lumière
- combien le rayon traverse-t-il de carrés du quadrillage avant de sortir ?

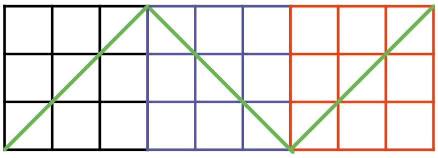
Connaissant les dimensions (m,n) du quadrillage, peut-on prévoir le nombre de carrés traversés par le rayon lumineux ?

III Première solution

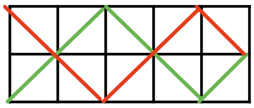
Observons d'abord quelques cas.
Dimensions (3,3) : Le rayon suit la diagonale d'un carré. 3 carreaux sont traversés.



Dimensions (9,3) : Le rayon suit la diagonale de trois carrés (3,3) successifs. 9 carreaux sont traversés.

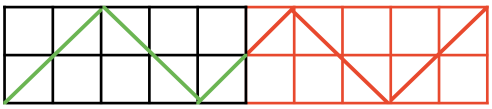


Dimensions (5,2) : Le rayon traverse deux carrés (2,2) , puis rebondit. Les 10 carreaux sont traversés.



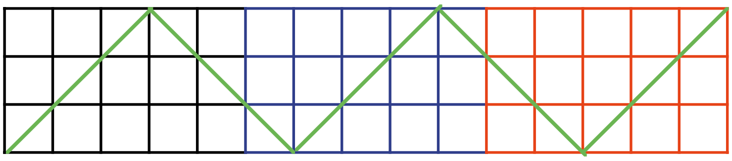
Deux conjectures sont rapidement posées :
Si m est multiple de n, le nombre de carreaux traversés est m.
Si m et n sont premiers entre eux, le nombre de carreaux traversés est mn.

Observons de plus près le troisième cas. On peut "déplier" la trajectoire, en dessinant sa deuxième partie symétriquement sur un rectangle identique au premier :



Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (2,2)

Dimensions (5,3) : Pour "déplier" la trajectoire, il faut cette fois ajouter deux rectangles , de façon à ce que la longueur totale soit un multiple de 3.



Tout se passe comme si le rayon avait traversé 5 carrés (3,3)

Dimensions (4,7)
Pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (4,4) on a besoin de 7 rectangles, de façon à ce que la longueur totale soit un multiple de 4.

Dimensions (m,n)

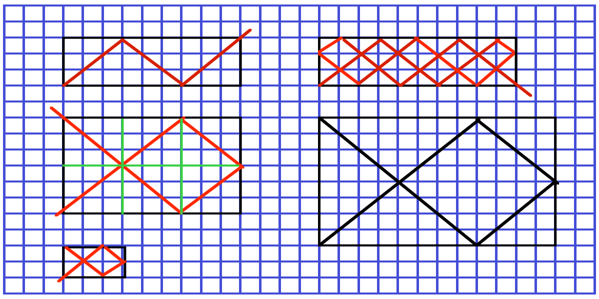
On suppose que m>n

La longueur du grand rectangle obtenu est un multiple de m. De plus, pour "déplier" la trajectoire sur une suite de carrés (n,n), il faut une longueur totale qui soit un multiple de n. D'où la conclusion :

Si m et n sont premiers entre eux, le premier multiple de n que l'on peut atteindre est le produit mn. Dans le cas général, c'est le plus petit multiple commun de m et n.

Cette solution ne suffit pas à cerner la richesse du problème. De multiples approches sont possibles. En particulier, ce problème est étroitement relié à celui du pavage d'un rectangle par des carrés identiques, comme nous allons le voir maintenant.

IV Une autre approche



Trois dessins sont semblables : le plus petit en donne le prototype : il correspond au cas où les dimensions m et n sont des nombres premiers entre eux.

La similitude de ces trois dessins amène à la conjecture :

Si m et n sont multipliés (resp divisés) par un même nombre, le nombre de carrés traversés est multiplié (resp divisé) par ce nombre.

et à l'idée que l'on peut établir une formule générale en se ramenant au cas où m et n sont premiers entre eux.

C'est là que l'on retrouve le problème du pavage d'un rectangle par des carrés. En effet, si une figure peut être réduite, c'est que le rectangle peut être pavé par des carrés plus grands que ceux du quadrillage initial, et le coefficient de réduction maximal n'est autre que le pgcd de m et n.

