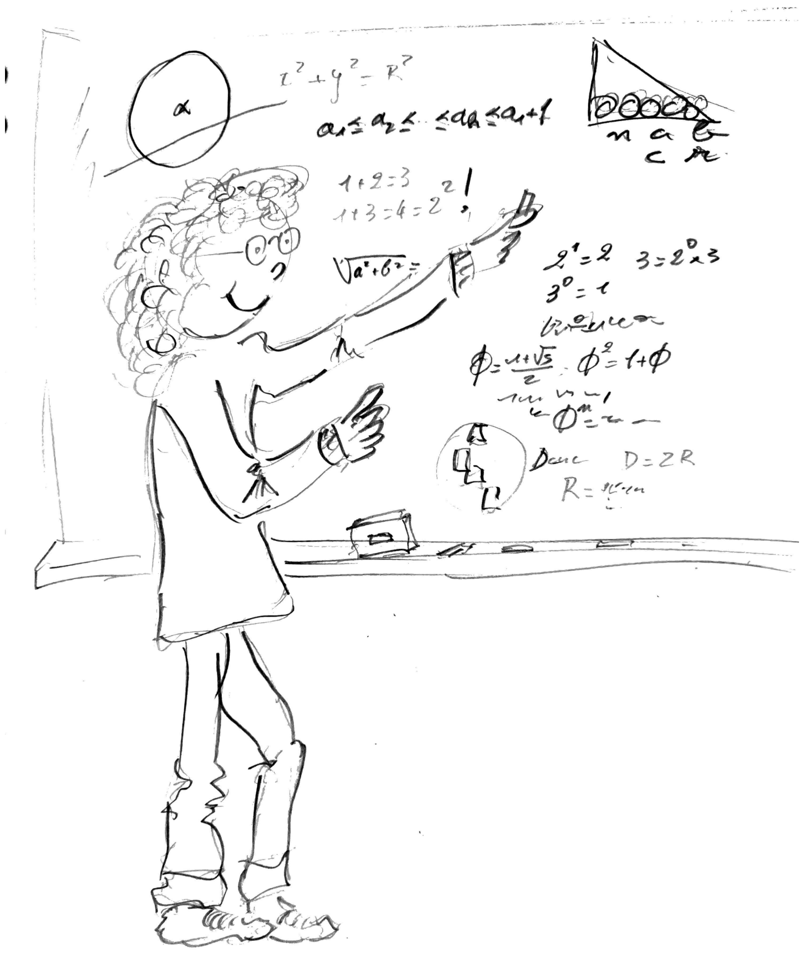
Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon de 2021 à 2025

Gilles Aldon



Remerciements

Merci à toute l'équipe DREAM de l'IREM de Lyon, Stéphanie Croquelois, Miriam Di Francia, Mathias Front, Marie-Line Gardes, Didier Krieger, Faustine Leclerc, Jade Offredi pour le support et les relectures ; un merci particulier à Antoine Guise qui a traqué les imprécisions et les raisonnements approximatifs dans les solutions des problèmes ! Mais plus généralement, merci pour toutes les discussions, les controverses, les apartés toujours constructives, les réflexions mathématiques, philosophiques, didactiques et le partage d'idées qui animent le groupe depuis sa création en 2006 ; il est l'exact modèle d'un groupe de recherche collaborative dans lequel les regards des enseignants, des chercheurs, des formateurs éclairent sous toutes leurs faces les objets mis au travail et où chacun apprend des autres. Merci enfin pour le plaisir que l'on a tous de se retrouver dans les sous-sols de l'Université pour des après-midi vivantes et constructives !

Un grand merci également à Dominique Bernard, Luiz Farias, Yves Guichard, Sophie Roubin et Delphine Therez qui ont bien voulu m'accompagner dans le projet du Rallye pour tous proposé dans le cadre de la Fête de la Science 2025 à l'occasion des 20 ans du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon. C'est aussi une occasion pour rappeler que l'équipe du Rallye avec l'association RMAL (https://rallye-math.univ-lyon1.fr/lassociation-rmal/) effectue tout au long de l'année un énorme travail de conception, de réalisation et d'animation d'un événement qui a concerné depuis sa création 408 840 élèves de l'Académie et qui est attendu chaque année comme un moment de fête des mathématiques.

Merci enfin à l'IREM de Lyon et aux IA-IPR de mathématiques de l'Académie pour préserver ce cadre essentiel de formations et de réflexions qui permet à des enseignants de mathématiques de réflechir sur leur métier, sur leur enseignement et sur les apprentissages de leurs élèves en partageant avec leurs pairs et avec des enseignants-chercheurs tous les doutes, les questions, les difficultés et les réussites qui émanent de leur pratique professionnelle.

Table des matières

Introduction

Le Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon fête en 2025 ses 20 ans d'existence. Le numéro 2 de la Feuille à problèmes annonçait sous la plume de Denise Courbon (IA-IPR de l'Académie de Lyon) le premier Rallye de l'Académie :
« Ce numéro accompagne le lancement d'un rallye mathématique pour les élèves de troisième et de seconde de l'académie, organisé conjointement par les IPR, la régionale de l'APMEP et l'IREM. Qui dit rallye dit participation par classes, travail collectif, et donc souci de favoriser l'esprit de coopération, d'organisation, de communication entre élèves. » (https://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille2/fpb2.htm)
L'épreuve « Problème ouvert » du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon existe, elle, depuis 2011, vingt ans après la publication de « Problème ouvert et situation problème » de Gilbert Arsac, Gilles Germain et Michel Mante [Arsac *et al.*, 1991]. La tradition est robuste à l'IREM de Lyon ! Elle s'appuie sur des travaux des groupes de recherche qui n'ont pas cessé depuis 1991 de travailler sur le rôle des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. De nombreuses expériences ont eu lieu, dans ces vingt années, tant au collège, qu'à l'école élémentaire et au lycée, concernant la mise en œuvre de problèmes de recherche en mathématiques dans différents contextes. Ces expérimentations montrent clairement les apports en termes d'apprentissage de la démarche scientifique : développement d'heuristiques, élaboration de conjectures, mobilisation d'outils de contrôle et de validation etc. Mais elles montrent aussi qu'en cherchant à résoudre des problèmes, les élèves apprennent des mathématiques : ils mobilisent des connaissances, les confrontent avec des connaissances déjà acquises, les organisent et parfois découvrent et apprennent de nouvelles notions. Les expérimentations montrent aussi la possibilité d'insérer des situations de ce type en classe, pas seulement pour ouvrir une parenthèse sympathique mais véritablement pour fonder son enseignement. Pour autant, malgré un certain nombre de recommandations institutionnelles, la pratique de situations de recherche en classe ne s'est pas généralisée. Les concepteurs des programmes de mathématiques depuis longtemps mettent l'accent sur la résolution de problèmes, comme étant « [...] au cœur de l'activité mathématique ».
Nous ([Durand-Guerrier et Aldon, 2007]) avons fait l'hypothèse dès la création du groupe IREM EXPRIME [1] que, parmi les freins à ce développement, les points ci-dessous sont déterminants :

1. La part importante de la dimension expérimentale dans le travail de recherche rentre en conflit avec la représentation contemporaine dominante parmi les enseignants, et au delà dans la société, de ce que sont les mathématiques.
2. L'accent mis principalement dans l'approche des problèmes de recherche sur le développement de compétences transversales liées au raisonnement, en laissant au second plan les apprentissages sur les notions mathématiques en jeu, est en opposition avec les contraintes institutionnelles qui pèsent sur les professeurs, en particulier en ce qui concerne l'avancement dans le programme.

1. EXpérimenter des PRoblèmes Innovants en Mathématiques à l'Ecole

3. Les difficultés pour le professeur de repérer ce qui relève des mathématiques dans l'activité des élèves, et par suite de choisir ce que l'on peut institutionnaliser, à l'issue du travail en lien avec les programmes de la classe.
4. Les difficultés rencontrées par les professeurs pour évaluer ce type de travail, compte tenu de ce que les modes d'évaluation habituels ne sont pas appropriés.

L'équipe EXPRIME, puis l'équipe DREAM (Démarches de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) ont poursuivi les recherches pour mettre en évidence les apports pour l'apprentissage des mathématiques de la recherche de problèmes.
En parallèle, chaque année depuis vingt ans, le Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon a proposé des épreuves permettant aux classes de collaborer pour résoudre les problèmes proposés dans un temps limité. L'épreuve du problème ouvert a voulu ajouter à cette fête des mathématiques dans la classe la mise en œuvre d'une recherche plus approfondie et plus ouverte à partir de situations mathématiques originales. Les formateurs de l'IREM de Lyon ont également proposé des stages de formation pour intégrer dans la classe des problèmes de recherche ou pour s'appuyer sur les épreuves du Rallye pour proposer une approche différente des concepts mathématiques. On peut lire à ce propos le livre publié par Canopée et l'IREM de Lyon : « Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux » [Aldon, 2018] un chapitre consacré à l'utilisation des épreuves de Rallye dans le cours de mathématiques [Therez et Therez, 2018].

Fondements épistémologiques

Aborder les mathématiques par l'intermédiaire de problèmes n'est pas nouveau ; à partir du moment où la recherche d'une solution passe par la mise en œuvre d'expériences sur des objets, matériels ou conceptuels, les mathématiques sont présentes dans leurs dimensions logique, déductive et créatrice. Utiliser ces recherches dans l'enseignement a toujours été mis en avant comme en atteste, par exemple, la philosophie de Dewey lorsqu'il écrit :

> « I take it that the fundamental unity of the newer philosophy is found in the idea that there is an intimate and necessary relation between the processes of actual experience and education. »,
> [Dewey, 1938] (page 20) [2]

Mais c'est certainement dans l'histoire et l'épistémologie que nous pouvons juger de l'importance des problèmes dans le développement même des mathématiques. De tout temps, les mathématiques ont été jalonnées par des problèmes qui ont donné lieu à des constructions théoriques nouvelles. Or, ces problèmes sont parfois oubliés pour ne retenir que les concepts qu'ils ont permis de créer. Dans ses « *Elemens de géométrie* », [Clairaut, 1741] introduit la table des matières par ces mots :

> « Des moyens qu'il étoit le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des terrains » (page 1)

Et, il poursuit, dans la préface, pour inciter à commencer à résoudre des problèmes dont les solutions débouchent sur des définitions et propriétés permettant de stabiliser les concepts :

> « J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devoit s'être formée par degrés ; que c'étoit vraisemblablement quelque besoin qui avoir fait faire les premiers pas, & que ces premiers pas ne pouvoient pas être hors de portée des Commençans, puisque c'étoient les Commençans qui les avoient faits.[...] La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avoir de plus propre à faire naître les premières propositions de Géométrie. » (page III-IV)

2. Je pense que l'unité fondamentale de la nouvelle philosophie se trouve dans l'idée qu'il existe une relation intime et nécessaire entre les processus de l'expérience réelle et l'éducation. Traduit par nous.

Ainsi, Clairaut fait précéder l'introduction de nouvelles définitions et concepts de problèmes que le « commençant » peut légitimement se poser. Cette réflexion se poursuit dans le regard que portent les philosophes sur la construction personnelle des mathématiques.
Selon [Longo, 2020] cette construction personnelle des mathématiques résulte de la manipulation d'un triptyque « abstraction - symbolisme - logique », qui constitue le fondement des mathématiques, ce qui amène à considérer les trois aspects de cette construction personnelle :

1. la construction d'une signification de la manipulation de l'abstrait, à la frontière de l'expérience des phénomènes et du monde des idées,
2. la manipulation des symboles, c'est-à-dire la construction de la compréhension de la syntaxe mathématique dans ses différentes représentations sémiotiques et,
3. la manipulation de la logique en tenant compte à la fois de la logique formelle des mathématiques, mais aussi de la logique intrinsèque à l'expérience :

   « L'activité mathématique est une activité expérimentale, autrement dit un système d'actes légalisés par des règles et soumis à des conditions qui en sont indépendantes » [Petitot, 1987]

Dans le processus de résolution de problème, il s'agit à un moment de sortir de la construction mathématique existante pour en extraire un moment problématique qui provoque une reconstruction de la pensée mathématique. Bachelard parlait d'acte épistémologique que [Maronne et Patras, 2022] définissent ainsi :

> « Par 'acte épistémologique', nous entendons tout acte qui remet en cause des principes logiques, ontologiques, ou sémantiques pour penser la nature des objets mathématiques au-delà des systèmes dans lesquels leurs définitions et leur étude se sont cristallisées. » (page 64)

La résolution d'un problème apparaît alors comme la recherche d'une remise en cause d'une construction partielle permettant de prolonger ou d'ouvrir la compréhension des concepts en jeu.
Nous entendons ainsi par « problème » des situations mathématiques pour lesquelles les connaissances des sujets sont suffisantes pour aborder le problème mais insuffisantes pour dérouler facilement une solution en référence au discours de Hilbert à Paris en 1900 :

> « Moreover a mathematical problem should be difficult in order to entice us, yet not completely inaccessible, lest it mock at our efforts. It should be to us a guide post on the mazy paths to hidden truths, and ultimately a reminder of our pleasure in the successful solution. »
> [Hilbert, 1900] (page 438) [3]

Fondements didactiques

Ces considérations épistémologiques nous ont amenés à retenir un cadre d'observation et d'analyse dans les classes. D'un point de vue cognitif, le cadre des Situations Didactiques [Brousseau, 1986] permet d'appréhender les apprentissages des élèves confrontés à une situation a-didactique :

3. De plus, un problème mathématique doit être difficile pour nous intéresser, mais pas complètement inaccessible, afin de ne pas ridiculiser nos efforts. Il doit nous servir de guide sur les chemins tortueux qui mènent à des vérités cachées et, en fin de compte, nous rappeler le plaisir que nous éprouvons lorsque nous parvenons à le résoudre.

> « Ces problèmes, choisis pour que l'élève puisse les accepter, doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur de connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire, sans faire appel à des raisons didactiques » (Ibid. page 303).

C'est sur cette base didactique, alimentée en particulier par les thèses de [Gardes, 2013] et de [Front, 2015], que les équipes de l'IREM de Lyon ont proposé des Situations Didactiques de Recherche de Problèmes dans lesquelles la responsabilité de la recherche est dévolue aux élèves. Ainsi, comme les problèmes de mathématiques combinent des dimensions syntaxique, épistémologiques et ontologiques, les situations didactiques de recherche de problème ajoutent une dimension didactique à ces trois dimensions :

- syntaxique : instanciation, énoncé, question,. . .
- épistémologique : dimension expérimentale, logique et rigueur,
- ontologique : problème abordable, robuste mais dans un domaine familier,
- didactique : démarches de recherche multiples, dialectique connaissance/heuristique, résultats partiels accessibles.

Dans cet esprit, les problèmes du Rallye, ajoute une dimension collaborative en organisant une réflexion collective dans la classe, comme en témoignent, bien sûr les épreuves en temps limité, mais aussi les nombreux comptes rendus collectifs des problèmes ouverts.

Contenu

Cette brochure reprend les énoncés des épreuves de problème ouvert [4] de 2021 jusqu'à 2025. Pour chacun des problèmes, nous proposons une petite exploration mathématique puis quelques comptes rendus des travaux réalisés par les élèves qui peuvent donner des pistes pour utiliser en classe ces problèmes.

4. Le terme « problème ouvert » représente ici un problème d'énoncé court qui ne contient aucune indication de méthode de résolution mais pour lequel les élèves peuvent, à partir de leurs connaissances, trouver des premiers résultats. Ce terme est expliqué plus précisément et replacé dans son contexte historique page 55.

Chapitre 1

2021

1.1 Introduction

Le problème ouvert de 2021 trouve son origine dans les réactions que les élèves peuvent avoir lors de la recherche du problème des nombres trapézoïdaux ; il s'agit, dans ce problème, de trouver tous les nombres entiers naturels qui sont somme d'au moins deux entiers naturels [1]. Trouver la solution de ce problème implique donc de caractériser les nombres trapézoïdaux. Or souvent, les premières recherches des élèves les conduisent à constater que les nombres impairs sont trapézoïdaux, puisque si on considère deux nombres successifs, leur somme est impaire ; la réciproque n'est pas aussi naturelle et dire qu'un nombre impair $2n+1$ peut s'écrire comme la somme des deux nombres consécutifs n et $n+1$ n'est pas souvent spontanément traité ; à ce stade, les élèves souvent pensent avoir trouvé la réponse au problème et que tous les nombres trapézoïdaux sont impairs. Le contre-exemple 6=1+2+3 déstabilise un peu cette conviction mais comme 2, 4, 8 ne sont pas trapézoïdaux, le seul contre-exemple de 6 apparaît plus comme une exception que comme une preuve de l'existence de (beaucoup) de nombres pairs trapézoïdaux. La caractérisation d'un ensemble (de nombres) est donc une connaissance à travailler ; et, en particulier, la nécessité de raisonner par condition nécessaire et suffisante. Ce problème, intéressant à plus d'un titre, amène à se poser toutes les questions de la caractérisation d'un ensemble. Pour les élèves qui commencent par des expériences numériques, l'impossibilité de trouver des entiers consécutifs dont la somme fait 2, 4, 8, puis 16 amène la conjecture, qui reste ensuite à démontrer, que l'ensemble des nombres trapézoïdaux est $\mathbb{N} \setminus \{2^k ; k \in \mathbb{N}^*\}$.

C'est donc cette idée de caractérisation d'un ensemble qui est à l'origine de ce problème ouvert. J'ai donc cherché des ensembles de nombres qui pourraient être candidats pour l'épreuve du problème ouvert. C'est ainsi que j'ai commencé à penser aux nombres de la forme $a + b \pm ab$ et cette seule question m'a paru intéressante pour les raisonnements que sa solution implique et suffisamment abordable pour que des élèves de troisième et de seconde puisse commencer à le chercher. Bien sûr, j'ai rapidement cherché une généralisation avec les carrés. Je ne connaissais pas les nombres de Lösch, mais après avoir cherché le problème et m'être aperçu que les élèves pourraient être capables de dire des choses en s'appuyant sur leurs connaissances du calcul littéral, j'ai regardé la littérature et je me suis aperçu que ces nombres, non seulement étaient connus, mais en plus ne venaient pas d'un problème de mathématiques mais d'une modélisation économique (voir page 15). Tous les ingrédients pour un problème ouvert du Rallye étaient présents !

1. Voir une étude de ce problème sur le site de DREAM : https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=1272

1.2 Énoncé

a et b sont deux entiers naturels non nuls.

1. Quels sont tous les nombres naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $a+b-ab$? Sous la forme $a+b+ab$?
2. On s'intéresse maintenant aux expressions de la forme $a^2+b^2+k\times ab$, k appartenant à $\mathbb{Z}$. Quels sont tous les nombres naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $a^2+b^2+k\times ab$
   (a) si $k=1$? $k=-1$?
   (b) et si k était égal à 0 ?
   (c) et si $k=2$? -2 ?
   (d) ...

1.3 Un peu de mathématiques

1.3.1 $a+b-ab$ et $a+b+ab$

Le cas $a+b-ab$

Comme a et b sont des entiers naturels non nuls, et que l'on cherche des nombres positifs, on doit nécessairement avoir $a+b\geq ab$ c'est-à-dire $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 1$; mais si a et b sont strictement supérieur à 2, c'est impossible, donc $a\in\{1,2\}$ ou $b\in\{1,2\}$;
Si $a=1$, $1+b-b=1$ quelque soit la valeur de b. et si $a=2$, $2+b-2b=2-b$ et b ne peut valoir que 1 ou 2 puisque $2-b\geq 0$. Par symétrie, on n'étudie pas les cas $b=1$ et $b=2$ et a quelconque.
Si les deux appartiennent à $\{1,2\}$ il suffit donc d'étudier les quatre cas du tableau 4.1

a \ b	1	2
1	1	1
2	1	0

Table 1.1 – A partir de l'expression $a+b-ab$

Le cas $a+b+ab$

Quelques exemples en fixant une valeur pour a ou b :
Si $a=1$ alors les nombres sont de la forme $1+2b$; tous les nombres impairs sont atteints.
Si $a=2$ alors les nombres sont de la forme $2+3b$; les nombres atteints sont donc les nombres congrus à 2 modulo 3.
Et d'une manière générale, si $a=k$, les nombres sont de la forme $k+(k+1)b$ et ce sont donc les nombres congrus à k modulo $k+1$. Ou en d'autres termes, les nombres congrus à -1 modulo $k+1$. Ainsi, pour savoir si n est un tel nombre, on détermine les diviseurs de $n+1$ et on choisit une paire de diviseurs pour calculer a et b.

Exemple : Si $n = 2021$, $n + 1 = 2022 = 6 \times 337$ (par exemple). Donc

$$2021 = b \times 337 + 336 \text{ donc } b = 5 \text{ et } a = 336$$

Et on a bien :

$$336 + 5 + 336 \times 5 = 2021$$

D'une façon générale si $n + 1 = x \times y$ avec $x \neq 1$ et $y \neq 1$ alors :
$a = y - 1$ et b est le quotient de la division eucidienne de n par $a + 1$
Si $n + 1$ est premier alors la seule solution est de donner à a (ou à b) la valeur 0 et à b (ou à a) la valeur n. (On peut considérer qu'il n'y a pas de solution puisqu'on a fait l'hypothèse que a et b étaient non nuls.)

Exemple : $n = 347$, $n + 1 = 348 = 4 \times 87$ (par exemple)
$a = 86$ et $347 = 87 \times 3 + 86$ et $b = 3$ $(347 = 86 + 3 + 3 \times 86)$
Mais on peut aussi donner à a la valeur 3 et à b la valeur 86, ce qui était prévisible du fait de la symétrie du problème.
$n = 100$ et $n = 0 + 100 + 0 \times 100$ et 100 n'a pas de décomposition de la forme $a + b + ab$ avec a et b différents de 0.

1.3.2 $a^2 + b^2 - 2ab$ ou $a^2 + b^2 + 2ab$

Ces cas sont aussi faciles puisque $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ et $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$; par conséquent les nombres qui sont atteints sont les carrés parfaits.
Réciproquement, si $n = m^2$, il suffit de trouver a et b tels que $m = a - b$ (respectivement $m = a + b$).
Par exemple si $n = 121$, $m = 11$ et on peut choisir n'importe quelle valeur de b et $a = b + 11$, comme par exemple $a = 26$ et $b = 15$
Respectivement : on choisit $a \leq m$ et $b = m - a$; par exemple, pour $n = 121$, $m = 11$ on peut choisir $a = 5$ et $b = 6$.

1.3.3 $a^2 + b^2 - ab$ et $a^2 + b^2 + ab$

Le cas $a^2 + b^2 - ab$

Ce cas est un peu plus difficile. On peut cependant écrire :

$$X(a,b) = a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}$$

Ce qui montre déjà que $a^2 + b^2 - ab$ est toujours positif.
On peut expérimenter en utilisant par exemple un tableur pour voir quelques premiers résultats (Tableau 1.2).

- Sur la diagonale on trouve tous les carrés ; en effet si $a = b$, $a^2 + a^2 - a \times a = a^2$.
- Le tableau est symétrique par rapport à cette diagonale, ce qui bien sûr provient de la symétrie de l'expression en a et b.
- Si on fixe a par exemple, l'expression $a^2 + b^2 - ab$ décroît jusqu'à $b = \dfrac{a}{2}$ pour atteindre la valeur $\dfrac{3a^2}{4}$; en particulier, si a est pair, $b = \dfrac{a}{2}$ et $\dfrac{3a^2}{4}$ sont entiers.

a \ b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	3	7	13	21	31	43	57	73	91
2	3	4	7	12	19	28	39	52	67	84
3	7	7	9	13	19	27	37	49	63	79
4	13	12	13	16	21	28	37	48	61	76
5	21	19	19	21	25	31	39	49	61	75
6	31	28	27	28	31	36	43	52	63	76
7	43	39	37	37	39	43	49	57	67	79
8	57	52	49	48	49	52	57	64	73	84
9	73	67	63	61	61	63	67	73	81	91
10	91	84	79	76	75	76	79	84	91	100

Table 1.2 – A partir de l'expression $a^2 + b^2 - ab$

Par exemple pour $a = 6$, le minimum de l'expression sera $\dfrac{3 \times 36}{4} = 27$
En revanche si a est impair, le minimum ne sera pas atteint et deux valeurs seront égales.
Par exemple pour $a = 7$ le minimum serait en $\dfrac{7}{2}$ et vaudrait $\dfrac{147}{4} = 36{,}75$ et pour $b = 3$ et $b = 4$ l'expression vaut 37.

- 2, 5, 6 ne sont pas atteints.
  En effet : si $b = 1$, $X(a{,}1)$ prend les valeurs 1, 3 puis croit (voir ci-dessus).
  Si $b = 2$, $X(a{,}2)$ prend les valeurs 3, 4, 7 puis croît.
  Si $b = 3$, $(X(a{,}3)$ prend les valeurs 7, 7, 9 puis croît.

Plus généralement Supposons que a soit pair, alors le minimum de $X(a{,}b)$ est atteint pour $b = \dfrac{a}{2}$ et vaut $\dfrac{3a^2}{4}$
Posons

$$\begin{cases} u_1 & = & \dfrac{3a^2}{4} \\ u_{n+1} & = & u_n + 2n - 3 \end{cases} \quad (1)$$

On peut alors trouver la définition fonctionnelle de la suite en calculant la somme $\sum_{k=1}^{n} u_k$; on obtient :

$$u_n = \frac{3a^2}{4} + (n-1)^2 \ (1')$$

Supposons maintenant que a soit impair, alors le minimum est atteint deux fois pour $b = \dfrac{a-1}{2}$ et $\dfrac{a+1}{2}$ et vaut $\dfrac{3a^2+1}{4}$
Posons alors

$$\begin{cases} v_1 & = \dfrac{3a^2+1}{4} \\ v_{n+1} & = \quad v_n + 2n \end{cases} \quad (2)$$

De même,

$$v_n = \frac{3a^2+1}{4} + n(n-1) \ (2')$$

Ces deux suites permettent d'écrire tous les nombres de la forme cherchée.

Exemples Pour $a = 17$, impair, le minimum est atteint pour $b = \dfrac{17+1}{2} = 9$ et vaut $\dfrac{3 \times 18^2}{4} = 243$.
La suite (2) donne les nombres : 217, 219, 223, 229, 237, 247, 259, 273, 289, 307, ...
Pour $a = 44$, pair, le minimum est atteint pour $b = 22$ et vaut 1452
La suite (1) donne les nombres : 1452, 1453, 1456, 1461, 1468, 1477, 1488, ...

Inversement On peut se poser alors la question de savoir si un nombre naturel N est un tel nombre (En fait, ces nombres s'appellent les nombres de Loesch ou Lösch).

1. si N est un carré, alors c'est un nombre de Lösch.
2. N peut-il être un minimum ?
   N serait égal soit à $\dfrac{3a^2}{4}$ soit à $\dfrac{3a^2+1}{4}$; si $N \equiv 2[3]$ alors ce n'est pas possible ; si $N \equiv 0[3]$ alors on se pose la question de savoir si $\dfrac{4N}{3}$ est un carré. Et si $N \equiv 1[3]$ est-ce que $\dfrac{4N-1}{3}$ est un carré ?
3. Si cette recherche est infructueuse, on cherche le plus grand nombre $\left\lceil \frac{3b^2}{4} \right\rceil$ plus petit que N. Et on utilise les définitions (1) ou (1') ou (2) ou (2') pour savoir si N est un nombre de Lösch.
   Attention : si on trouve alors on a bien prouvé que le nombre est un nombre de Lösch (Loeschian number), mais si on arrive sur une impossibilité, rien ne dit que le nombre ne se trouve pas dans une autre colonne. Voir le résultat final pour obtenir une condition nécessaire et suffisante.

Par exemple :

- 2025 est-il un nombre de Lösch ?
  Oui car 2025 est un carré et donc $2025 = X(45{,}45)$.
- 2023 est-il un nombre de Lösch ?
  2023 est congru à 1 modulo 3. Donc c'est peut-être un minimum.
  Est-ce que $\dfrac{4 \times 2023 - 1}{3} = 2697$ est un carré ? Non mais le plus grand carré plus petit que 2697 est $2601 = 51^2$; 51 est impair, on utilise donc la suite (2) (ou (2')) et on cherche n pour que $v_1 = \dfrac{3 \times 51^2 + 1}{4} = 1951$; ce qui nous amène à résoudre l'équation : $2023 = 1951 + n(n-1)$ soit :
  $$n^2 - n - 72 = 0$$
  On trouve comme solution positive $n = 9$ par conséquent $2023 = v_9$ est un nombre de Lösch. On vérifie que $51^2 + 34^2 - 34 \times 51 = 2023$.
- 2024 est-il un nombre de Lösch ? Ce n'est pas un minimum car $2024 \equiv 2[3]$. On étudie alors deux cas :
  Si a est pair : le plus grand minimum plus petit que 2024 est 1875 ($\dfrac{3 \times 50^2}{4}$; a est pair, donc on utilise la suite (1) ou (1') : $u_n = 50 + (n-1)^2 = 2024$ soit à résoudre l'équation
  $$(n-1)^2 = 1974$$

Comme 1974 n'est pas un carré entier, ce n'est pas possible.

Si a est impair : le plus grand minimum plus petit que 2024 est 1953 $\left(\dfrac{3\times 51^2+1}{4}\right)$; a est impair, donc on utilise (2) ou (2') : $v_n = 1953 + n(n-1)$ soit à résoudre l'équation

$$n^2 - n - 70 = 0$$

Comme le discriminant vaut 281 qui n'est pas un carré, ce n'est pas possible.

Le cas $a^2 + b^2 + ab$

Ce cas est identique au précédent ; c'est même la définition des nombres de Lösch.
En effet, si je pose $x = a - b$ et $y = b$ alors :

$$x^2 + y^2 + xy = (a-b)^2 + b^2 + b(a-b) = a^2 + b^2 - 2ab + b^2 + ab - b^2 = a^2 + b^2 - ab$$

Les carrés que l'on obtenait avec $a = b$ sont obtenus avec $x = 0$ (ou $y = 0$). Si on travaille dans $\mathbb{N}^*$ les carrés ne sont pas atteints.

Une condition nécessaire et suffisante Le résultat est dû à John U. Marshall[2] qui en 1975 démontrait le théorème :

Théorème : Un nombre entier donné est dit de Lösch si et seulement si sa factorisation en nombres premiers satisfait la condition suivante : le nombre premier 2 et tous les nombres premiers de la forme (6h - 1), s'ils existent, ont des puissances paires.

Par exempe, $2020 = 2^2 \times 5 \times 101$ or $101 = 17 \times 6 - 1$ et sa puissance est impaire, donc ce n'est pas un nombre de Lösch.

Généralisation

D'une façon beaucoup plus générale, si on considère les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme $a^2 + b^2 \pm k \times ab$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ alors ce sont les mêmes qui s'écrivent $x^2 + y^2 + k \times xy$ à l'exception de quelques uns (à préciser !).
En effet supposons que n s'écrive $a^2 + b^2 - k \times ab$ et posons $x = a$ et $y = b - ka$; alors :

$$a^2 + b^2_k \times ab = x^2 + (y + kx)^2 - k \times x(y + kx) = x^2 + y^2 + k \times xy$$

On peut donc dans la suite s'intéresser aux nombres de la forme $a^2 + b^2 + k \times ab$.

1.3.4 $a^2 + b^2 + k \times ab$

Si on fixe b la suite des nombres de la forme $a^2 + b^2 + k \times ab$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u_{1,b} &= 1 + b^2 + kb \\ \dots & \\ u_{n,b} &= n^2 + b^2 + knb \end{aligned}$$

2. Marshall, J.U. (1975). The Löschian Numbers As a Problem in Number Theory. *Geographical Analysis, 7* : 421-426. https://doi.org/10.1111/j.1538-4632.1975.tb01054.x

La différence de deux termes consécutifs vaut $2n + 1 + kb > 0$ et donc la suite est croissante quelque soit b.
Par ailleurs la suite des premiers termes : $u_{1,p} = 1 + p^2 + kp > 0$ est aussi strictement croissante.
Pour m donné, peut on savoir s'il est de la forme $a^2 + b^2 + k \times ab$? Le problème peut encore générer d'autres questions ; nous nous arrêterons là pour cette fois !

Anecdote

Ces nombres ne proviennent pas d'une situation mathématique à l'origine. Les nombres de Lösch trouvent leur origine dans l'économie. En 1940 et 1944, l'économiste allemand August Lösch a publié un ouvrage intitulé *Die Raumliche Ordnung der Wirtschaft*[3], dans lequel il s'intéressait au problème de la localisation dans l'activité économique, et plus précisément au rôle de l'espace en économie. Lösch a construit un modèle de l'organisation spatiale d'un système de zones de marché sous la forme d'un réseau hexagonal, approvisionnant entièrement n localités en différents types de biens. Dans son livre, il considère 10 zones de marché et constate que, pour la première zone, le nombre de localités entièrement approvisionnées est égal à $n = 3$ et pour la dixième, $n = 25$. Ces valeurs de n augmentent en fonction de la diversité des biens dans l'espace économique. Ce sont les valeurs de n qui sont connues comme les nombres de Lösch. Il donne dans son ouvrage la formule $n = \dfrac{b^2}{a^2}$ où b représente la distance séparant les marchés approvisionnant les localités et a représente la distance séparant les localités d'origine. C'est un physicien, Werner Känzig qui donne une modélisation plus précise, dans laquelle n apparaît comme résultat d'une équation diophantienne[4] :

$$n = x^2 + 3y^2$$

dans laquelle x et y sont des entiers ou des demi-entiers.
S.L. Arlinghaus, W.C. Arlinghaus montrent en 1989 que les nombres de Lösch peuvent aussi s'écrire comme résultat de l'équation :

$$x^2 + y^2 + xy = n$$

.
Le lecteur curieux pourra trouver une démonstration à cette adresse :
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300323004885#br0050
(consulté de 25 juin 2025)

3. L'aménagement spatial de l'économie
4. Une équation dont les inconnues appartiennent à l'ensemble des entiers

1.4 Dans les classes

Lors de cette épreuve du rallye, les élèves se sont approprié les questions ; beaucoup d'entre eux ont fait des exemples et ont essayé de trouver des régularités. Le cas de $a + b - ab$ a souvent été bien traité, avec des tentatives de démonstrations (comme par exemple fig. 1.2).

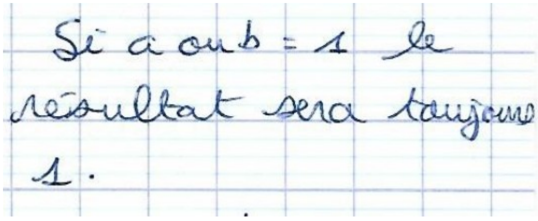
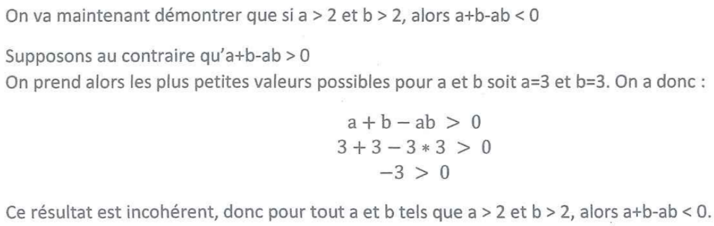

Si a ou b = 1 le résultat sera toujours 1.

Figure 1.1 – Le premier cas traité


On va maintenant démontrer que si a > 2 et b > 2, alors a+b-ab < 0

Supposons au contraire qu'a+b-ab > 0
On prend alors les plus petites valeurs possibles pour a et b soit a=3 et b=3. On a donc :

$$a + b - ab > 0$$
$$3 + 3 - 3 * 3 > 0$$
$$-3 > 0$$

Ce résultat est incohérent, donc pour tout a et b tels que a > 2 et b > 2, alors a+b-ab < 0.

Figure 1.2 – Une démonstration

Dans le cas de $a + b + ab$ les élèves ont plus cherché à généraliser et à trouver les nombres qui peuvent s'écrire de cette manière (fig 1.3) ; il est intéressant de voir l'exploration d'un petit domaine des mathématiques apparaître, avec des résultats prouvés et d'autres qui restent des problèmes ouverts (Fig. 1.4). Ou encore, l'ébauche de définition, comme par exemple lorsque ces élèves définissent une suite « avec leurs mots » (Fig. 1.5). Les résultats ne sont pas forcément complètement prouvés mais les élèves se sont visiblement emparés du problème et ont trouvé des résultats partiels, en distinguant bien ce qui relève d'une conjecture et ce qui relève d'une preuve, en faisant fonctionner leurs connaissances, ici de calcul littéral, pour avancer dans la résolution du problème. Des classes ont exploré le problème en utilisant la programmation (Fig. 1.6), même si l'interprétation n'a pas été toujours très pertinente. En particulier sur l'exemple montré en figure 1.6, les élèves ne se sont pas aperçus que les résultats calculés incluaient les valeurs $a = 0$ et $b = 0$ (qui permettent d'atteindre tous les nombres entiers). Il y a eu contradiction avec ce qu'ils avaient démontrés (seuls 0 et 1 peuvent être des nombres positifs de la forme $a+b-ab$). Ces élèves ne se sont pas sortis de cette contradiction, mais on voit bien l'intérêt didactique que l'on pourrait en tirer pour lever cette contradiction apparente.

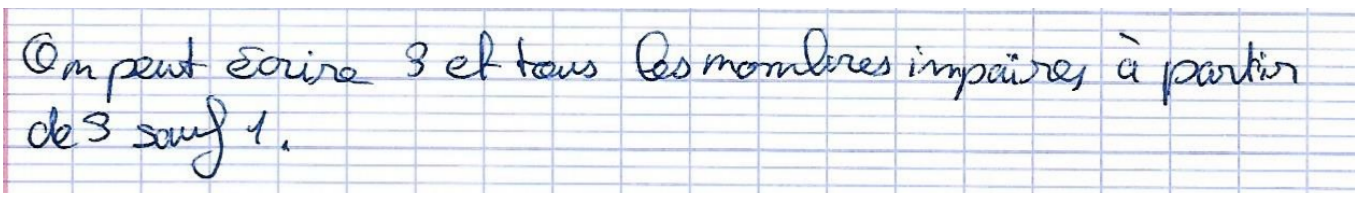

On peut écrire 3 et tous les nombres impaires à partir de 3 sauf 1.

Figure 1.3 – Un début de généralisation

Les nombres pairs qui s'écrivent sous cette forme sont : 8, 14, 20, 24, 26, 32, 34, 38, 44, 50...

Si a = 4, et n = 10k + 4, k entier

$$
\begin{aligned}
4 + b + 4b &= 10k + 4 \\
b + 4b &= 10k \\
5b &= 10k \\
b &= 2k
\end{aligned}
$$

Donc tous les nombres finissant par 4, excepté 4, s'écrivent sous cette forme. Cependant, pour les autres nombres pairs, nous n'avons pas trouvé de règle pour l'instant.

Figure 1.4 – Des résultats prouvés, d'autres encore en suspens

On détermine pour cela une suite logique de nombres, dont tous les termes x sont définis par y+n avec y le terme précédent. n a toujours pour valeur de départ 3, puis prend à chaque fois la valeur de n+2 pour prendre ainsi successivement la valeur de tous les nombres impairs. Le premier nombre de la suite étant notre solution minimale : 2

Ainsi la suite commence par 2,5,10,17,26,37,50,65,82 etc...

Figure 1.5 – Une définition d'une suite en classe de Troisième

L'exploration de ce problème peut amener les élèves à programmer comme beaucoup de réponses provenant de lycées en attestent (Voir par exemple la figure 1.6). C'est en effet un bon exercice de programmation qui est souvent utilisé pour déterminer si un nombre est un nombre de Lösch (voir par exemple :https://www.geeksforgeeks.org/dsa/loeschian-number/ ou le défi à écrire le plus court programme : https://codegolf.stackexchange.com/questions/88732/is-this-number-loeschian). C'est certainement une idée d'utilisation en classe de ce problème ouvert. Et la difficulté à utiliser les programmes réalisés en lien avec les raisonnements arithmétiques (Fig. 1.6) montrent bien l'intérêt d'associer la programmation et le raisonnement.

```python

# créer un programme quimontre tous les nombres s'écrivant sous la forme a+b+ab

eligible= []
for a in range (0,101):
    for b in range (0,101):
        x= a+b-a*b
        if x>0:
            eligible.append(x)
eligible.sort()
print(eligible)
```

Figure 1.6 – Une programmation en Python

C'est encourageant de voir que les élèves, même dans les conditions du confinement, arrivent à s'intéresser à des problèmes de mathématiques dont la réponse n'est pas immédiate, dont les modes de raisonnement ne sont pas induits par l'énoncé ; toutes les classes sont passées par des expériences sur les nombres, pour faire apparaître des caractérisations de ces nombres, parfois admises à partir des exemples, mais plus souvent avec une volonté de montrer l'exactitude de ce qui était annoncé. Et, lorsque la démonstration n'était pas trouvée, de laisser en suspens un résultat en lui donnant explicitement le statut de conjecture ou bien en montrant les pistes de recherche qui n'ont pas abouti. Les réponses suffisamment nombreuses et bien explicites montrent un certain engouement pour ce genre de problèmes et nous incitent à continuer !

Chapitre 2

2022

2.1 Introduction

Après un problème sur les nombres et les expressions algébriques, le problème ouvert de cette année sera géométrique. L'idée m'est venu à partir d'un problème donné aux Olympiades et expliqué par Philippe Caldero dans sa chaîne YouTube (https://www.youtube.com/@philcaldero8964) qui porte sur un triangle équilatéral construit dans un triangle équilatéral. J'ai donc imaginé un problème avec un carré construit dans un carré utilisant une construction similaire à celle des triangles. À partir de la figure de base, beaucoup de questions peuvent se poser, qui permettaient à tous les élèves de pouvoir rentrer dans le problème et poursuivre les recherches en répondant aux questions posées ou bien en proposant eux-mêmes des questions. J'avais déjà proposé une année un problème de géométrie sans question ([Aldon, 2021], page 105) et les propositions faites par les élèves avaient été très créatives. C'est donc un peu la même idée qui a présidé la proposition de cette année même si la géométrie n'est plus très présente dans les programmes actuels de mathématiques dans les classes de troisième et seconde. C'était d'ailleurs un petit défi de voir si les élèves « accrocheraient » à ce problème qui *a priori* n'est pas relié à ce qu'ils ont l'habitude de faire en classe. Les propositions envoyées par les élèves montrent bien qu'ils sont capables de s'intéresser à des problèmes de géométrie et de faire d'intéressantes contributions !
En 1997, Rudolf Bkouche écrivait :
« Dans le cas de la géométrie, lorsque nous disons que la géométrie est d'abord l'étude des figures, cela signifie que c'est à travers l'étude des figures que se constitue la science géométrique, ses concepts et ses méthodes. » ([Bkouche, 1997], page 67).
Les figures sont ainsi la base de la construction des connaissances géométriques des élèves et leurs analyses permettent de rentrer dans la démarche géométrique et de construire les connaissances nécessaires à l'élaboration d'une pensée géométrique fondée sur la déduction. Ce regard particulier sur les dessins met bien en évidence les allers-retours nécessaires entre la perception et la construction théorique des concepts géométriques. Voir les dessins en y reconnaissant des figures géométriques est l'objet d'un apprentissage que l'exploration de situations géométriques permet.
« Le rôle joué par la perception dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (ou qu'on lui fait jouer) est donc crucial, que la perception porte sur les objets matériels ou sur les représentations » ([Laborde, 1989], page 10).
Les logiciels de géométrie dynamique (Cabri, Sketchpad, GeoGebra,...) existent maintenant depuis plus de 40 ans et sont facilement disponibles. Les apports de ces logiciels à l'apprentissage de la géométrie reposent sur la possibilité de mettre en évidence des invariants d'une figure par les déplacements d'objets libres. Mais tout comme l'analyse d'un dessin, les déplacements ne

sont pas mobilisés d'emblée par les élèves et doivent être enseignés en relation avec l'analyse de la figure. Dans ces conditions, la géométrie dynamique permet de relier le mouvement aux concepts géométriques d'une figure et participe à la compréhension d'une situation géométrique. Voilà les ambitions qui ont présidé à l'élaboration de cette épreuve de problème ouvert du Rallye avec le secret espoir que les élèves trouveront dans cette exploration le plaisir de chercher !