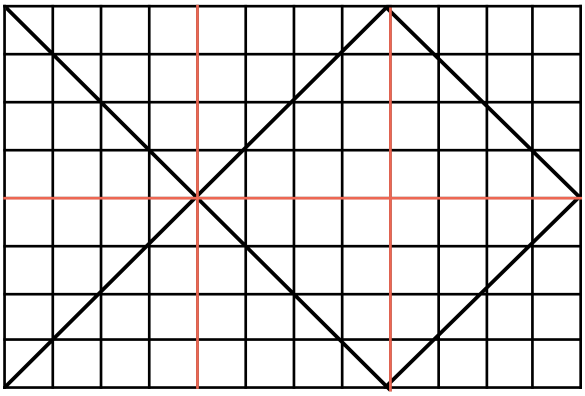
La réponse au problème se présente alors sous la forme : $\dfrac{\mathbf{m \times n}}{\mathbf{pgcd(m;n)}}$

Cette réponse peut être justifiée en prenant appui sur le résultat :

Si m et n sont premiers entre eux, le nombre de carrés traversés est mn.

La synthèse qui suit est telle qu'elle a été présentée aux élèves pour conclure le problème.

Dimensions (8,12)

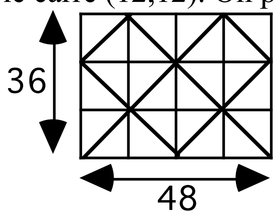


8 et 12 ont des diviseurs communs : 1,2,4. On peut donc paver le rectangle avec des carrés plus grands : (2,2) ou (4,4).
4 est le pgcd de 8 et 12. C'est la dimension du plus grand carré avec lequel on peut paver le rectangle.

Choisissons le plus grand pavage.
Il comporte 3 carrés (4,4) sur la longueur et 2 carrés (4,4) sur la largeur.
3 et 2 sont premiers entre eux. Il y a donc 6 carrés (4,4) traversés.
Comme chacun de ces carrés est traversé en diagonale, il y a donc 6x4 petits carrés traversés.

Dimensions (48,36)

Le pgcd de 48 et 36 est 12. Le plus grand carré avec lequel on peut paver le rectangle est le carré (12,12). On peut donc travailler sur le schéma suivant :



où chaque carré tracé représente un carré (12,12)

Sur la longueur, on a 4 de ces carrés $4 = \dfrac{48}{\text{pgcd}(48;36)}$

Sur la largeur, on a 3 de ces carrés $3 = \dfrac{36}{\text{pgcd}(48;36)}$

4 et 3 sont premiers entre eux donc le nombre de carrés (12, 12) traversés est 4x3, soit $\dfrac{48}{\text{pgcd}(48;36)} \text{x} \dfrac{36}{\text{pgcd}(48;36)}$

D'où la formule qui nous donne le nombre de petits carrés traversés sur le quadrillage initial :

$$\frac{48}{\text{pgcd}(48;36)} \text{x} \frac{36}{\text{pgcd}(48;36)} \text{ x pgcd}(48;36) = \mathbf{\frac{48 \times 36}{pgcd(48;36)}}$$

V Expérimentation en classe

Aucun travail sur les notions en jeu n'a précédé la recherche. Les apports nécessaires ont été faits au fur et à mesure des besoins.

Première séance : Conjectures et contre-exemples
La première séance a duré environ 1,5h. Il a fallu une demi-heure à la plupart des élèves pour entrer dans le problème et effectuer leurs premiers tracés.
La recherche a ensuite démarré par petits groupes, et des conjectures ont été très vite proposées.

> *Si m =n, le nombre de carrés traversés est la dimension du carré*
> *Si m et n sont impairs, le résultat est le produit des deux (parfois : l'aire du rectangle)*
> *Si m est le double de n , le résultat est n.*
> *Si m et n sont pairs, le résultat est le produit des deux divisé par 2.*

Je constate fréquemment des lacunes de vocabulaire. Le mot "diviseur" semble inconnu, beaucoup disent indifféremment : 3 est multiple de 9 ou 9 est multiple de 3. Pour certains, c'est une simple difficulté "grammaticale", pour d'autres, c'est plus grave : ils ne voient pas l'utilité de disposer de deux mots pour ce qui leur semble être une seule situation (un nombre égal au produit de deux autres).

La plupart des groupes cherchent une formule qui permette de calculer le nombre de carrés traversés à partir de m et n. D'autres essaient de classer les différents cas possibles pour m et n.
J'interviens essentiellement en proposant des contre-exemples pour déstabiliser les conjectures basées sur la parité, qui sont dominantes.
En fin d'heure je ramasse quelques travaux bien présentés pour préparer la synthèse du lendemain.