2.2 Énoncé

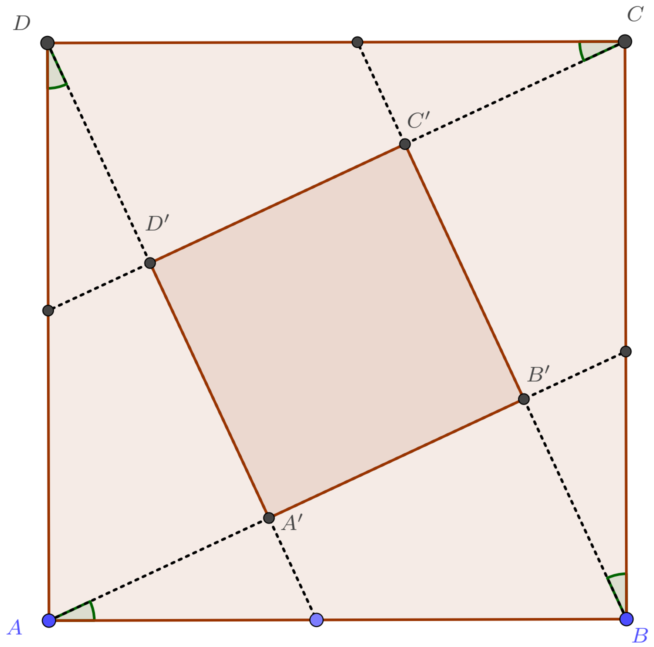


Figure 2.1 – Cas du carré

Tout part d'un carré $ABCD$ dont les côtés mesurent 1 dm. On construit à partir des quatre sommets quatre demies droites faisant un même angle avec le côté du carré comme indiqué sur la figure 2.1.

A partir de cette figure, on peut se poser plein de questions :

- Le quadrilatère $A'B'C'D'$ est-il un carré ? Si l'angle vaut 0 quelle est l'aire de $A'B'C'D'$? et si cet angle vaut 45° ? Et d'une façon plus générale, si cet angle vaut $\alpha \in [0, 45]$?
- Lorsque l'angle α prend les valeurs entre 0 et 45° les points A', B', C' et D' se déplacent et suivent des lignes particulières que l'on appelle les lieux des points A', B', C' et D' ; peut-on caractériser ces lignes ? Où se coupent elles ?
- Les deux carrés $ABCD$ et $A'B'C'D'$ n'ont pas leurs côtés parallèles. Mais, si on fait tourner $ABCD$ autour de son centre d'un angle α on obtient un carré $A"B"C"D"$ dont les côtés sont parallèles à $A'B'C'D'$. Pouvez vous le prouver ? Existe-t-il une homothétie qui transforme $A"B"C"D"$ en $ABCD$? Si oui, quel est son rapport ? Quel est son centre ?

Une fois exploré cette première situation, on peut généraliser de plusieurs façons :

- Si on recommençait dans le carré $A'B'C'D'$ la construction pour obtenir $A"B"C"D"$. Quels seraient les lieux des points $A"$, $B"$, $C"$, $D"$ lorsque α varie entre 0 et 45° ?
- Si au lieu du carré c'était un rectangle, que se passe-t-il ? Et si c'était un losange ? un trapèze ? un quadrilatère quelconque ?

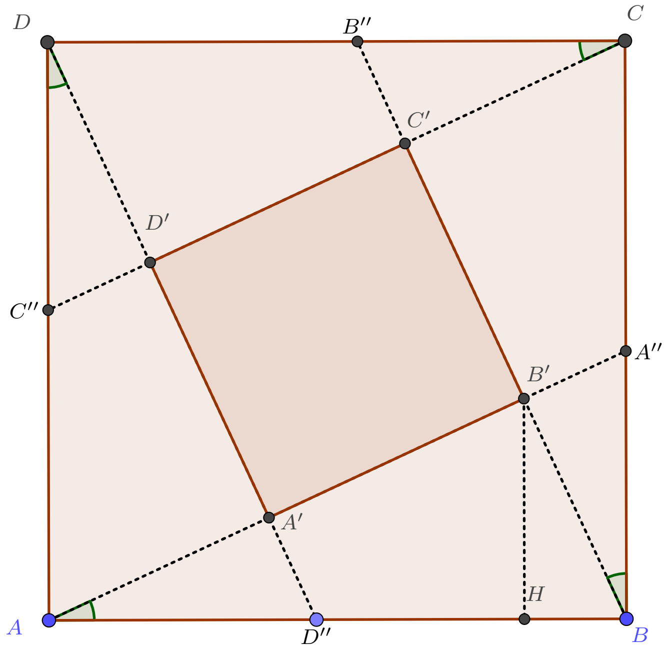


FIGURE 2.2 – Cas du carré

- Mais aussi, si on partait d'un triangle équilatéral ?
- Ou d'un polygone régulier à n côtés ?
- ...

A vous de jouer !

2.3 Un peu de mathématiques

2.3.1 Cas du carré

Premières questions Les premières questions permettent à tous les élèves de rentrer dans le problème ; le quadrilatère $A'B'C'D'$ est un parallèlogramme (ses côtés sont parallèles deux à deux puisque ils forment le même angle avec deux droites parallèles) ; Les triangles $AD''A'$, $BA''B'$, $CB''C'$ et $DC''D'$ sont égaux car semblables respectivement aux triangles $DD''A$, $AA''B$, $BB''C$ et $CC''D$. Comme ces derniers triangles sont rectangles, $A'B'C'D'$ est un rectangle. Et comme $AA'' = BB''$, $A"B' = B"C'$ et finalement $AA' = BB'$, les côtés $A'B'$ et $B'C'$ sont égaux et $A'B'C'D'$ est un carré.
Les triangles $DA'A$, $AB'B$, $BC'C$ et $CD'D$ sont égaux (mêmes angles et un côté de même longueur 1dm) ; L'aire d'un de ces triangles vaut $\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{2}$; donc l'aire de $A'B'C'D'$ est égale à :

$$A = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Cas particuliers : si $\alpha = 0$ l'aire de $A'B'C'D'$ vaut 1. Si $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ l'aire de $A'B'C'D'$ vaut 0.

Donc la similitude qui transforme $ABCD$ en $A'B'C'D'$ aura comme rapport :

$$\sqrt{1 - 2\cos\alpha\sin\alpha} = |\cos\alpha - \sin\alpha|$$

Ces calculs demandent quelques connaissances en trigonométrie.

Deuxième approche possible On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$.
Les droites (AB'),(CD'),(DA') et (BC') ont pour équation :

$$\begin{array}{lcl}
(AB') & : & y = \tan\alpha x \\
(CD') & : & y = \tan\alpha x + 1 - \tan\alpha \\
(DA') & : & y = \dfrac{-1}{\tan\alpha}x + 1 \\
(BC') & : & y = \dfrac{-1}{\tan\alpha}x + \dfrac{1}{\tan\alpha}
\end{array}$$

On en déduit facilement les coordonnées de A' et B' et l'aire de $A'B'C'D'$:

$$A'\left(\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha},\frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$
$$B'\left(\frac{1}{1+\tan^2\alpha},\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right)$$
$$\text{Aire de } A'B'C'D' : \frac{(1-\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}$$

Mais, est-ce que ces deux résultats sont égaux ? Oui, bien sûr, et c'est encore quelques éléments de trigonométrie qui donnent la réponses :

$$\frac{(1-\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha} = \frac{(1+\tan^2\alpha - 2\tan\alpha)}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = (1+\tan^2\alpha - 2\tan\alpha)\cos^2\alpha = 1 - 2\cos\alpha\sin\alpha$$

Lieux On a vu que $AB'B$ est un triangle rectangle en B'. Si O est le milieu de $[A,B]$, c'est-à-dire le milieu de l'hypoténuse alors la distance OB' est égale à OA, et ce quelque soit la valeur de α. Par conséquent, lorsque α varie, le point B' parcourt le quart de cercle de centre O et de rayon 5cm entre le point B et le centre du carré $ABCD$. C'est aussi le cas pour les points C', B' et A'.

2.3.2 Prolongements

Pour un rectangle, il est intéressant de constater que $A'B'C'D'$ est encore un rectangle mais il n'est pas semblable au rectangle initial. Ça permet de mettre en évidence que si deux triangles ont les mêmes angles sont semblables, en revanche ce n'est plus vrai pour les quadrilatères. Pour un quadrilatère quelconque on peut montrer facilement que les angles de $ABCD$ sont aussi les angles de $A'B'C'D'$ mais les quadrilatères, là encore ne sont pas semblables. En revanche les lieux des sommets sont toujours des arcs de cercles du fait de l'égalité des angles. On voit donc que la généralisation carré, rectangle, quadrilatère quelconque met en évidence des propriétés qui se conservent et d'autres non.
On va s'intéresser au triangle qui est au centre de la figure. Est-il lui aussi équilatéral ? Quel est son aire ? Quels sont les lieux de ses sommets ? Où se coupent ces lieux ? Est-ce qu'il est possible que son aire soit le quart de l'aire du grand triangle ?...
Bien entendu, on pourra ensuite faire une figure similaire mais, cette fois-ci en partant d'un carré (figure 2.5), puis d'un pentagone régulier, ...

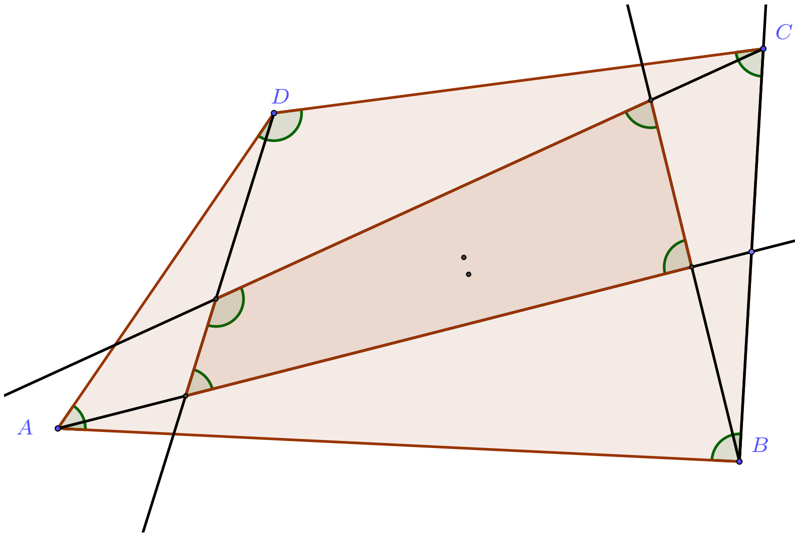


Figure 2.3 – Quadrilatère quelconque

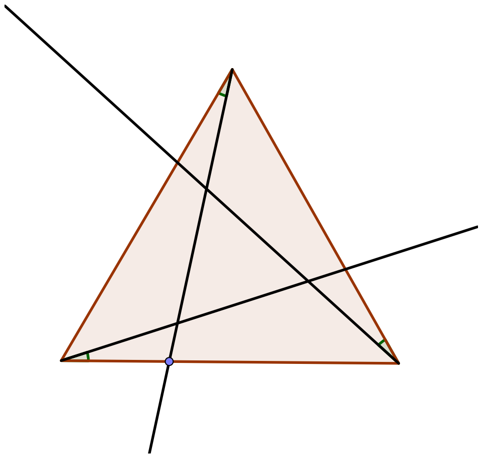


Figure 2.4 – La figure de départ

2.3.3 Premiers éléments de solution

D'abord on remarque la symétrie qui existe dans la configuration qui sera utile pour travailler. Du fait de cette symétrie les triangles $AA'B$, $BB'C$ et $CC'A$ sont égaux.
On remarque aussi que les angles $\widehat{AA'B} = \widehat{BB'C} = \widehat{CC'A} = \frac{2\pi}{3}$ sont constants. Ce qui règle le problème des lieux des sommets qui sont les arcs capables de AB, BC et CA sous un angle de $\dfrac{2\pi}{3}$ donc une protion de cercle centré sur les symétriques du centre de gravité du triangle par rapports aux côtés.
Résultat qu'on peut généraliser assez facilement aux cas du carré ou de n'importe quel polygone régulier.
En utilisant le théorème d'Al Kashi dans le triangle $AC'C$ (par exemple), il vient en posant $AC' = x$ et $A'C' = d$:

$$(1+x)^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 1 + (x = d)^2$$

$$1 = (x+d)^2 + x^2 - 2(x+d)\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

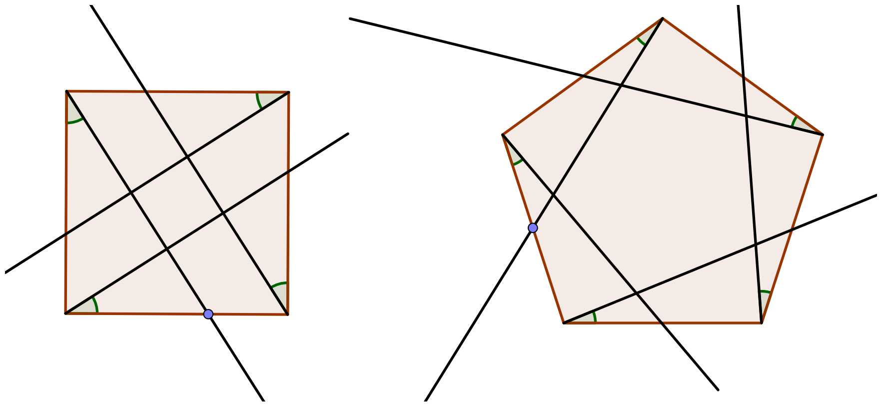


Figure 2.5 – Pour un carré, un pentagone,...

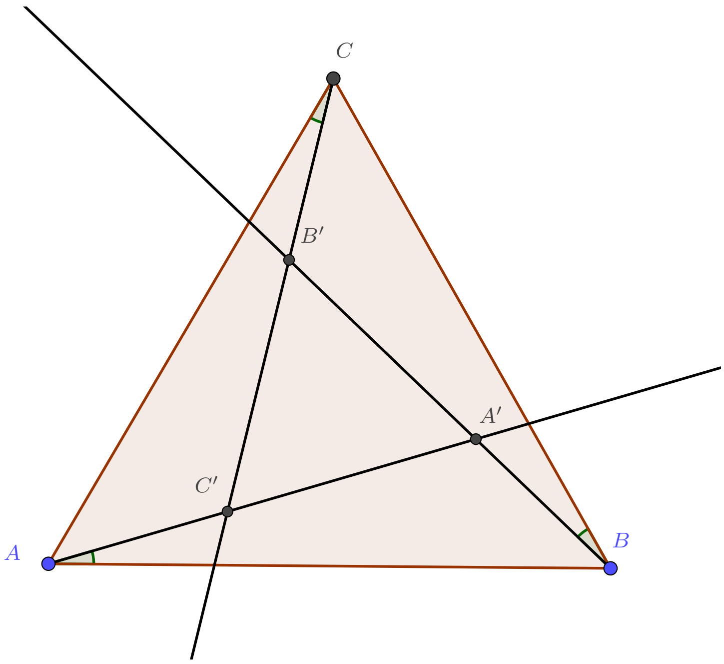


Figure 2.6 – Nommons les points

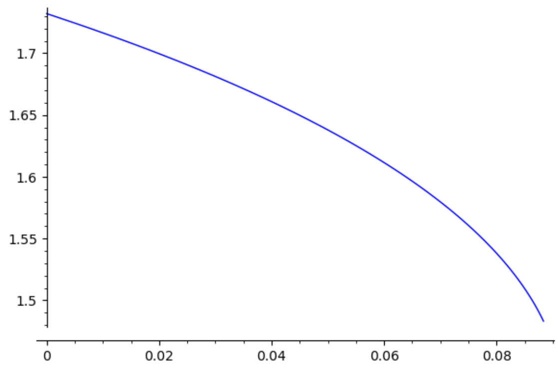


Figure 2.7 – d en fonction de α

Ce qui en simplifiant donne :

$$\left\{\begin{array}{c} 2xd + d^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = 0 \\ 3x^2 + 3xd + d^2 - 1 = 0 \end{array}\right.$$

ce qui après quelques calculs fastidieux donne :

$$d = \frac{3\left(\frac{1}{3}\sqrt{-3\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)^2+1}+\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)+\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{-3\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)^2+1}+\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)+\frac{2}{3}}}{2\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)+1}$$

$$x = -\sqrt{\frac{1}{3}\sqrt{-3\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)^2+1}+\cos\left(-\frac{1}{3}\pi+\alpha\right)+\frac{2}{3}}$$

Ce qui peut être représenté par la figure 2.7
Une autre idée est de remarquer que l'aire de $A'B'C'$ est l'aire de ABC moins trois fois l'aire de $AA'B$
Si on suppose que $AB = 1$ alors l'aire de $ABC = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$
Il suffit alors de calculer l'aire de $AA'B$ en fonction de α. Mais comme le triangle $AA'B$ a comme angles α, $\frac{\pi}{3} - \alpha$, $\frac{2\pi}{3}$ on peut calculer la hauteur $A'H = h$ en fonction de α ; on a :

$$\left\{\begin{array}{ccc} h & = & AH\tan\alpha \\ h & = & BH\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \\ AH + BH & = & 1 \end{array}\right.$$

On en déduit que :

$$AH = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{\tan\alpha + \tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}$$

et donc que :

$$\text{Aire}ABA' = \frac{AH\tan\alpha}{2} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\tan\alpha}{2\left(\tan\alpha + \tan\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right)}$$

2.4 Dans les classes

Bien sûr, un problème de géométrie amène les élèves à utiliser un logiciel de géométrie dynamique qui permet d'illustrer l'énoncé, de faire des conjectures mais aussi de vérifier des résultats obtenus par les calculs. Ainsi, une classe de lycée a envoyé comme réponse au problème ouvert un film d'un écran d'ordinateur sur lequel la figure dynamique était représentée et les commentaires montraient simultanément les démonstrations, les cas particuliers, et les calculs effectués. On voit bien ici les apports de la géométrie dynamique qui accompagne les raisonnements géométriques (Fig. 2.8). Mais la géométrie dynamique permet aussi de faire des conjectures comme le montre cette représentation des lieux des points A', B', C' et D' réalisée par une classe (Fig. 2.9)

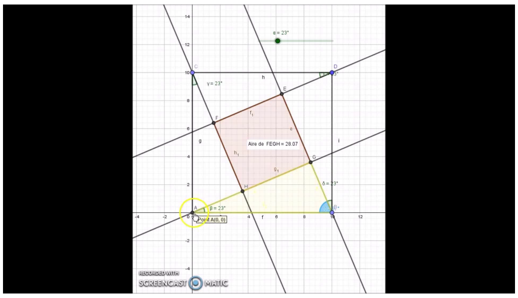


Figure 2.8 – Un film appuyé par une figure dynamique

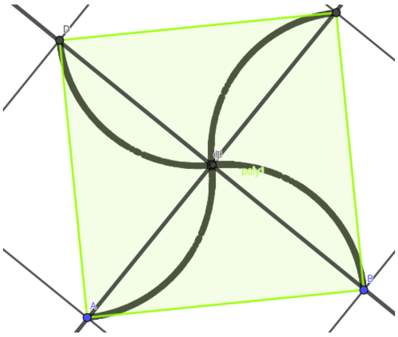


Figure 2.9 – Les traces des sommets du carré intérieur

On retrouve dans des comptes-rendus de recherche les lieux des points A', B', C' et D' sont dessinés à la main ; la conjecture selon laquelle les trajectoires appartiennent à des cercles apparaît mais sans démonstration (Fig. 2.10). Mais il est intéressant de voir que sans l'utilisation de la géométrie dynamique les conjectures de ces lieux peuvent être erronées (Fig. 2.11). Il est vrai que la recherche de lieux n'est plus vraiment présente dans les programmes de mathématiques, ce qui peut paraître dommage quand les logiciels de géométrie dynamique offrent des pistes d'études très intéressantes.

Conclusion La géométrie est de moins en moins présente dans les programmes de mathématiques au collège et au lycée. La recherche de ce problème ouvert montre cependant que les élèves sont capables de s'accrocher sur l'analyse d'une figure et développent des raisonnements ; ils travaillent de ce fait la compétence à chercher et la compétence à raisonner, deux des pilliers des compétences mathématiques majeures. Ce problème ouvert montre aussi que dans des situations de recherche, les élèves sont capables de mobiliser des compétences de calcul, ici

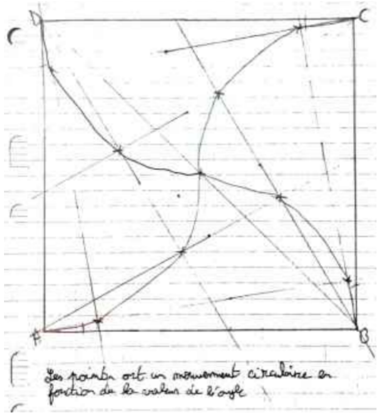


Figure 2.10 – Les traces des sommets du carré intérieur

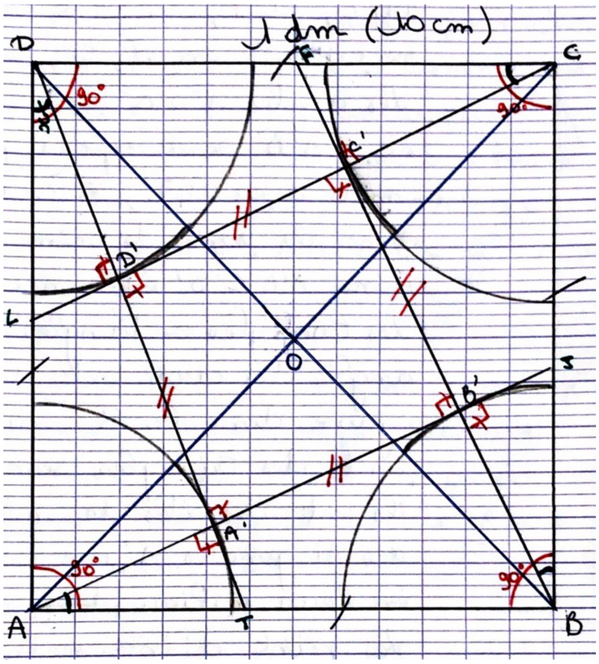


Figure 2.11 – Une conjecture fausse

notamment avec les calculs trigonométiques. La recherche d'un tel problème ne se limite donc pas seulement à un développement de compétences fondamentales mais aussi à la mobilisation de connaissances dans un contexte particulier. Les élèves peuvent alors se rendre compte de l'importance de notions et de leurs manipulations. Le calcul devient un outil pour résoudre un problème et pas seulement un exercice à réaliser sans but. On peut espérer qu'ayant vu l'importance de la maîtrise du calcul, les élèves pourront plus facilement supporter les exercices d'entraînement : déchiffrer et jouer un morceau de musique récompense des exercices de solfège !

Chapitre 3

2023

3.1 Introduction

Pour le problème ouvert 2023, nous inaugurons une nouvelle forme d'épreuve ! Au lieu d'un problème ouvert, nous en proposons cinq !
Pourquoi ?
Parce que choisir un problème à résoudre est souvent une question de goût, d'attirance, d'attrait ou d'affinité pour une partie ou une autre des mathématiques. Pour certains, un défi géométrique sera le point de départ de longues réflexions, pour d'autres, manipuler des nombres et comprendre leurs propriétés est l'assurance d'un plaisir à venir... Alors, nous vous proposons un choix de problèmes !
Comment ?
Bien sûr, le but du jeu n'est pas de tous les traiter ! Ce que nous attendons des élèves pour cette épreuve de problème ouvert, c'est soit un « butinage » des problèmes pour émettre des conjectures, des idées, des réflexions, éventuellement trouver des résultats ; soit un approfondissement d'un seul problème, en regardant ses tenants et aboutissants, sa résolution, et éventuellement des prolongements.
Toutes les recherches seront prises en compte, toutes les attitudes devant ces problèmes seront considérées ; il n'y a pas de bonne ou de mauvaise façon d'aborder cette épreuve pourvu que vos élèves entrent à un moment donné dans une démarche mathématique.
Voilà l'accroche de l'épreuve du problème ouvert 2023. Au delà des arguments évoqués, nous pensons que donner des problèmes de difficultés différentes va inciter les élèves à rentrer plus nombreux dans la résolution de ces problèmes. Nous pensons aussi que les enseignants seront plus enclins à proposer ces problèmes ouverts dans leurs classes parce qu'ils pourront mieux se projeter sur ce que la plupart de leurs élèves pourront traiter.
Il est clair que pour la plupart des élèves, les devoirs de mathématiques ressemblent plus à des suites d'exercices construits pour appliquer les propriétés, définitions, théorèmes qui viennent d'être appris dans la leçon. Il est bien entendu que ces exercices d'entraînement sont nécessaires pour maîtriser les connaissances des programmes. Mais ils ne sont pas les seuls ! La proposition d'autres types d'activité mathématique est indispensable pour faire appréhender la beauté des mathématiques mais aussi pour construire ou consolider des connaissances, développer des heuristiques et affirmer des méthodes de raisonnement.
A travers l'enseignement d'une discipline, se transmet plus que la construction de savoirs ou de compétences ; dans un environnement socioculturel donné, l'enseignement apparaît comme un vecteur de transmission d'une culture à travers la diffusion des valeurs sociales, personnelles et culturelles. Les mathématiques ne font pas exception et les valeurs transmises véhiculent une vision de ce que sont les mathématiques, de ce qu'elles représentent dans la société et de l'image

qu'elles propagent dans la culture des élèves. Alan Bishop (1988) établit un parallèle entre une vision des mathématiques qui pourrait s'affranchir de la culture ambiante et une neutralité des valeurs transmises en marquant la différence entre une formation aux mathématiques et une éducation mathématique qui « devrait rendre les valeurs explicites et évidentes » (Ibid., page 181 traduit de « should make the values explicit and overt »). Seah (2008) fait remarquer que beaucoup d'enseignants pensent encore que l'enseignement des mathématiques ne partage pas des valeurs, même s'ils considèrent que le rôle du professeur outrepasse la seule transmission de connaissances. A la suite de Bishop et de ses travaux nous faisons l'hypothèse que les valeurs, les croyances et les attitudes sont dialectiquement liées et que l'éducation mathématique ne pourrait pas s'appeler « éducation » si elle n'avait rien à voir avec le développement de valeurs : « Perhaps that is a crucial difference between a mathematical training and a mathematical education ? » (Bishop, 1988, page 181).

L'enseignement justifie, encourage des comportements, des attitudes ou des croyances en forgeant un socle de pensée qui permet à un individu d'attribuer, en cours d'activité, une valeur à ses actions individuelles ou à l'activité collective ; les résultats de ces processus de valuation constituent les « valeurs ». Les valeurs dans l'enseignement sont ainsi les significations profondes des mathématiques, comme science, qui sont promues, fortifiées et stimulées à travers la discipline scolaire « mathématiques ».

Les valeurs mathématiques peuvent se décliner suivant des composantes idéologiques, liées au symbolisme et à l'épistémologie personnelle, sentimentales (ou attitudinale), reliées aux comportements des personnes à travers leurs attitudes et leurs sentiments et sociologiques, associées aux habitudes socio-culturelles et aux comportements inter-personnels. Dans ces trois domaines, Bishop propose des valeurs en tension entre deux extrêmes qu'il décrit de la manière suivante :

- Composante idéologique : en tension entre le rationalisme et l'objectivisme (ou l'empirisme) : le rationalisme concerne une vision des mathématiques qui met l'accent sur l'argumentation, le raisonnement et l'analyse logique d'une situation conduisant à une preuve ; l'empirisme concerne une vision des mathématiques favorisant l'objectivation, la symbolisation et le lien des mathématiques au concret en favorisant l'expérience.
- Composante sentimentale ou personnelle en tension entre le contrôle et le progrès : le contrôle s'applique à mettre l'accent sur la puissance et la maîtrise des règles, des procédures, des raisonnements et des vérifications dans la connaissance mathématique. Les valeurs de progrès consistent à favoriser, dans les mathématiques, la construction des idées, le développement de nouvelles approches, la multiplicité des solutions et mettent en exergue l'importance des exemples.
- Composante sociologique en tension entre l'ouverture et le mystère : à travers une vision des mathématiques conduisant à partager les connaissances, à démocratiser le savoir en reliant les démonstrations à la conviction de l'exactitude d'un fait, à favoriser les explications personnelles, la valeur transmise est celle d'ouverture. Mettre l'accent sur la fascination, le merveilleux de la construction mathématique encourage la transmission d'une valeur de mystère des mathématiques.

Il ne s'agit pas d'opposer ces valeurs, mais de considérer leur importance mutuelle dans une perspective d'appréhension harmonieuse des mathématiques. Il ne suffit pas d'exercer la pensée mathématique, mais aussi de donner à penser à propos de cette pensée mathématique, en explorant en particulier les pensées associées à cette pensée. Ainsi, dans le développement des problèmes ouverts, sont visées non seulement les connaissances mathématiques des programmes, les compétences proposées dans les documents officiels en France, mais aussi une réflexion à propos des mathématiques enseignées.

3.2 Les énoncés

3.2.1 Des 2 et des 3

Est-il vrai que tout entier naturel non nul peut s'écrire comme la somme d'entiers de la forme $2^p 3^q$?

Par exemple : $2 = 2^1 \times 3^0$, $3 = 2^0 \times 3^1$, $4 = 2^2 \times 3^0$, $5 = 2^2 \times 3^0 + 2^0 \times 3^0 \ldots$

3.2.2 Somme de nombres

Soit n un entier strictement supérieur à 1. De combien de façons peut-on l'écrire comme la somme de k entiers positifs qui ne diffèrent d'au plus une unité ?

Autrement dit k entiers positifs tels que :

$$\begin{cases} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_1 + 1 \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n \end{cases}$$

Par exemple : 5 peut s'écrire 2+3 ou bien 2+2+1 ou bien 2+1+1+1 ou bien 1+1+1+1+1 mais on ne considèrera pas la décomposition $4+1$ parce que $4-1=3>1$

3.2.3 Permutations et carrés

On considère l'ensemble $S_n = \{1,2,\ldots n\}$, n étant un entier positif supérieur ou égal à 2. Existe-t-il une permutation des termes de telle sorte que la somme de deux entiers consécutifs soit toujours un carré ?

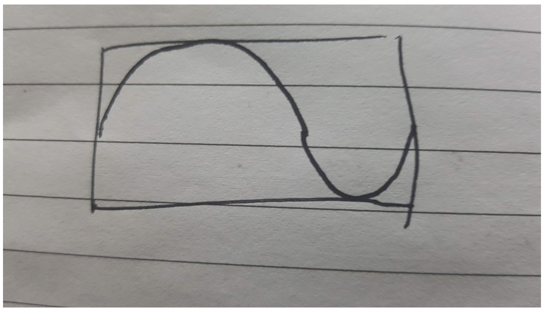
Par exemple avec $n=3$, $S_3 = \{1,2,3\}$ toutes les permutations de S_3 sont :

1, 2, 3	1+2=3 n'est pas un carré et 2+3=5 non plus
1, 3, 2	1+3=4 est un carré, mais 3+2=5 n'est pas un carré
2, 1, 3	2+1 n'est pas un carré mais 1+ 3 est un carré
2, 3, 1	2+3=5 n'est pas un carré mais 3+1 est un carré
3, 1, 2	3+1 = 4 est un carré mais 1+2=3 n'est pas un carré
3, 2, 1	3+2=5 et 2+1=3 ne sont pas des carrés

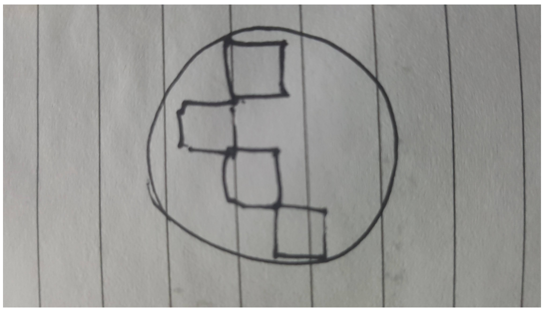
Donc pour $n=3$ ce n'est pas possible de trouver une permutation telle que toutes les sommes de deux entiers consécutifs soient des carrés.

3.2.4 Dessins à main levée

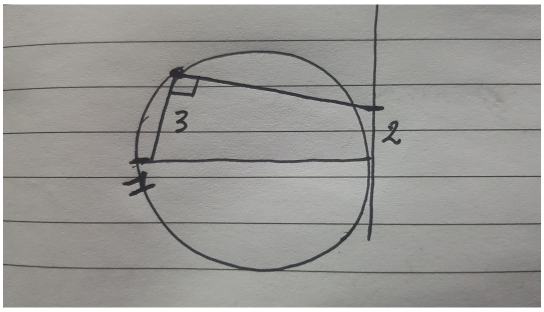
Dans ces dessins à main levée, vous pouvez ajouter les hypothèses qui vous semblent pertinentes et donc écrire précisément l'énoncé que vous allez examiner.



Le périmètre du rectangle mesure 6cm. Quelle est la longueur de la ligne à l'intérieur du rectangle ?



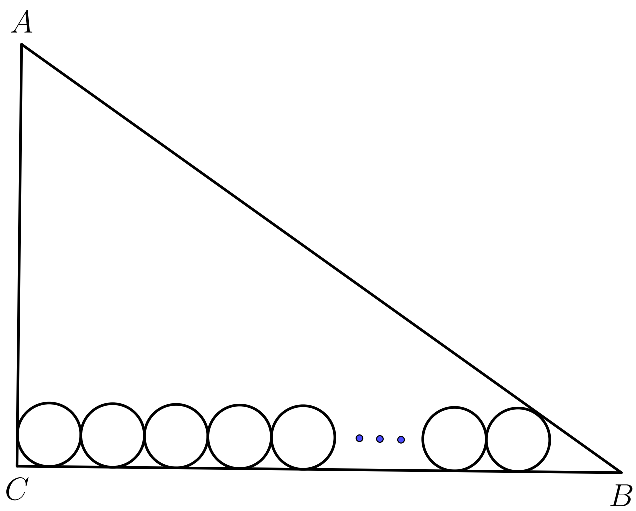
Chaque carré a des côtés de 4cm. Quelle est le diamètre du cercle ?



Quelle est l'aire du disque ?

3.2.5 La frise

ABC un triangle rectangle en C. $CB = a$, $CA = b$ et $BA = c$. On dessine n cercles de rayon r sur le côté CB de telle sorte que tous les cercles sont tangents entre eux et tangents au côté CB et le premier est tangent au côté CA et le dernier tangent au côté AB comme indiqué sur la figure ci-dessous.



Exprimer n en fonction de a, b, c et r.

3.3 Un peu de mathématiques

Revenons successivement sur ces cinq problèmes.

3.3.1 Des 2 et des 3

Précautions On pourrait toujours répondre que tous les nombres naturels peuvent s'écrire comme somme de puissances de 2 (ou de 3) en utilisant le fait que $a^0 = 1$ quelque soit a positif. Et donc, en itérant autant de fois qu'il est nécessaire, et quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{i=1}^{n} 2^0 \times 3^0$. On peut donc *a priori* supposer que dans les termes de la somme, au moins un des deux exposants est non nul. On élimine donc l'exposant 0 et on travaille dans $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Recherche C'est trivialement vrai pour 2, 3, 4, 5 $(2^1 + 3^1)$, 6, 7 $(2 \times 2 + 3^1)$, 8, 9, 10, 11,...
On peut le vérifier sur des exemples : $25 = 2^4 + 3^2$, $2023 = 2^6 + 2^5 \times 3 + 2^3 \times 3^4 + 2 \times 3^5 + 3^6$
Ce dernier étant plus difficile à trouver !

Résultat D'une façon générale on peut construire une suite U comme une liste qui se construit progressivement de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 & = & 2 \\ U_{2n} & = & 2U_n \\ U_{2n+1} & = & U_{2n+1-3^k}, 3^k \end{cases}$$

avec k tel que 3^k est la plus grande valeur plus petite que $2n + 1$
La somme des éléments de U_n est égale à n.

Preuve Si $n = 0$ c'est fait !
Supposons que ce soit vrai jusqu'à $n - 1$
Si n est pair, $U_n = 2U_{\frac{n}{2}}$; d'après l'hypothèse de récurrence $\dfrac{n}{2}$ est la somme des $U\dfrac{n}{2}$ donc $n = 2 \times \dfrac{n}{2}$ est la somme des U_n
Si n est impair, $U_n = U_{n-3^k}, 3^k$;
si $n = 3^k$ $n - 3^k = 0$ et la suite est réduite à 3^k.
Si $n < 3^k$ $n - 3^k$ est pair et $n - 3^k$ est égal à la somme des termes de U_{n-3^k} et n est bien égal à la somme des termes de U_n.

La démonstration donne un algorithme un exemple avec 2023 permet de mieux comprendre la construction progressive de cette suite :

- 2023 est impair et la plus grande puissance de 3 plus petite que 2023 est $3^6 = 729$
  Donc $U_{2023} = U_{2023-729} = U_{1294}, 3^6$
- 1294 est pair donc :
  $U_{1294} = 2 \times U_{647}$
- 647 est impair
  $U_{647} = U_{404}, 3^5$ car $3^5 = 243$ et $647 - 243 = 404$
- 404 est pair
  $U_{404} = 2U_{202} = 4U_{101}$

- 101 est impair
  $U_{101} = U_{20},3^4$ car $101 - 3^4 = 20$
- 20 est pair
  $U_{20} = 2U_{10} = 4U_5$
- 5 est impair
  $U_5 = U_2,3 = 2,3$

$$U_{2023} = [u_{1294},3^6] = [2U_{647},3^6] = 2[U_{404},3^5],3^6] = [2u_{404},2\times 3^5,3^6] = [2^3U_{101},2\times 3^5,3^6]$$

$$= [2^3U_{20}],2^3\times 3^4,2\times 3^5,3^6] = [2^5U_5,2^3\times 3^4,2\times 3^5,3^6]$$

$$= [2^5[2,3],2^3\times 3^4,2\times 3^5,3^6] = [2^6,2^5\times 3,2^3\times 3^4,2\times 3^5,3^6]$$

et on a bien

$$2023 = 2^6 + 2^5\times 3 + 2^3\times 3^4 + 2\times 3^5 + 3^6$$

3.3.2 Somme de nombres

Expérimentalement :

$2 = 1 + 1$ et c'est la seule façon de faire.

$3 = 2 + 1$ ou bien $3 = 1 + 1 + 1$. Il y a deux façons de faire.

$4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1$; il y a trois façons de faire.

$5 = 2 + 3 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$; il y a quatre façons de faire.

On pourrait faire l'hypothèse qu'il y a $n - 1$ façons de faire pour n

On peut aussi s'apercevoir que pour $n = 5$ il n'y a qu'une décomposition de 5 termes, qu'une de 4 termes, qu'une de 3 termes et qu'une de 2 termes répondant à la contrainte. Est-ce encore le cas pour $n = 7$, $n = 8, \dots$?

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$: 7 termes.

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2$: 6 termes.

$7 = 1 + 1 + 1 + 2 + 2$: 5 termes.

$7 = 1 + 2 + 2 + 2$: 4 termes.

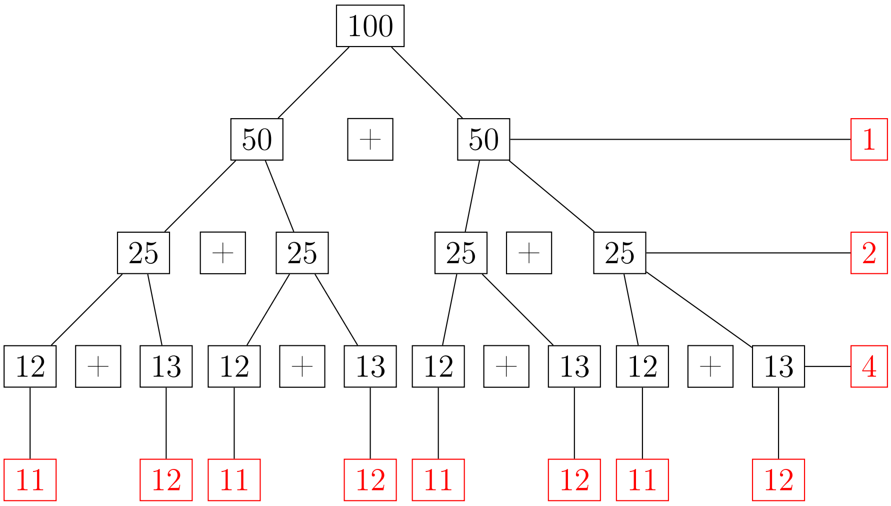
$7 = 3 + 2 + 2$: 3 termes.

$7 = 4 + 3$: 2 termes. Et il n'y a pas d'autres décompositions.

On peut alors essayer de démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, il y a exactement une décomposition additive de n ayant k termes pour $2 \leq k \leq n$.

On peut aussi poursuivre sur les exemples et essayer de décomposer un nombre pour s'assurer du résultat ;

Par exemple, pour 100, on pourrait penser dessiner un arbre, comme celui ébauché ci-dessous (en rouge apparaissent les décompositions dont la somme fait bien 99) :



Preuve formelle Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $k \in \{2,\dots,n\}$.
La division euclidienne de n par k nous dit qu'il existe un unique couple $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ tel que :

$$n = kq + r \text{ avec } 0 \leq r < k$$

n peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} n &= \underbrace{q + q + \cdots + q}_{k-r} + \underbrace{q + \cdots + q}_{r} + r \\ &= \underbrace{q + q + \cdots + q}_{k-r} + \underbrace{(q+1) + \cdots + (q+1)}_{r} \end{aligned}$$

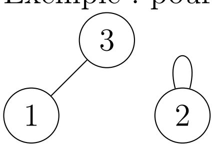
Pour 7, par exemple, quelle est la décomposition additive ayant $k = 3$ termes ?
$7 = 3 \times 2 + 1 = 2 + 2 + 3$
L'unicité découle de l'unicité du quotient et du reste dans la division euclidienne ; en effet, supposons qu'il y ait une autre décomposition de n en k termes, alors :

$$n = \sum_{i=1}^{a} q_1 + \sum_{i=a+1}^{k} q_1 + 1 = kq_1 + k - a$$

Mais comme $0 \leq k - a < k$, l'expression précédente est la l'expression de la division euclidienne de n par k et donc $q_1 = q$ et $k - a = r$.

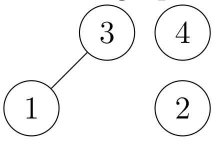
3.3.3 Permutation et carrés

Appelons $\overline{S_n} = \{1,2,\dots,2n-1\}$
On considère la relation R dans S_n définie par aRb si et seulement si $a + b = k^2$. Appelons G_n le graphe de cette relation.
Exemple : pour $n = 3$

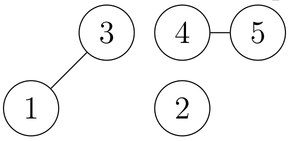


On voit que ce graphe n'est pas connexe, par conséquent il n'est pas possible de trouver une permutation de 1,2,3 répondant à la question.
On remarque aussi que 2 est relié à lui-même car son double est un carré. Cette relation ne pourra pas être prise en compte puisque dans une permutation chaque élément ne peut apparaître qu'une fois. Dans la suite on ne notera pas cette arête.