Deuxième séance : mise en commun des conjectures
Deux groupes présentent leurs résultats à l'aide de transparents (voir annexe), les autres complètent en venant écrire d'autres conjectures au tableau (dont une fausse).
Il ressort de la mise en commun que les cas particuliers : m et n premiers entre eux et m multiple de n sont bien identifiés ainsi que le résultat :
si m et n sont multipliés ou divisés par un même nombre, le "résultat" est lui aussi multiplié ou divisé par ce nombre.
La notion de nombres premiers entre eux est apparue sous la forme : "nombres qui n'ont pas de diviseur ".
Avant de relancer la recherche, je distribue une fiche portant les définitions multiple, diviseur, nombres premiers entre eux, lue en commun et collée dans le cahier.
La recherche reprend ensuite par groupes, avec une consigne plus précise : peut-on trouver une formule générale ?
Les élèves sont avertis qu'ils auront à rédiger en DM un compte-rendu de leur recherche.

Troisième séance : Leçon sur le pgcd et exercices

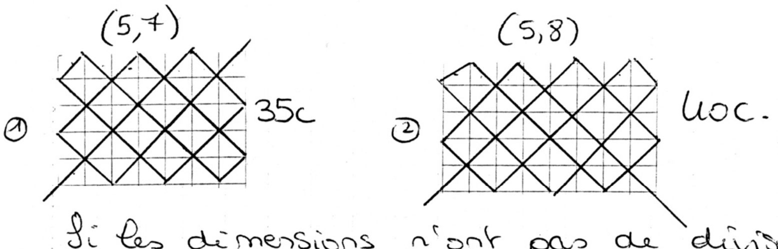
Quatrième séance : bilan des compte-rendus écrits et solution du problème
Les compte-rendus des élèves témoignent d'avancées inégales. Quelques conjectures fausses (toujours basées sur la classification pair-impair) sont encore avancées sur la

base de quelques exemples. La conjecture la plus fréquemment proposée est qu'il faut diviser le produit des deux nombres par leur diviseur commun. Une seule élève mentionne que cette formule n'est valable que quand il y a un seul diviseur (sous-entendu différent de 1)
Sans qu'ils s'appuient nécessairement sur des considérations géométriques, les élèves ont tous orienté leur recherche vers la modification de la formule mn : par quoi diviser mn pour avoir le résultat quand m et n ne sont pas premiers entre eux ?

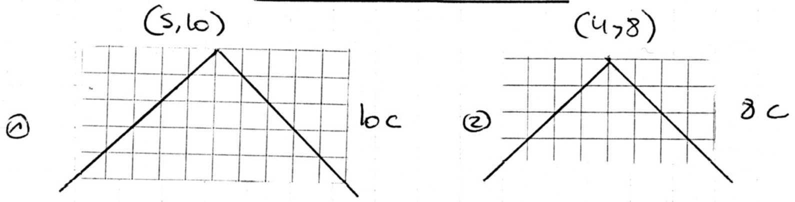
En guise de "corrigé" de leur DM, je propose aux élèves une synthèse de leurs travaux et la solution du problème (voir III) , à partir de deux transparents.

VI Bilan de l'expérimentation
Les objectifs de contenus ont été facilement atteints. Il restait ensuite à traiter la question du calcul du pgcd !
Comme tout problème ouvert, celui-ci est évidemment coûteux en temps. Cependant, je regrette d'avoir un peu trop resserré les délais (en raison de l'approche de congés d'ailleurs). Il aurait fallu une séance de plus pour permettre à un nombre significatif d'élèves d'arriver à une formulation correcte du résultat. En effet, les limites des essais effectués tiennent à la taille des nombres utilisés pour les tracés. Après la mise en commun des conjectures, un travail systématique de tous les groupes sur des cas comme (24 ; 36), (45 ; 30) aurait été profitable.
Les points positifs sont l'investissement des élèves, qui ont pu travailler chacun à son niveau, le travail de formulation de relations entre les nombres et surtout la mise en cause convaincante et répétée des généralisations hâtives.

Annexe
Exemples de travaux d'élèves.



Si les dimensions n'ont pas de diviseur commun alors le nombre de carreaux est égal aux produits des deux dimensions



Si l'une des dimensions est le double de l'autre alors le nombre de carré sera égal à la plus grande dimension.