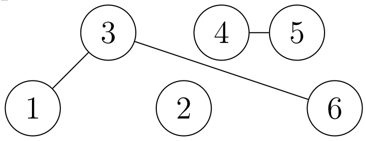
Ensuite les graphes successifs se construisent à partir du précédent :



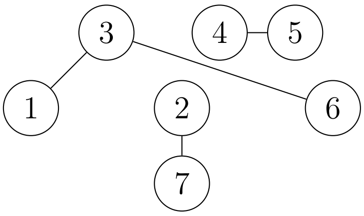
G_4



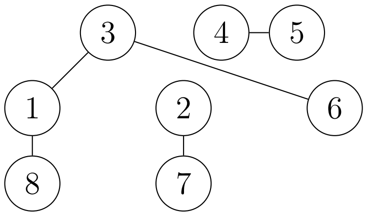
G_5



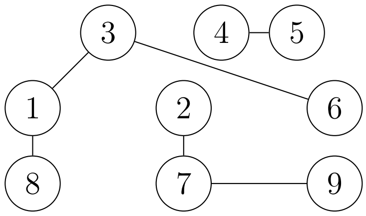
G_6



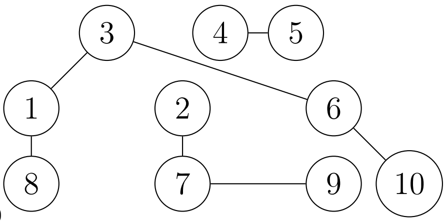
G_7



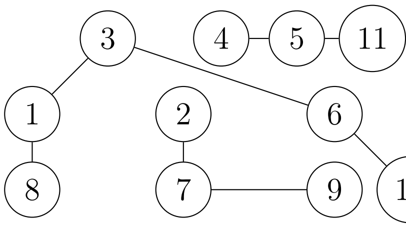
G_8



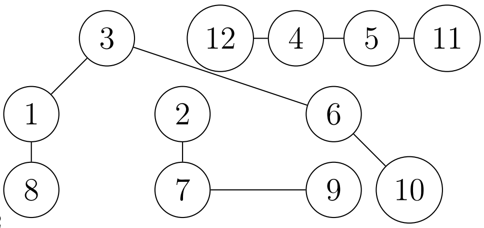
G_9



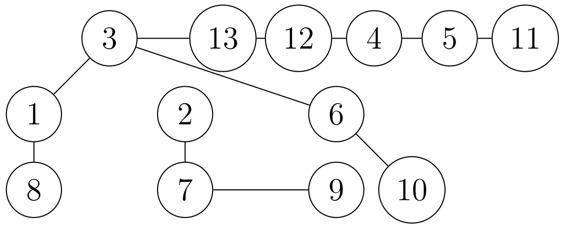
G_{10}



G_{11}

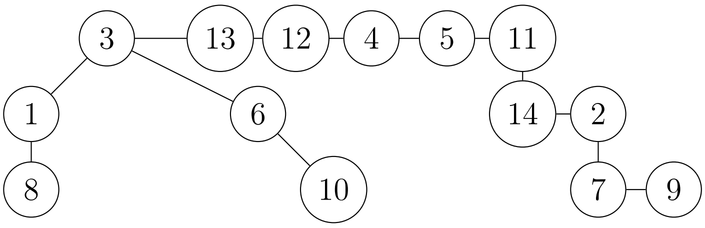


G_{12}



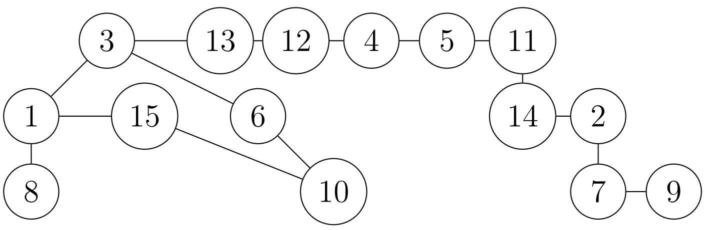
G_{13}

Jusqu'à 13 tous les graphes ne sont pas connexes, donc ne peuvent pas avoir de solution. Ici par exemple pour G_{13} il y a deux composantes connexes (2-7-9) et 8,1,3,6,10, 13,12,4,5,11).



G_{14}

G_{14} est le premier graphe connexe. Mais il a trois sommets de degré 1 (8, 9 et 10). Donc il ne peut pas exister de chaîne passant une fois et une seule sur chacun des sommets.



G_{15}

S_{15} est donc la première solution avec la permutation :

8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9

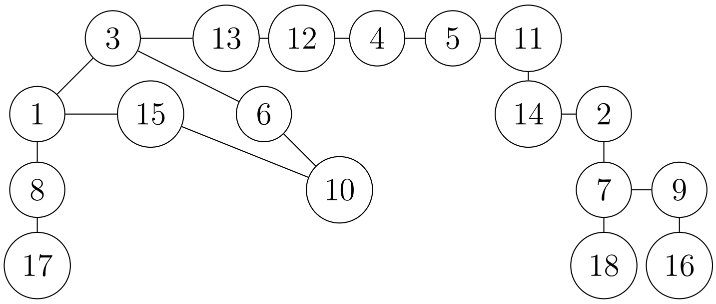
S_{16} est aussi une solution puisque 9+16=25

8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9,16

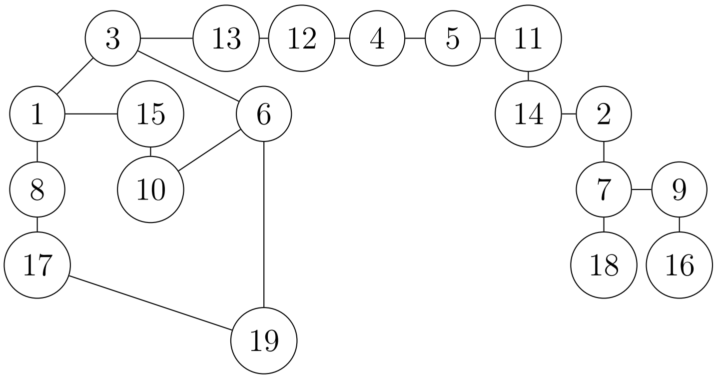
De même que S_{17} :

17,8,1,15,10,6,3,13,12,4,5,11,14,2,7,9,16

En revanche, S_{18} n'a pas de solution, car le graphe G_{18} a trois sommets de degré 1 (16, 17, 19) :

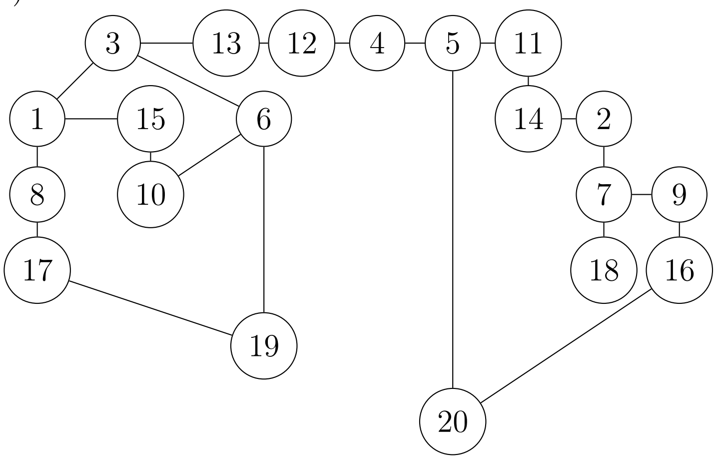


G_{18}



G_{19}

G_{19} ne possède pas de chaîne hamiltonienne. Même s'il n'a que deux sommets de degré 1 (18 et 16).



G_{20}

G_{20} n'a pas de solution.

Au passage, on peut déterminer le degré du sommet k dans le graphe G_n comme étant :

$$d(k) = \lfloor \sqrt{k+n} \rfloor - \lfloor \sqrt{k} \rfloor$$

En effet, le degré d'un sommet k dans le graphe G_n est le nombre de carré compris entre $k+1$ et $k+n$ dans $\overline{S_n}$. C'est à dire le nombre de carrés inférieurs ou égaux à $k+n$ moins le nombre de carrés strictement inférieur à $k+1$ mais sans considérer 1 et 0. D'où le résultat.

Malheureusement les degrés n'ont d'importance dans la détermination d'un graphe hamiltonien que s'ils sont tous supérieurs à l'ordre du graphe sur deux. Mais ce n'est jamais le cas pour $n \geq 8$.

En effet, cherchons n pour que pour tout $k \leq n$ $d(k) \geq \frac{n}{2}$. Ça doit être vrai en particulier pour $k = 1$.

Mais $d(1) = \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor - 1 \geq \frac{n}{2}$ comme $\sqrt{n+1} \geq \lfloor\sqrt{n+1}\rfloor$ on devrait avoir : $\sqrt{n+1} \geq \frac{n}{2} - 1$ soit $n \leq 8$.

G_{21} rajoute deux arètes : 21-4 et 21-15

G_{22} rajoute deux arètes : 22-3 et 22-14 et est hamiltonien :

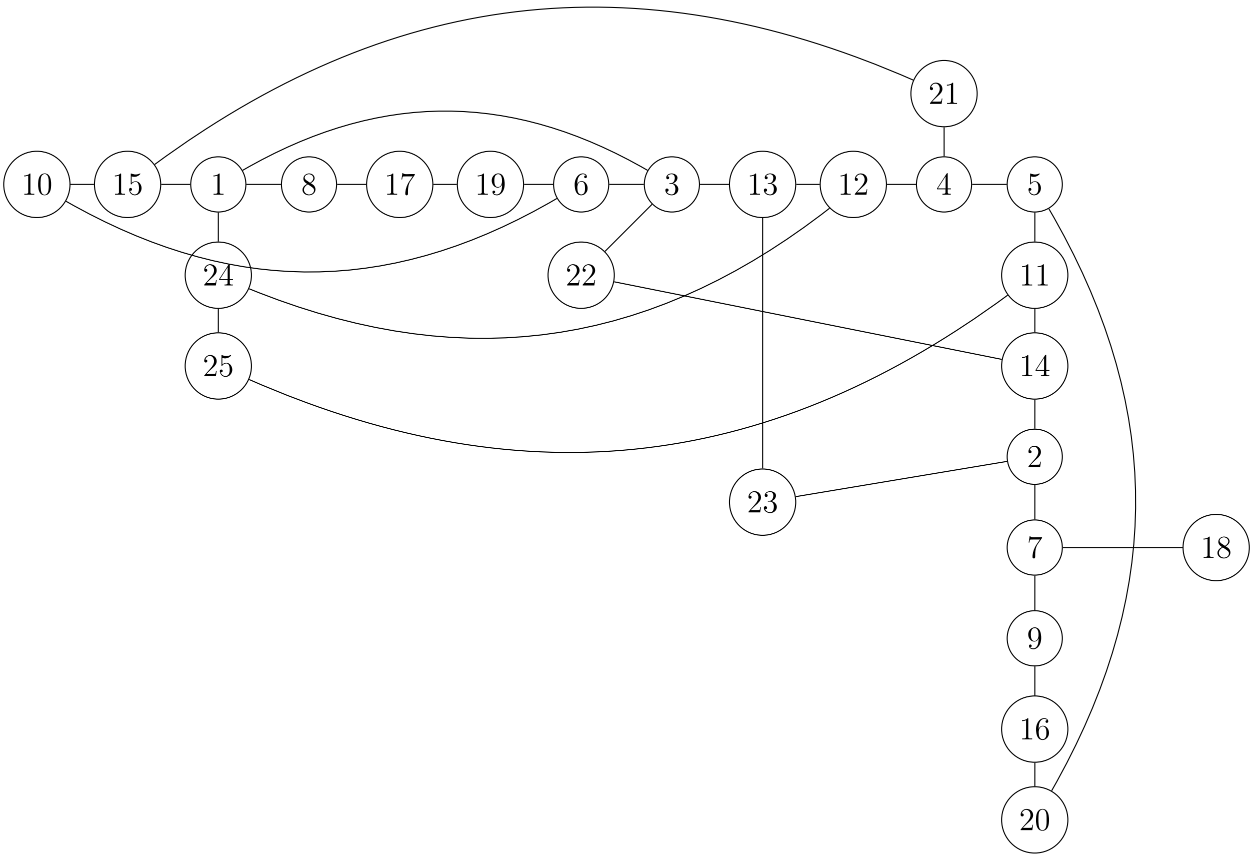
18, 7, 9, 16, 20, 5, 11, 14, 2, 23, 13, 12, 4, 21, 15, 10, 6, 19, 17, 8, 1, 3, 22

G_{23} rajoute deux arètes : 23-2 et 23-13 est aussi hamiltonien :

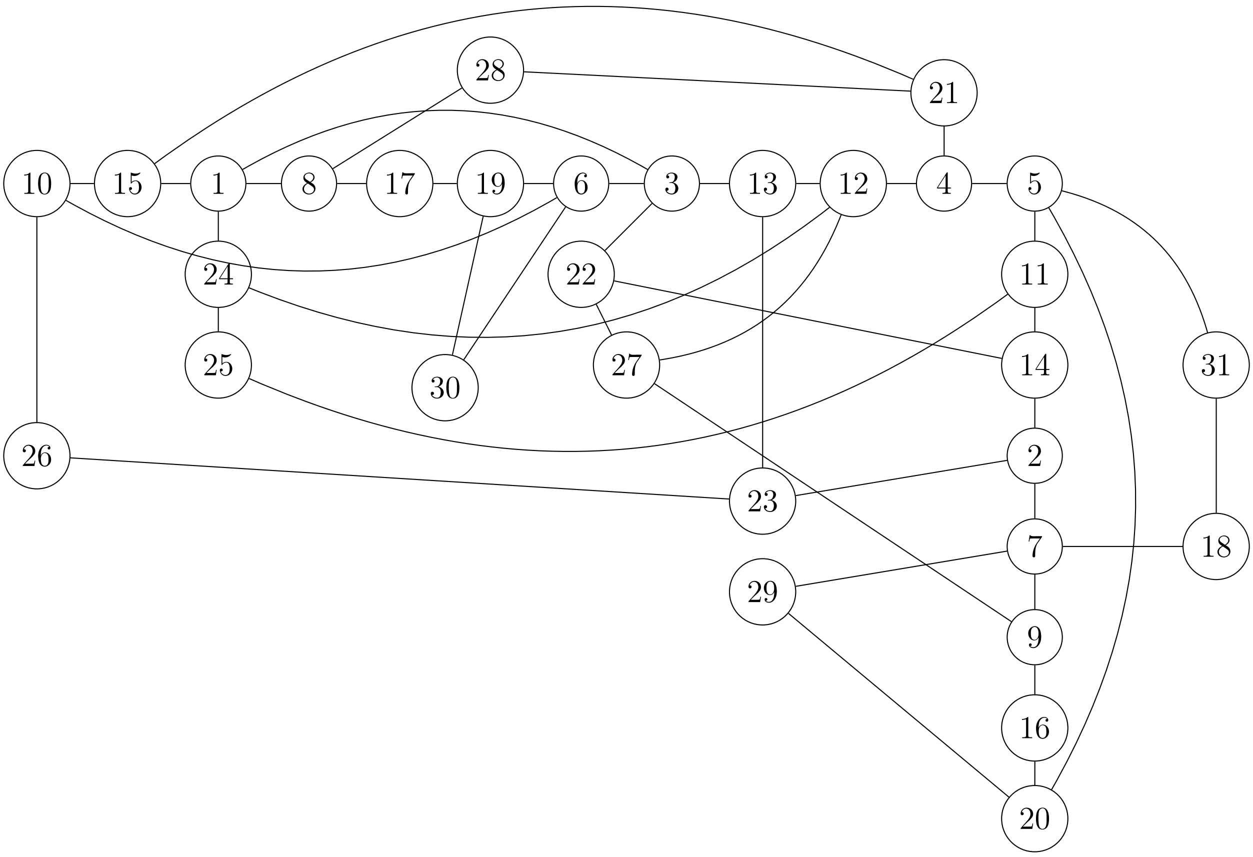
18, 7, 9, 16, 20, 5, 11, 14, 2, 23, 13, 12, 4, 21, 15, 10, 6, 19, 17, 8, 1, 3, 22

G_{24} rajoute deux arètes : 24-1 et 24-12 ; mais lui, n'est pas hamiltonien !

G_{25} rajoute deux arètes : 25-11 et 25-24



2, 23, 13, 12, 24, 25, 11, 14, 22, 3, 1, 8, 17, 19, 6, 10, 15, 21, 4, 5, 20, 16, 9, 7, 18



G_{31} est hamiltonien : 1,24,25,11,14,22,27,9,16,20,29,7,18,31,5,4,12,13,3,6,30,19,17,8,28,21,15,10,26,23,2

Résultat

Résultat : il y a une solution pour tout $n \geq 25$.
Ce résultat est dû à Robert Gerbicz en janvier 2018.
Un exemple pour $n = 100$:
1 80 64 36 85 84 16 48 73 71 50 94 75 69 100 96 4 5 76 24 97 72 49 95 74 47 17 19 45 99 22 59 62 82 39 25 11 70 51 30 91 53 28 93 7 57 43 78 66 34 87 13 68 32 89 55 9 27 54 90 31 18 46 98 2 14 86 35 65 79 42 58 63 81 40 41 23 26 38 83 61 60 21 15 10 6 3 33 67 77 92 52 29 20 44 37 12 88 56 8
La méthode utilisée est un algorithme récursif fondé sur une table initiale des solutions de $n = 25$ à $n = 2032$ construite sur un résultat préalable qui disait que pour tout m, $\dfrac{71 \times 25^m - 1}{2}$ est aussi une solution.
L'idée de l'algorithme est construit sur un assemblage de solutions ;
Si a est une suite qui est solution pour n. Il définit $T(c) = 25 \times a[1] + c$,$25 \times a[2] - c, \ldots$,$25 \times a[n] + (-1)^{n+1}c$ pour $c = \in \{-12..12\}$. $R(a)$
Si n est pair, $a[1] = 1$ et $a[n] = 3$ alors :
1,$T(-1)$,$T(1)$,$R(T(-7))$,$T(6)$,$T(-6)$,$R(T(0))$,11,$R(T(-5))$,5,4,12,$T(-12)$,$T(12)$,
$R(T(7))$,$T(-8)$,$R(T(2))$,$T(-3)$,9,7,$T(4)$,$T(-4)$,10,6,$T(5)$,$R(T(-11))$,2,$T(-2)$,8,$T(3)$,
$R(T(-9))$,$R(T(9))$,$T(-10)$,$T(10)$,$T(11)$,$R(T(8))$,3 est une bonne suite.
En effet : dans $T(c)$, $25 \times a[k] + / - c + 25 \times a[k+1] - / + c = 25(a[k] + a[k+1]))$ qui est un carré. Pour faire la "colle" entre les 25 suites on utilise les valeurs de 1 à 12.
Par exemple si la suite de départ est la suite pour 35 :
1,8,28,21,4,32,17,19,6,30,34,15,10,26,23,13,12,24,25,11,5,20,29,35,14,2,7,18,31,33,16,

9,27,22,3
On construit la suite pour $n = 887$ qui va être :
$1, \underbrace{24,201,699,526,\ldots 226,674,551,74}_{T(1)}, \underbrace{26,199,\ldots,76}_{T(1)}, \underbrace{68,\ldots,18}_{R(T(-7))}, \ldots\ldots \underbrace{83,\ldots,33}_{R(T(8))}, 3$
Ce premier résultat montre qu'il existe une infinité de solutions.
Pour démontrer finalement le résultat (et trouver un algorithme) Robert Gerbicz utilise la construction de suite :

$$49 * n + a \text{ avec } a \in \{24..72\}$$

Ce résultat permet d'atteindre tous les entiers. La construction est à peu près identique à celle exposée ci-dessus mais en construisant maintenant deux suites, une de longueur n et l'autre de longueur $n+1$:

$$T(c,0) = 49 \times seq0[1] + c, 49 * seq0[2] - c, .., 49 * seq0[n] + (-1)^(n+1) * c$$
$$T(c,1) = 49 * seq1[1] + c, 49 * seq1[2] - c, .., 49 * seq1[n+1] + (-1)^(n+2) * c$$

pour tout $c \in \{-24..24\}$ et en utilisant maintenant les nombres de 1 à 24 pour "coller" les 49 suites.
Remarque : si on veut seulement un chemin hamiltonien on peut utiliser $25 \times n + a$ en utilisant $a[1] = 1$ et pour n pair $a[n] = 2$ et pour n impair $a[n] = 3$.

Pour être plus didactique

Si on appelle une suite de nombres possédant la propriété « la somme de deux termes consécutifs est un carré » (par exemple 1, 15, 10, 6, 19), on peut définir des opérations sur une suite régulière :

1. M : multiplier par a^2 : en multipliant chaque terme de la suite par un carré on obtient une nouvelle suite régulière. Exemple : M : 1, 15, 10, 6, 19 $\xrightarrow{\times 9}$ 9, 135, 90, 54, 171. La preuve est simple : $a_i \times a^2 + a_{i+1} \times a^2 = a^2(a_i + a_{i+1})$ et comme $a_i + a_{i+1}$ est un carré, $a_i \times a^2 + a_{i+1} \times a^2$ est aussi un carré.
2. R : renverser : en renversant une suite régulière, on obtient encore une suite régulière. Exemple : R : 1, 15, 10, 6, 19 $\longrightarrow$ 19, 6, 10, 15, 1 est aussi régulière. Ça vient bien sûr de la commutativité de l'addition.
3. T : ajouter une constante ; Soit c une constante. Ajouter une constante à une suite revient à ajouter la constante au rangs impairs et soustraire la même constante aux rangs pairs.

   Exemples : T : 1, 15, 10, 6, 19 $\xrightarrow{1}$ 2, 14, 11, 5, 20.

   T : 1, 15, 10, 6, 19 $\xrightarrow{-1}$ 0, 16, 9, 7, 18.

   Là aussi la preuve est évidente : $a_i + c + a_{i+1} - c = a_i + a_{i+1}$ qui est un carré par hypothèse.

Remarque : il faut être prudent avec l'ajout, parce qu'il peut amener construire des suites ayant des termes identiques. par exemple A : 6, 10 $\xrightarrow{2}$ 8, 8. Par conséquent il faut que l'écart entre deux nombres consécutifs soit suffisant pour ne pas risquer ce problème.
Ces opérations permettent donc de construire des suites régulières à partir d'une suite régulière. L'idée sera donc de joindre les suites construites pour obtenir une nouvelle suite régulière en les juxtaposant et en éventuellement insérant une ou des valeurs entre elles.

C'est ce qui est fait avec l'exemple pour passer de $n = 35$ à $n = 887$ en multipliant par 25 et en ajoutant c allant de -12 à 12.

-12 : 13,212,688,537,88,812,413,487,138,762,838,387,238,662,563,337,288,612,613,287,113,512,713,887, 338,62,163,462,763,837,388,237,663,562,63

-11 : 14,211,689,536,89,811,414,486,139,761,839,386,239,661,564,336,289,611,614,286,114,511,714,886, 339,61,164,461,764,836,389,236,664,561,64

-10 : 15,210,690,535,90,810,415,485,140,760,840,385,240,660,565,335,290,610,615,285,115,510,715,885, 340,60,165,460,765,835,390,235,665,560,65

-9 : 16,209,691,534,91,809,416,484,141,759,841,384,241,659,566,334,291,609,616,284,116,509,716,884, 341,59,166,459,766,834,391,234,666,559,66

-8 : 17,208,692,533,92,808,417,483,142,758,842,383,242,658,567,333,292,608,617,283,117,508,717,883, 342,58,167,458,767,833,392,233,667,558,67

-7 : 18,207,693,532,93,807,418,482,143,757,843,382,243,657,568,332,293,607,618,282,118,507,718,882, 343,57,168,457,768,832,393,232,668,557,68

-6 : 19,206,694,531,94,806,419,481,144,756,844,381,244,656,569,331,294,606,619,281,119,506,719,881, 344,56,169,456,769,831,394,231,669,556,69

-5 : 20,205,695,530,95,805,420,480,145,755,845,380,245,655,570,330,295,605,620,280,120,505,720,880, 345,55,170,455,770,830,395,230,670,555,70

-4 : 21,204,696,529,96,804,421,479,146,754,846,379,246,654,571,329,296,604,621,279,121,504,721,879, 346,54,171,454,771,829,396,229,671,554,71

-3 : 22,203,697,528,97,803,422,478,147,753,847,378,247,653,572,328,297,603,622,278,122,503,722,878, 347,53,172,453,772,828,397,228,672,553,72

-2 : 23,202,698,527,98,802,423,477,148,752,848,377,248,652,573,327,298,602,623,277,123,502,723,877, 348,52,173,452,773,827,398,227,673,552,73

-1 : 24,201,699,526,99,801,424,476,149,751,849,376,249,651,574,326,299,601,624,276,124,501,724,876, 349,51,174,451,774,826,399,226,674,551,74

0 : 25,200,700,525,100,800,425,475,150,750,850,375,250,650,575,325,300,600,625,275,125,500,725,875, 350,50,175,450,775,825,400,225,675,550,75

1 : 26,199,701,524,101,799,426,474,151,749,851,374,251,649,576,324,301,599,626,274,126,499,726,874, 351,49,176,449,776,824,401,224,676,549,76

2 : 27,198,702,523,102,798,427,473,152,748,852,373,252,648,577,323,302,598,627,273,127,498,727,873, 352,48,177,448,777,823,402,223,677,548,77

3 : 28,197,703,522,103,797,428,472,153,747,853,372,253,647,578,322,303,597,628,272,128,497,728,872, 353,47,178,447,778,822,403,222,678,547,78

4 : 29,196,704,521,104,796,429,471,154,746,854,371,254,646,579,321,304,596,629,271,129,496,729,871, 354,46,179,446,779,821,404,221,679,546,79

5 : 30,195,705,520,105,795,430,470,155,745,855,370,255,645,580,320,305,595,630,270,130,495,730,870, 355,45,180,445,780,820,405,220,680,545,80 6 : 31,194,706,519,106,794,431,469,156,744,856,369,256,644,581,
356,44,181,444,781,819,406,219,681,544,81

7 : 32,193,707,518,107,793,432,468,157,743,857,368,257,643,582,318,307,593,632,268,132,493,732,868, 357,43,182,443,782,818,407,218,682,543,82

8 : 33,192,708,517,108,792,433,467,158,742,858,367,258,642,583,317,308,592,633,267,133,492,733,867, 358,42,183,442,783,817,408,217,683,542,83

9 : 34,191,709,516,109,791,434,466,159,741,859,366,259,641,584,316,309,591,634,266,134,491,734,866, 359,41,184,441,784,816,409,216,684,541,84

10 : 35,190,710,515,110,790,435,465,160,740,860,365,260,640,585,315,310,590,635,265,135,490,735,865, 360,40,185,440,785,815,410,215,685,540,85

11 : 36,189,711,514,111,789,436,464,161,739,861,364,261,639,586,314,311,589,636,264,136,489,736,864, 361,39,186,439,786,814,411,214,686,539,86

S_{new} = 1 , 8 , **rev**(shift(49S, – 11)) , **rev**(shift(49S, – 16)) , shift(49L, – 1) , **rev**(shift(49L, 1)) , 14 , 22 ,
rev(shift(49L, 14)) , 18 , **rev**(shift(49L, 10)) , shift(49L, 13) , 21 , 4 , shift(49S, – 4) , **rev**(shift(49L, 6)) ,
shift(49L, 17) , shift(49S, – 24) , shift(49L, 24) , shift(49S, – 17) , shift(49S, – 10) , **rev**(49L) , shift(49L, 2) ,
rev(shift(49S, – 8)) , **rev**(shift(49S, – 19)) , **rev**(shift(49L, 22)) , **rev**(shift(49S, – 22)) , **rev**(shift(49L, 19)) ,
13 , 12 , **rev**(shift(49L, 4)) , shift(49S, – 2) , **rev**(shift(49L, 8)) , 24 , **rev**(shift(49L, 16)) , shift(49L, 7) ,
rev(shift(49S, – 3)) , shift(49S, – 14) , shift(49S, – 13) , 10 , 6 , 19 , **rev**(shift(49L, 11)) , shift(49S, – 9) ,
shift(49L, 9) , 17 , shift(49L, 15) , 23 , 2 , 7 , 9 , 16 , 20 , **rev**(shift(49L, 12)) , **rev**(shift(49S, – 12)) ,
rev(shift(49S, – 15)) , 15 , **rev**(shift(49S, – 18)) , **rev**(shift(49L, 23)) , **rev**(shift(49S, – 23)) ,
rev(shift(49L, 18)) , shift(49L, 5) , **rev**(shift(49S, – 5)) , 5 , 11 , shift(49L, 21) , shift(49S, – 20) ,
shift(49S, – 7) , **rev**(shift(49L, 3)) , shift(49L, 20) , shift(49S, – 21) , shift(49S, – 6) , 3

L_{new} = 1 , shift(49S, – 14) , **rev**(shift(49S, – 24)) , **rev**(shift(49L, 17)) , shift(49L, 6) , **rev**(shift(49S, – 4)) ,
shift(49S, – 13) , 10 , 6 , 19 , **rev**(shift(49L, 11)) , 4 , 21 , **rev**(shift(49L, 13)) , shift(49L, 10) , 18 ,
shift(49L, 14) , 22 , 3 , **rev**(shift(49S, – 6)) , shift(49L, 8) , 16 , shift(49L, 16) , 24 , shift(49S, – 9) ,
shift(49L, 9) , 17 , shift(49L, 15) , 23 , 2 , 14 , shift(49L, 1) , 9 , 7 , **rev**(shift(49L, – 1)) , shift(49L, 24) ,
shift(49S, – 17) , **rev**(shift(49S, – 21)) , **rev**(shift(49L, 20)) , 12 , **rev**(shift(49L, 4)) , shift(49L, – 2) ,
rev(shift(49L, 2)) , shift(49L, 21) , shift(49S, – 20) , shift(49S, – 7) , shift(49L, 7) , 15 , **rev**(shift(49S, – 18)) ,
rev(shift(49L, 23)) , 49L , **rev**(shift(49S, – 10)) , shift(49L, 12) , 20 , 5 , **rev**(shift(49S, – 8)) ,
rev(shift(49S, – 19)) , **rev**(shift(49L, 22)) , **rev**(shift(49S, – 22)) , **rev**(shift(49L, 19)) , 13 ,
rev(shift(49S, – 16)) , shift(49L, 18) , shift(49S, – 23) , **rev**(shift(49S, – 15)) , **rev**(shift(49S, – 12)) ,
shift(49S, – 5) , **rev**(shift(49L, 5)) , shift(49S, – 3) , shift(49L, 3) , 11 , shift(49S, – 11) , 8

Figure 3.1 – Les formules pour passer d'une suite associée à une autre (rev pour R, shift pour T)

12 :37,188,712,513,112,788,437,463,162,738,862,363,262,638,587,313,312,588,637,263,137,488,737,863, 362,38,187,438,787,813,412,213,687,538,87

Mais en fait, ce qui est intéressant pour en fabriquer une unique suite régulière est de regarder les extrémités puisque on sait que ces suites sont régulières. On dispose de plus des nombres de 1 à 12 pour faire les liens :

C'est là qu'intervient la suite : 1,$T(-1)$,$T(1)$,$R(T(-7))$,$T(6)$,$T(-6)$,$R(T(0))$,11,$R(T(-5))$,5,4,12,$T(-12)$,T $R(T(7))$,$T(-8)$,$R(T(2))$,$T(-3)$,9,7,$T(4)$,$T(-4)$,10,6,$T(5)$,$R(T(-11))$,2,$T(-2)$,8,$T(3)$, $R(T(-9))$,$R(T(9))$,$T(-10)$,$T(10)$,$T(11)$,$R(T(8))$,3 dont on peut vérifier que ça fonctionne pour toute suite.

Cette première partie démontre qu'il y a une infinité de solutions. En effet en partant de $n = 35$ on peut fabriquer une suite régulière pour $n = 25 \times 35 + 12 = 887$; donc fabriquer une suite régulière pour $n = 25 \times 887 + 12 = 22187$ donc pour 554687, 13867187, 346679687, etc.

Ce qu'il reste à faire est de fabriquer des suites régulières pour tout $n \geq 25$.

On utilise pour ça un autre concept : les suites associées :

En utilisant deux suites régulières associées, on crée une nouvelle suite régulière. On dira que deux suites sont associées si :

- elles sont toutes les deux régulières,
- la première S à une longueur n et la seconde L une longueur $n + 1$.
- Elles commencent toutes les deux à 1 et se termine si la longueur est impair à 3 et si elle est paire à 8.
- Si un nombre apparaît dans S à une position paire (resp. impaire), il apparaît aussi dans L à une position paire (resp. impaire).

L'idée est alors de construire deux suites associées à partir de deux suites associées ce qui permet de continuer le processus, donc de mettre en place une récurrence. On utilise par exemple une formule qui d'une paire de suites associées de longueur n on construit une paire de suites associées de longueur $49n + 50$ (49 étant le carré impair suivant 25).

La formule utilisée pour 50 qui a été trouvée sur ordinateur est donnée dans la figure 3.1.

L'idée est donc de généraliser pour trouver plus de suites associées à partir de deux suites associées. À partir d'une suite associée de longueur n on obtient des suites associées de longueur $49n + c$ avec c allant de 24 à 72. On obtient ainsi 49 différentes formules de suites associées à partir de deux suites associées de longueur n et $n + 1$.

Remarque : la quatrième condition des suites associées trouve ici son importance pour éviter qu'il y ait des répétitions. Comme les positions d'une suite dans S et L sont à des places toutes deux paires (reps. impaires), il ne pourra pas y avoir de chevauchement, donc des nombres répétés.

Si on suppose qu'il existe des suites associées de longueur entre 99 et 4900 (ce que l'on peut vérifier sur ordinateur) on pourra construire de nouvelles suites associées pour tout n. Par exemple pour $49 \times 99 + 50$; donc on va créer des paires associées jusqu'à 4923. Mais on peut continuer et $4924 = 49 \times 100 + 24$ et ainsi de suite. Comme on peut en fabriquer 49 nouvelles à partir d'une, la récurrence fonctionne.

Ce qui démontre que le théorème est vrai pour tout $n \geq 99$. Il suffit (en utilisant un bon ordinateur !) qu'il existe des solutions entre 25 et 98, ce qui est le cas.

On voit en particulier qu'on construit des suites commençant à 3 et finissant à 8, donc on a construit des cycles hamiltoniens et pas seulement des chemins.

3.3.4 Dessins à main levée

Longueur de la ligne (Fig. 3.2)

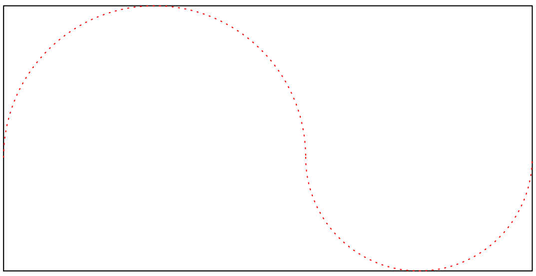


Figure 3.2 – Longueur de la ligne

Appelons l et L les largeurs et longueurs du rectangle. Alors :

$$l + L = 3$$

Appelons d et D les diamètres des demi-cercles. Alors la longueur $\mathscr{L}$ des deux demi-cercles est :

$$\pi\frac{d}{2} + \pi\frac{D}{2} = \pi\frac{d+D}{2}$$

Mais $d + D = L$ et $d + D = 2 \times l$

donc $L = 2 \times l$ et finalement $l = 1$ et $L = 2$ et $\mathscr{L} = \pi$

Amoncellement de carrés (Fig. 3.3)

Chaque carré a un côté de longueur 4. Plaçons nous dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans ces conditions les points O, A, B, D ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} O(0;0) \\ A(16;4) \\ B(16;8) \\ D(12;12) \end{cases}$$

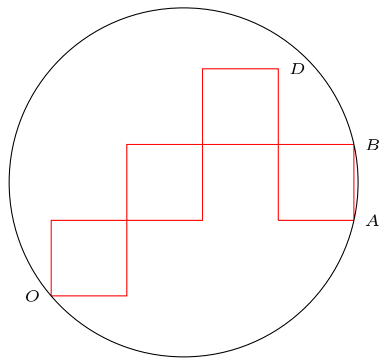


Figure 3.3 – Figure tracée

Le centre I du cercle est à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la droite (OD) d'équation $y = x$
Par conséquent les coordonnées de I sont $(6; 6)$ et le rayon du cercle vaut $\sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$
L'aire du disque vaut donc : 72π

L'aire du disque (Fig. 3.4)
On peut tracer plus précisément cette figure, rajouter quelques segments et nommer quelques points :

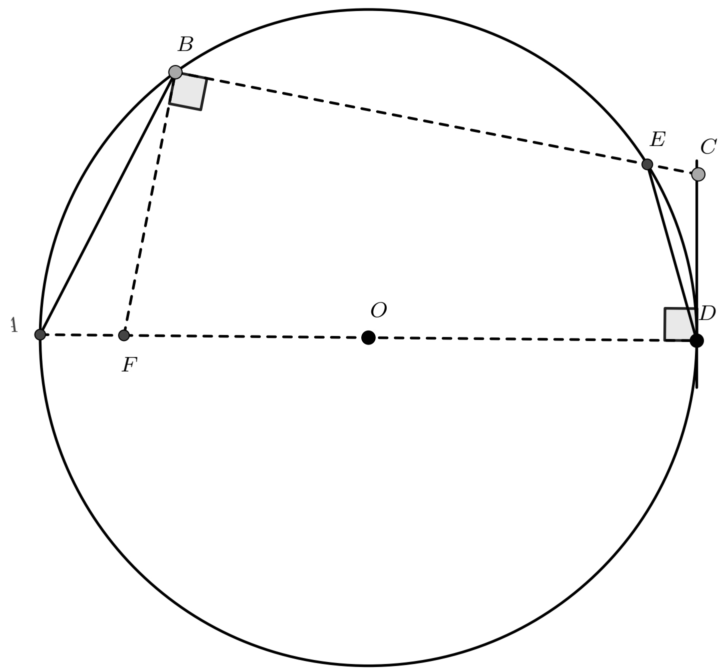


Figure 3.4 – Figure annotée

Le quadrilatère $ABED$ est inscrit dans le cercle, donc ses angles opposés ont comme somme π.
On en déduit :

$$\widehat{ABC} + \widehat{EDA} = \pi \ (1)$$

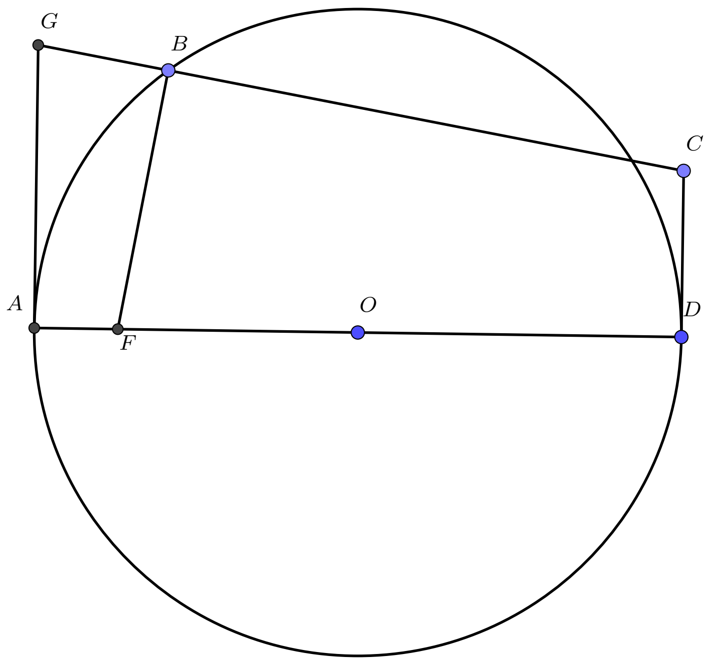


Figure 3.5 – Autre construction

$$\widehat{BAF} + \widehat{BED} = \pi \ (2)$$

De cette première égalité on déduit : $\widehat{ABF} = \widehat{EDC}$
De la deuxième égalité, on déduit : $\widehat{BAF} + \pi - \widehat{CED} = \pi$ donc $\widehat{BAF} = \widehat{CED}$.
En utilisant la deuxième égalité on en déduit que les triangles ABF et EDC sont semblables.
Comme par hypothèse : $CD = 2$ et $BF = 3$, le coefficient de proportionnalité vaut $\frac{2}{3}$ (donc, au passage, $EC = \frac{2}{3}$).
La puissance de C par rapport au cercle vaut d'une $CE \times CB = CD^2 = 4$. Donc $CB = 6$.
La diagonale au carré du quadrilatère $FBCD$ vaut d'une part $2^2 + (2R-1)^2$ et d'autre part $6^2 + 3^2 = 45$
Donc :

$$(2R-1)^2 = 41 \text{ donc } R = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

Une autre solution
On peut construire le quadrilatère $AFBG$ comme indiqué sur la figure 3.5. Il est clair que les deux quadrilatères $AFBG$ et $DCBF$ sont semblables. En effet les angles de ces deux quadrilatères ont même mesure (deux angles droits et des angles à côtés perpendiculaires).
Le rapport de proportonnalité vaut 2 ($AF = 1$ et $CD = 2$ par hypothèse). Donc $BC = 6$. Et, comme précédemment :
La diagonale au carré du quadrilatère $FBCD$ vaut d'une part $2^2 + (2R-1)^2$ et d'autre part $6^2 + 3^2 = 45$
Donc :

$$(2R-1)^2 = 41 \text{ donc } R = \frac{1+\sqrt{41}}{2}$$

3.3.5 La frise

Soit O le centre du dernier cercle (Voir figure 3.6)

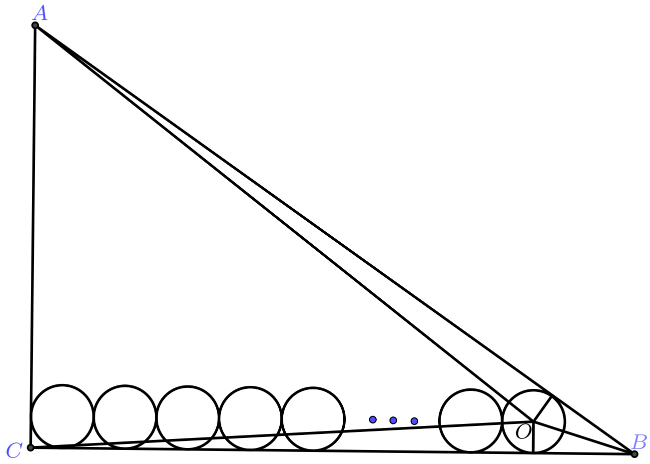


Figure 3.6 – Nommons quelques points

Le triangle BOA a comme aire :

$$A_1 = \frac{c \times r}{2}$$

Le triangle BOC a comme aire :

$$A_2 = \frac{a \times r}{2}$$

Le triangle COA a comme aire :

$$A_3 = \frac{b \times (2n-1)r}{2}$$

La somme des aires de ces trois triangles est l'aire du triangle ABC donc :

$$a \times b = c \times r + a \times r + b \times (2n-1)r$$

$$n = \frac{ab - cr - ar + br}{2br}$$

Mais alors, supposons que les côtés du triangle soient remplis de cercle comme indiqué sur la figure 3.7. Tous les cercles qui semblent tangents à un autre cercle ou à une droite le sont bien !
Est-il possible d'obtenir une telle figure ?
En supposant qu'il y ait n cercles le long de CB.
Le triangle CBA rectangle en C a comme angle :

$$\hat{C} = \frac{\pi}{2}, \hat{B} = \frac{\pi}{6}, \hat{A} = \frac{\pi}{3}$$

en effet les centres des trois cercles tangents vers le sommet A forment un triangle équilatéral et les centres sont situés sur des droites parallèles aux côtés.
Calculons les distances a, b et c en fonction de r.

$$a = (2n-1)r + \frac{r}{2-\sqrt{3}}$$

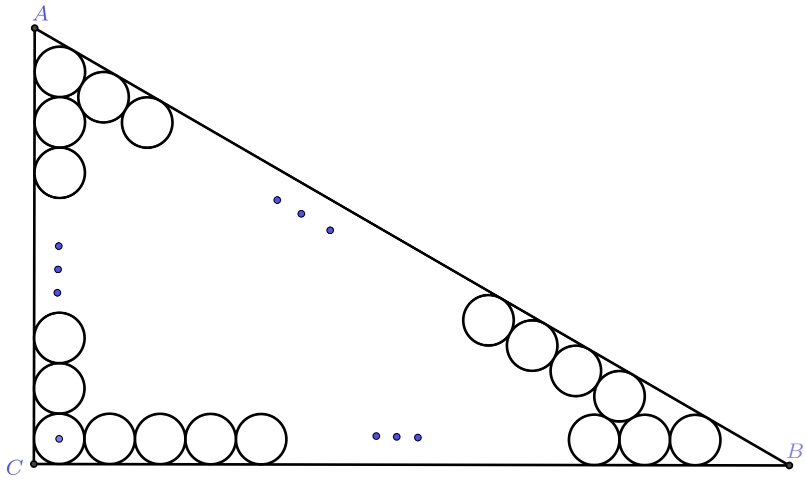
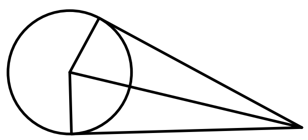


Figure 3.7 – Un entourage de cercles



En effet la distance entre le dernier point de tangence et A que l'on appelle x vérifie :

$$\frac{r}{x} = \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} = (2n-1)r + r(2+\sqrt{3}) = (2n+1+\sqrt{3})r$$

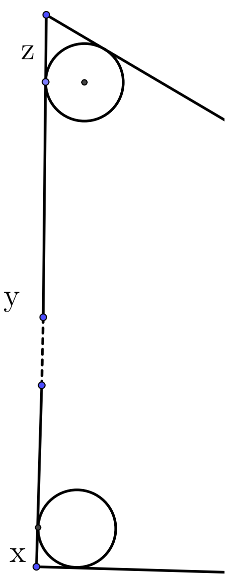
mais :

$$\frac{b}{a} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Donc :

$$b = (2n+1+\sqrt{3})r \times \sqrt{3} = ((2n+1)\sqrt{3}+3)r$$

Appelons p le nombre de cercles le long de AC et mesurons encore la longueur b :



$$b = x + y + z = r + (2p-2)r + \frac{3r}{\sqrt{3}} = r(2p-1+\sqrt{3})$$

Donc :

$$r(2p-1+\sqrt{3}) = ((2n+1)\sqrt{3}+3)r$$

$$2p-1+\sqrt{3} = (2n+1)\sqrt{3}+3$$

$$p = n\sqrt{3}+2$$

p ne peut donc être entier.
On pourrait se poser de la même façon s'il peut y avoir un nombre entier de cercles placés comme indiqué le long de BA. Ce sont des calculs analogues qui là encore permettent de répondre par la négative.
On peut alors se poser la question de savoir si on met le maximum de cercles entiers le long des deux côtés, le nombre total de cercles en fonction de n. Dans ce cas, le triangle ne serait pas nécessairement d'angles $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{6}$, $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$...A suivre...
Après, on peut se poser la question dans un triangle équilatéral. Si n est le nombre de cercles sur le côté AB (par exemple) quel est le rayon des cercles en fonction de AB et n.
Est-ce qu'il existe un triangle quelconque qui pourrait être encerclé de cercles ? SI on donne un triangle et un rayon, quel est le maximum de cercle qu'on peut mettre, tangents aux côtés, de telle sorte qu'ils ne se chevauchent pas ?

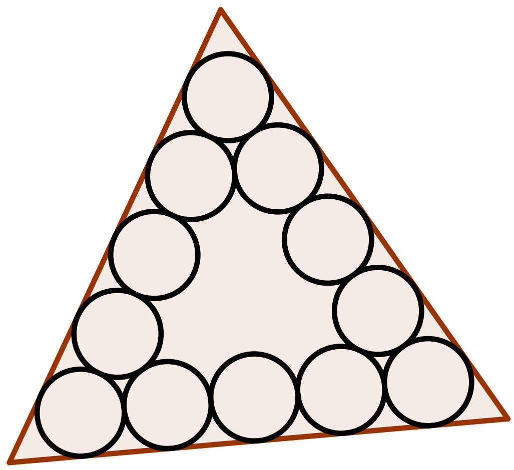
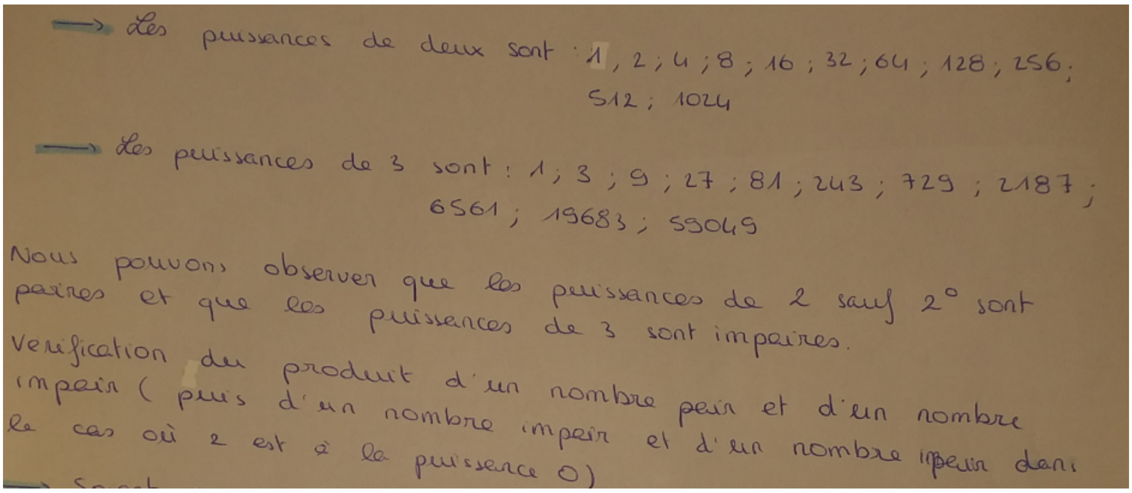


Figure 3.8 – Le cas du triangle équilatéral

3.4 Dans les classes

Beaucoup de réponses sont arrivées cette année, marque d'un intérêt plus grand du fait des cinq problèmes présentés ? Peut-être ! En tout cas, beaucoup de réponses ont été envoyées au jury du Rallye !



→ Les puissances de deux sont : 1 , 2 ; 4 ; 8 ; 16 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1024

→ Les puissances de 3 sont : 1 ; 3 ; 9 ; 27 ; 81 ; 243 ; 729 ; 2187 ; 6561 ; 19683 ; 59049

Nous pouvons observer que les puissances de 2 sauf 2^0 sont paires et que les puissances de 3 sont impaires.

Verification du produit d'un nombre pair et d'un nombre impair (puis d'un nombre impair et d'un nombre impair dans le cas où 2 est à la puissance 0)

Figure 3.9 – Un extrait de l'étude sur la parité des termes de la somme

3.4.1 Des 2 et des 3

Pour ce premier problème, peu de classes ont essayé de résoudre le problème avec des exposants non nuls. Nous avions pourtant volontairement laissé l'opportunité de remarquer que la solution était triviale lorsqu'on utilisait les puissances nulles et que, si problème il y a c'est lorsque α et β ne sont pas tous les deux nuls simultanément ; les puissances de 2 sont paires, les puissances de 3 sont impaires, donc nécessairement si on peut trouver une telle somme pour un nombre impair, il faudra utiliser 2^0. C'est certainement un questionnement trop éloigné de ce qui est fait en classe où la question ne peut pas être remise en cause. Tant pis, nous essaierons d'être plus explicites les fois suivantes. En même temps, avec ce problème rapidement traité, les élèves se sont pris au jeu et ont cherché aussi les autres problèmes. Une classe, cependant, a fait une jolie étude sur la parité des termes de la somme en fonction des exposants des 2 et des 3. Le raisonnement n'a pas abouti, mais beaucoup de réflexions intéressantes concernant la parité ont été développées comme le montre le petit extrait de la copie sur la figure 3.9. Une classe de lycée a aussi proposé une solution sous la forme d'un programme en Python qui donnait la décomposition en somme de termes $2^\alpha 3^\beta$. En fait, il regardait si le nombre s'écrivait sous la forme $2^\alpha + 3^\beta$; si c'était le cas il donnait la réponse, sinon, il regardait le quotient de ce nombre par les puissances de 2 (respectivement de 3) pour obtenir un nombre de cette forme. Il remultipliait ensuite par la puissance de 2 (de 3) qui avait donné la réponse. Même si toutes les décompositions ne pouvaient pas être trouvées, l'idée était intéressante et certainement créative ! Par exemple, pour 100, la réponse était $2^6 + 2^2 3^2$ car $25 = 2^4 + 3^2$.

3.4.2 Somme de nombres

Ce problème a donné lieu à des études numériques souvent nombreuses permettant de conjecturer le résultat : « Autrement dit, je peux supposer que pour un nombre x, il y a $x - 1$ façons de l'écrire sous cette forme. » écrit un élève de troisième après avoir écrit exhaustivement les décompositions pour les nombres de 2 à 10. En fait, c'était essentiellement d'arriver à cette conjecture qui était attendu. La preuve formelle n'est pas à la portée d'un élève de troisième ou de seconde. Mais, des classes ont mené des investigations poussées comme on peut le voir sur l'étude de la figure 3.10 réalisée par des élèves de troisième. La réponse est conjecturée, mais en appuyant la conjecture sur de nombreux exemples et sur des remarques souvent pertinentes. C'est intéressant de voir que dans les problèmes ouverts, le chemin parcouru, les remarques reliant les expériences et les concepts mathématiques et l'humilité (voir la conclusion sur la figure 3.10) sont aussi importantes que la démonstration et la réponse finale.

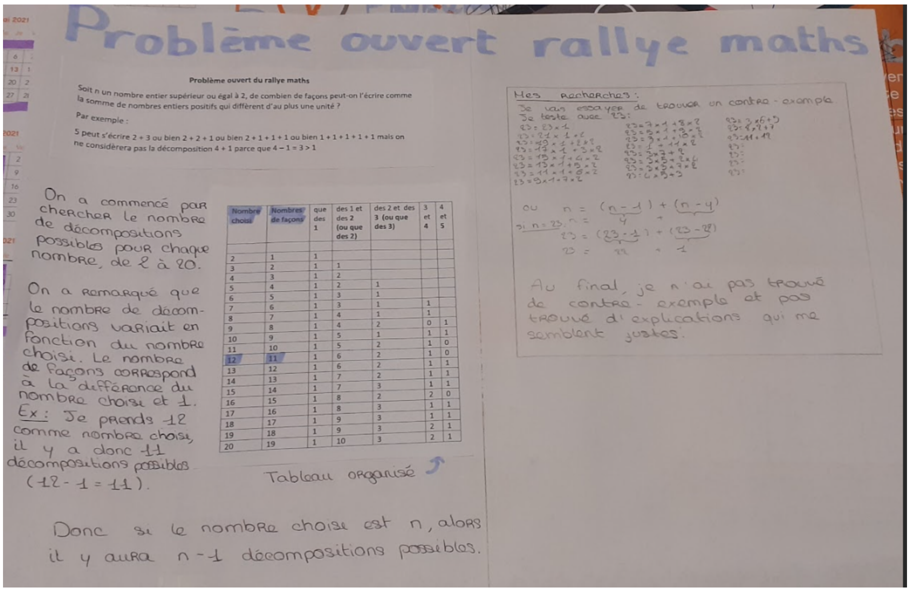


Figure 3.10 – Une investigation poussée

3.4.3 Permutations et carrés

Ces situations ont donné l'occasion aux élèves d'une exploration souvent très bien menée même si le résultat général n'était pas toujours atteint (mais ce n'était pas le but !). L'exploration, la manipulation des nombres, les arrangements possibles ont été présents dans beaucoup de copies (Fig. 3.11 et 3.12 ou 3.13, par exemple) ; on voit la construction d'une démarche, des heuristiques explicitées pour avancer dans la résolution du problème.

3.4.4 Dessins à main levée

Les situations géométriques ont eu beaucoup de succès. Ce sont des problèmes dont on peut penser *a priori* qu'il manque une donnée, et pour lesquels une analyse du dessin est importante. Ils sont dans la même tradition que ce problème publié dans Petit x (n° 112 et 113) ([Aldon et Gardes, 2020] [1]. L'intérêt de ce type de problèmes est qu'ils impliquent de bien comprendre ce que les hypothèses permettent de déduire et de distinguer les variables, les paramètres dans une situation géométrique. Il s'agit alors d'une approche algébrique qui consiste à considérer des nombres inconnus comme s'ils étaient connus. Viete considérait l'algèbre comme un art analytique de la géométrie [Viète, 1591], [Barbin et Boyé, 2006], [Pilet et Grugeon, 2021] : « La puissance du raisonnement algébrique réside dans son caractère analytique qui permet de raisonner en traitant des données connues et inconnues et en opérant sur les deux » (page 13)
Dans les problèmes proposés, il y a à la fois le raisonnement géométrique et le raisonnement algébrique qui permettent d'avancer vers la solution. Les élèves ont bien perçu, dans l'ensemble, cette double approche des problèmes.
Les élèves se rendent compte qu'il faut faire des hypothèses et qu'il est important de tracer la figure correctement et d'être capable de raisonner et de calculer sur des données inconnues (fig. 3.14, 3.15, fig. 3.16)

1. https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/113x6_1633083687338-pdf téléchargé le 30 juin 2025)

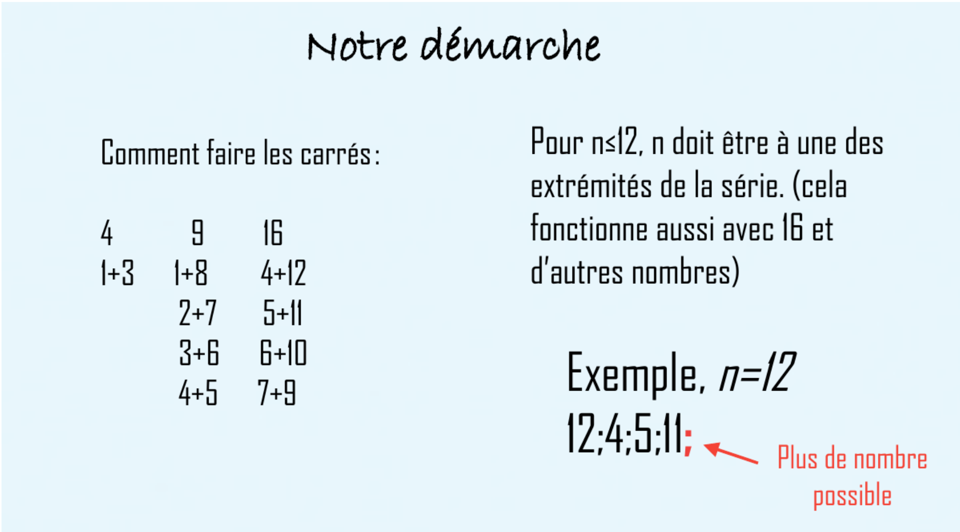


Figure 3.11 – La démarche expliquée

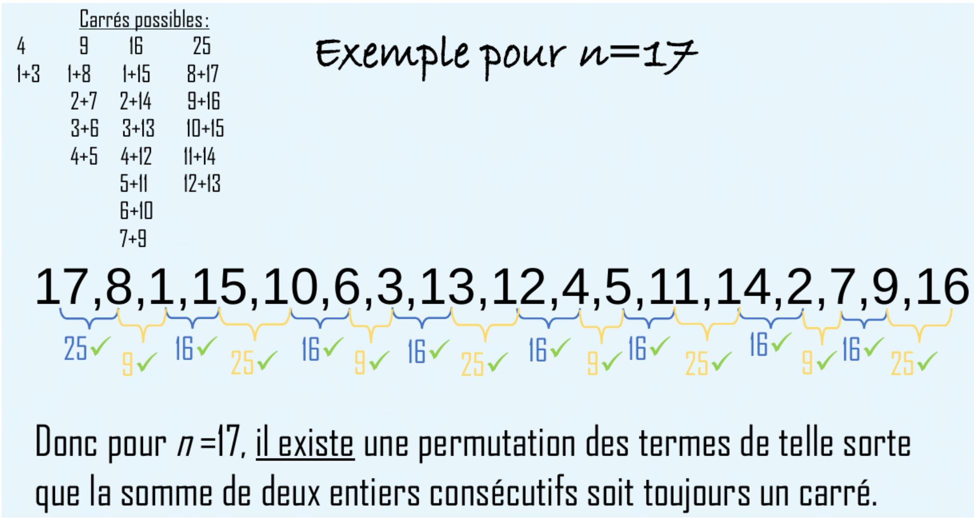


Figure 3.12 – Un résultat

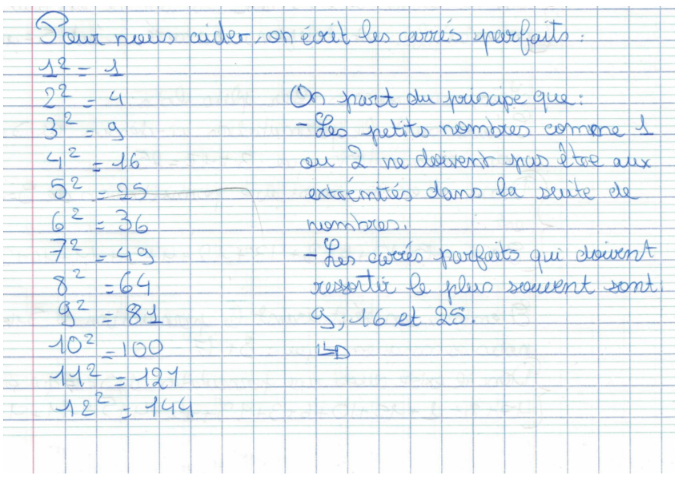


Figure 3.13 – Des heuristiques

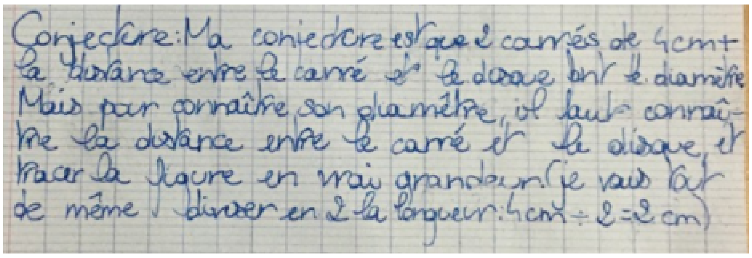
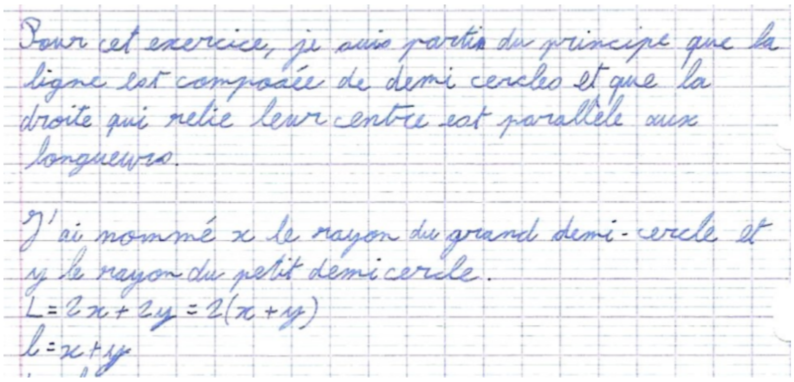

Conjecture : Ma conjecture est que 2 carrés de 4cm + la distance entre le carré et le disque font le diamètre. Mais pour connaître son diamètre, il faut connaître la distance entre le carré et le disque, et tracer la figure en vrai grandeur (je vais tout de même diviser en 2 la longueur : 4cm ÷ 2 = 2 cm)

Figure 3.14 – Les données connues et inconnues (classe de troisième)

Comme les demi-cercles touchent la hauteur et la largeur du rectangle alors AE=AG et CF=CH. La ligne est donc constituée de deux demi-cercles.
D1= diamètre premier cercle
D2= diamètre deuxième cercle
Ligne=(D1)$\pi/2$ + (D2)$\pi/2$ = $\pi/2$(D1+D2)
D1+D2=AB

Figure 3.15 – Raisonner avec des inconnues (classe de seconde)


Pour cet exercice, je suis partie du principe que la ligne est composée de demi cercles et que la droite qui relie leur centre est parallèle aux longueurs.

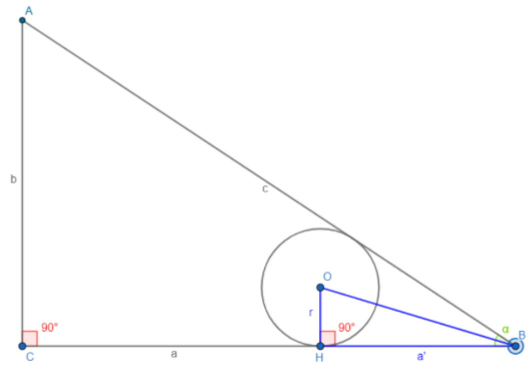
J'ai nommé x le rayon du grand demi-cercle et y le rayon du petit demi cercle.
$L = 2x + 2y = 2(x+y)$
$l = x+y$

Figure 3.16 – Calculer avec des grandeurs inconnues (classe de troisième)

3.4.5 La frise

Le dernier problème était aussi un problème de géométrie qui amenait à analyser une figure géométrique et à calculer ; il a donné lieu à des constructions élaborées dans lesquelles les élèves ont utilisé leurs connaissances de la trigonométrie, de calculs et de représentations (Fig. 3.17)

Conclusion Cette proposition de problèmes variés abordant des thématiques mathématiques différentes a donné cette année de bons résultats quant à la participation des élèves à l'épreuve de problème ouvert du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon. Depuis cette date, cette épreuve est construite sous cette forme. Plus exigeant pour nous, mais plus satisfaisant quand on voit le nombre de réponses augmenter ! A suivre, donc pour les épreuves futures !



On pose α = ABC, r le rayon des cercles (du cercle ici) et a' + r est le bout restant de a où il n'y a plus de cercle

ABC est rectangle en C

$tan(ABC) = \frac{AC}{BC}$

$tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

$\alpha = Arctan(\frac{b}{a})$

Figure 3.17 – Utilisation des connaissances…et au delà ! (classe de troisième)

Chapitre 4

2024

4.1 Introduction

Le nombre de réponses aux cinq problèmes de l'année 2023 nous a encouragé à poursuivre en 2024 cette expérience. C'est donc encore une fois cinq problèmes qui ont été proposés aux élèves dans l'épreuve de Problème ouvert du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon. Un petit mot sur l'histoire des « problèmes ouverts » à l'IREM de Lyon s'impose ! Dès 1983, Gilbert Arsac avec Michel Mante publiait un article dans la revue Petit x tout juste créée ; cet article intitulé : « Des 'problèmes ouverts' dans nos classes de premier cycle » ([Arsac et Mante, 1983]) paraît en effet dans le numéro 2 de la revue. Gilbert Arsac et Michel Mante décrivent ce qu'ils appellent alors une pratique pédagogique. Il s'agit de « placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche mathématique, c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées, dans la situation du chercheur » (page 7). Il s'agissait donc de proposer aux élèves de rencontrer une science vivante en construction, et dont les problèmes n'étaient pas construits *ad hoc* pour l'enseignement d'une notion, ni comme outil pour la description d'une situation issue de la réalité. C'est aussi dans cet article que Gilbert Arsac et Michel Mante donnent une définition du « problème ouvert » :

« Nous appelons problème ouvert un problème qui possède les caractéristiques suivantes :

- énoncé court ;
- l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire, ni de problème du genre « montrer que »). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats présentés en cours ;
- Le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. » (page 8).

C'est cette même définition qui sera reprise par les auteurs dans la brochure de l'IREM de Lyon : « Problème ouvert et Situation Problème » qui paraîtra en 1991 ([Arsac *et al.*, 1991]). La pratique pédagogique est de plus en plus étudiée et analysée, notamment à l'aune de la thèse de Nicolas Balacheff ([Balacheff, 1988]) qui sera un point de départ pour une analyse didactique plus approfondie des enjeux d'enseignement et d'apprentissage dans des situations didactiques de problème ouvert ([Arsac *et al.*, 1992]).

Claude Tisseron et Michel Mizony, directeurs successifs de l'IREM de Lyon, ont continué à promouvoir le travail sur les problèmes ouverts, Claude s'intéressant à la démarche scientifique et le rôle que les problèmes pouvaient jouer dans l'enseignement d'une telle démarche ([Aldon et Tisseron, 1998], [Peix et Tisseron, 2003]) et Michel aux développements mathématiques que les problèmes ouverts pouvaient permettre ([Gardes et Mizony, 2012]). Tous deux en collaboration ont publié à l'IREM de Lyon une bande dessinée, Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts [1] publié sur le site de la « Feuille à problèmes » qui montre encore le travail de l'IREM de Lyon autour des problèmes ouverts entre 2005 et 2010. C'est dans cette période que le groupe EXPRIME [2] s'est constitué autour d'un constat et d'une volonté :

Le constat : malgré le succès que rencontre les problèmes ouverts dans les classes et en dépit des injonctions institutionnelles, la pratique du problème ouvert reste encore marginale dans les classes et est plus considéré comme un moment hors du temps d'enseignement, une respiration qui intéresse professeurs et élèves mais sans rapport direct avec les mathématiques qu'il s'agit d'enseigner. On a alors pensé que les freins à un développement de cette pratique pouvaient venir, d'une part du fait que les liens des problèmes ouverts avec les notions mathématiques à enseigner n'étaient pas faciles à mettre en œuvre d'autant plus que les attendus explicités dans les articles et brochures dont nous venons de parler, portaient plus sur des notions méta-mathématiques (le débat scientifique, le concept de preuve, les heuristiques,...) que sur les concepts mathématiques que les élèves avaient à apprendre en classe de mathématiques. Et d'autre part, la dimension expérimentale des mathématiques dans la perspective de leur apprentissage pouvait entrer en conflit avec les conceptions dominantes des mathématiques et les valeurs portées par l'enseignement des mathématiques (voir page 29 dans le chapitre précédent).

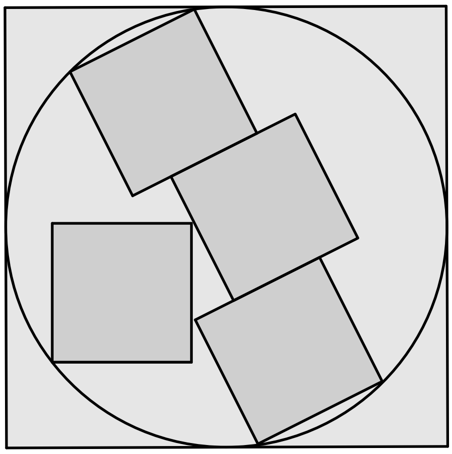
Une volonté : elle repose tout d'abord sur une idée toute simple qui consiste à dire que la recherche de la solution d'un problème ouvert met en œuvre des connaissances mathématiques qui peuvent être institutionnalisées dans la classe. Il s'agissait alors d'analyser des problèmes pour mettre en évidence les solutions que pourraient apporter des élèves de différents niveaux scolaires et de comprendre les connaissances nécessaires à la découverte de la solution ou d'une partie de la solution. Le deuxième aspect à considérer est l'importance de la manipulation, de l'expérience sur des objets matériels ou conceptuels pour comprendre les concepts en profondeur et pas seulement être capable de les annoner.
C'est ainsi que le groupe EXPRIME pendant cinq ans a décortiqué et analysé des problèmes, ce qui a donné lieu à la publication d'un cédérom ([Aldon *et al.*, 2010]) accompagné de nombreuses expérimentations en classe. Le groupe DREAM [3] a été créé lors de la disparition de l'INRP en collaboration entre l'Ecole Normale Supérieure de Lyon, l'IUFM de l'Académie de Lyon et l'IREM de Lyon. Il continue à s'intéresser au rôle des problèmes dans l'enseignement des mathématiques et a poursuivi ses recherches à travers deux LéA [4] consécutifs [5]. Actuellement, les recherches portent sur l'idée de fonder son enseignement sur la recherche de problèmes en classe, c'est-à-dire de proposer une organisation annuelle de la progression articulée sur des problèmes, des Situations Didactiques de Recherche de Problèmes (SDRP, [Gardes, 2013]), des problèmes ouverts, des situations-problèmes ou des problèmes de réinvestissement. Les objectifs sont, quand c'est possible, de faire de la résolution de ces problèmes la motivation première des élèves (et de l'enseignant), de s'appuyer sur leur travail et leurs réflexions pour pratiquer l'activité mathématique et mobiliser les savoirs présents dans les programmes.
C'est bien sûr dans cette tradition que le Rallye mathématique de l'Académie de Lyon a depuis 2006 une épreuve « Problème ouvert ». Venons en alors aux problèmes de l'année 2024.

1. https://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille3/bd/html/img0.html
2. EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants à l'Ecole
3. Démarche de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques
4. Lieux d'Éducation Associé, Institut Français de l'Éducation
5. Voir à ce propos le site de l'équipe DREAM : https://math.univ-lyon1.fr/dream/

4.2 Énoncés

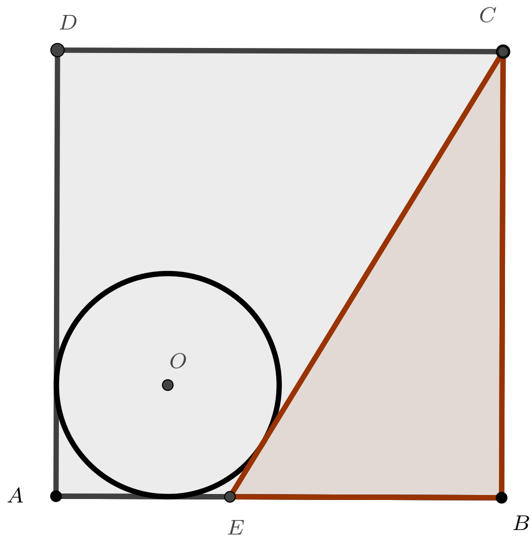
4.2.1 Amoncellement de carrés identiques

Le grand carré a un côté de longueur 1. Quelle est l'aire d'un petit carré ?



4.2.2 Pythagore...

Le carré $ABCD$ a un côté de longueur 4. Le cercle a un rayon de longueur 1.
La droite (CE) est tangente au cercle.
Quelle est l'aire du triangle BCE ?



4.2.3 Quel mélange !

On considère une liste de $2n$ nombres de 1 à n, chacun étant répété deux fois :

$$L = (1,1,2,2,3,3,\dots,n,n)$$

Pour quelles valeurs de n est-il possible de réarranger cette liste de nombres de telle façon qu'entre deux nombres k il y ait exactement k nombres ?

4.2.4 Drôles de fractions

Une fraction continue est une expression de la forme :

$$F = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \dots}}}}}$$

avec $a,b,c,d,e,f,\dots$ des nombres naturels. On note :

$$F = [a,b,c,d,e,f,\dots]$$

Par exemple :

$$[2,3,1,4] = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}} = \dots \text{ Écrivez cette fraction sous sa forme simplifiée}$$

Que vaut $[0,2,3,1,4]$?

D'une façon générale, supposons $R = [a,b,c,d]$ où a,b,c,d sont des entiers naturels quelle est la fraction continue de $\dfrac{1}{R}$?

Donnez des exemples. Rédigez une preuve générale.

Quelle relation a-t-on entre $[a,b,a]$ et $[b,a,b]$? Et entre $[a,b,a,b]$ et $[b,a,b,a]$?

Pouvez-vous en trouver d'autres ?

4.2.5 Avec des impairs

Quels sont les entiers naturels qui sont la somme d'au moins deux nombres impairs consécutifs ?

4.3 Un peu de mathématiques

4.3.1 Amoncellement de carrés

Les trois carrés centraux pourraient être alignés. Dans ce cas, si j'appelle c le côté d'un carré et R le rayon du cercle, on a :

$$\left(\frac{3c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = R^2$$

On a donc :

$$R = \sqrt{\frac{5}{2}}c$$

Par ailleurs le rayon du cercle est la moitié du côté du grand carré C :

$$R = \frac{C}{2}$$

Donc, l'aire du grand carré vaut :

$$4R^2$$

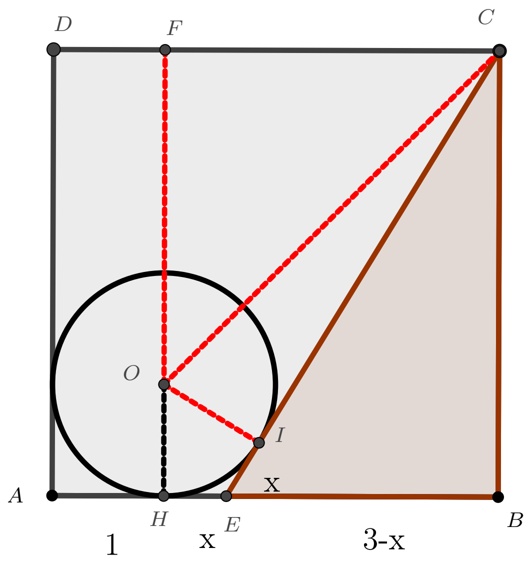
La somme des aires des quatre petits carrés vaut :

$$\frac{8}{5}R^2$$

et le rapport des aires des quatre petits carrés à celle du grand carré vaut :

$$\frac{2}{5}$$

4.3.2 Pythagore...



OFC est rectangle en F, donc : $OF^2 + FC^2 = OC^2$ mais $OF = FC = 3$ donc $OC^2 = 18$.
OIC est rectangle en I, donc : $CI^2 = OC^2 - OI^2 = 17$.
On pose x la distance EH. $EI = EH$ puisque I et H sont les deux points de tangence au cercle issues de E.
EBC est rectangle en B, donc : $EB^2 + BC^2 = CE^2$. Mais $EB = 3 - x$, $BC = 4$ et $CE = CI + x = \sqrt{17} + x$; donc

$$\left(\sqrt{17} + x\right)^2 = (3 - x)^2 + 16$$

$$17 + 2\sqrt{17} + x^2 = 9 + x^2 - 6x + 16$$

$$x = \frac{8}{2\sqrt{17} + 6} = \frac{\sqrt{17} - 3}{2}$$

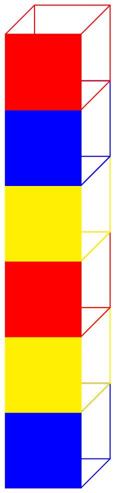


Figure 4.1 – Les cubes de Langford

Et donc l'aire du triangle EBC vaut :

$$A_{EBC} = \frac{\left(3 - \dfrac{\sqrt{17}-3}{2}\right) \times 4}{2}$$

Et, après simplification :

$$A_{EBC} = 9 - \sqrt{17}$$

4.3.3 Quel mélange !

Ce problème est connu comme le problème de Langford. L'histoire veut que le mathématicien Dudley Langford jouant avec des cubes avec son fils s'aperçut qu'il venait de faire un amoncellement dans lequel, entre deux cubes rouges, il y avait un seul cube, entre deux cubes jaunes, il y avait exactement deux cubes et qu'entre les deux cubes bleus il y avait exactement trois cubes comme le montre la figure 4.1. C'est donc une généralisation de ce problème que nous proposions de chercher.

Quelques manipulations préalables

Supposons $n = 1$, la liste est (1,1) et il n'y a pas de solution.
Supposons $n = 2$, la liste est (1,1,2,2) et il est encore facile de se persuader qu'il n'y a pas de solution : si la liste commence par 1 : 1,2,1,2 mais il n'y a pas deux éléments entre les 2. Si la liste commence par 2 : 2,1,1,2 et il n'y a pas d'élément entre les deux 1.
Supposons $n = 3$, la liste est (1,1,2,2,3,3). Dans ce cas, quelques manipulations permettent d'arriver à la solution :

$$(3,1,2,1,3,2)$$

C'est la solution de la figure 4.1 en codant le 3 par la couleur bleue, le 1 par la couleur jaune et le 2 par la couleur rouge !
Supposons $n = 4$, la liste est (1,1,2,2,3,3,4,4). là encore, quelques manipulations permettent d'arriver à la solution :

$$(4,1,3,1,2,4,3,2)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		1					
2		1		1				
3			1		1			
4				1		1		
5					1		1	
6						1		1
7								
8	2			2				
9		2			2			
10			2			2		
11				2			2	
12					2			2
13								
14	3				3			
15		3				3		
16			3				3	
17				3				3
18								
19	4					4		
20		4					4	
21			4					4

TABLE 4.1 – Une solution pour $n = 4$

D'une manière plus systématique, on peut construire le tableau 4.1, dans lequel les colonnes représentent les 8 cases de la listes et les lignes les possibilités offertes. Il suffit (sic !) de trouver une permutation compatible, c'est-à-dire dans la quelle les colonnes ne contiennent qu'un élément entre 1 et 4. On pourrait essayer de la même façon avec $n = 3$.

Premiers résultats

A partir de ces exemples (et peut-être de recherches supplémentaires pour $n = 5,6,7,8$), on peut énoncer une première conjecture :
Le problème de Langford n'a de solutions que si $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 3[4]$.
Preuve
Notations : appelons x_k la position du premier k et y_k la position du second k.
On a évidemment : $y_k - x_k = k + 1$
Si on fait les sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k + y_k = \sum_{k=1}^{2n} k = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_k - y_k = \sum_{k=1}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + n = \frac{n(n+3)}{2}$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{5n(n+1)}{4} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} y_k = \frac{n(3n+1)}{4}$$

Ces nombres sont des entiers ce qui signifie que les deux nombres $5n(n+1)$ et $n(3n+1)$ doivent être simultanément divisibles par 4.
Si $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 3[4]$, c'est le cas.
Et si $n \equiv 1[4]$ alors $5n(n+1) \equiv 2[4]$ et enfin, si $n \equiv 2[4]$, $5n(n+1) \equiv 2[4]$.
Il ne peut donc y avoir de solution que lorsque $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 3[4]$.

Pour montrer la réciproque , il suffit de trouver un algorithme qui permet de trouver une permutation « gagnante », que l'on appellera une permutation de Langford.
J'utilise ici une démarche publiée en 1959 par Roy Davies ([Davies, 1959])
Notations :
$(i\dots j)_P$ avec $i<j$, sont les nombres $i<k<j$ et k pair. (Exemple : $(3\dots 8)_P = (4{,}6)$)
$(i\dots j)_I$ avec $i<j$, sont les nombres $i<k<j$ et k impair. (Exemple : $(3\dots 8)_I = (5{,}7)$)
$R(s)$ est la liste s inversée (Exemple : $R(2{,}3{,}4) = (4{,}3{,}2)$)
$s.t$ est la concaténation des deux listes s et t.
On suppose ici que $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 3[4]$
On considère $x = \lceil \frac{n}{4} \rceil$
Soit alors les huit listes :

1. $a = (2x-1)$
2. $b = (4x-2)$
3. $c = (4x-1)$
4. $d = (4x)$
5. $p = (0\dots a)_I$
6. $q = (0\dots a)_P$
7. $r = (a\dots b)_I$
8. $s = (a\dots b)_P$

Résultat :
Si $n \equiv 0[4]$ alors $R(s).R(p).b.p.c.s.d.R(r).R(q).b.a.q.c.r.a.d$ est une permutation de Langford.
Si $n \equiv 3[4]$ alors $R(s).R(p).b.p.c.s.a.R(r).R(q).b.a.q.c.r$ est une permutation de Langford.
Exemples :
Supposons $n = 16 \equiv 0[4]$
$x = 4$ et

1. $a = (7)$
2. $b = (14)$
3. $c = (15)$
4. $d = (16)$
5. $p = (1{,}3{,}5)$
6. $q = (2{,}4{,}6)$
7. $r = (9{,}11{,}13)$
8. $s = (8{,}10{,}12)$

12,10,8,5,3,1,14,1,3,5,15,8,10,12,16,13,11,9,6,4,2,14,7,2,4,6,15,9,11,13,7,16

Preuve

Le cas $n \equiv 0[4]$

Pour $n \equiv 0[4]$, chaque liste a, b, c et d possède un seul élément. Chaque liste p, q, r et s possède $x-1$ nombres.
Montrons que chaque paires k d'éléments de la liste encadrent k éléments de la liste.
a Les deux occurrences de a sont séparées de $q.c.r$ soit $x-1+1+x-1 = 2x-1 = a$ nombres.
b Les deux occurrences de b sont séparées de $p.c.s.d.R(r).R(q)$ soit $x-1+1+x-1+1+x-1+x-1 = 4x-2 = b$ nombres.
c Les deux occurrences de c sont séparées de $s.d.R(r).R(q).b.a.q$ soit $x-1+1+x-1+x-1+1+1+x-1 = 4x-1 = c$ nombres.
d Les deux occurrences de d sont séparées de $R(r).R(q).b.a.q.c.r.a$ soit $x-1+x-1+1+1+x-1+1+x-1+1 = 4x = d$ nombres.
p Les deux 1 appartiennent à $p = (1,\dots)$ et $R(p) = (\dots,1)$ et sont donc séparés dans la liste par b de longueur 1.
Soit maintenant k appartenant à p, liste $(1,3,\dots,\frac{n}{2}-1)$ (car $\dfrac{n}{2}$ est pair) de $\dfrac{n}{4}-1$ termes impairs ; posons $k = 2k'-1$ avec $1 \leq k' \leq \dfrac{n}{4}-1$.
Dans p, avant k, il y a $k'-1$ nombres. Dans $R(p)$ après k, il y a le même nombre $k'-1$ de nombres.
$R(p)$ et p sont séparés par b. Donc entre les deux occurrences de k, il y a $k'-1+k'-1+1 = 2k'-1 = k$ nombres.
q Soit maintenant k appartenant à q, liste $(2,4,\dots,\frac{n}{2}-2)$; posons $k = 2k'$, $1 \leq k' \leq \dfrac{n}{4}-1$.
Dans q il y a $k'-1$ nombres avant k. Dans $R(q)$ il y a de même $k'-1$ termes après k. $R(q)$ et q sont séparés par b et a soit par 2 termes. Finalement entre les deux occurrences de k, il y a $k'-1+2+k'-1 = 2k' = k$ termes.
r Soit k appartenant à $r = (2\dfrac{n}{4}-1\dots 4\dfrac{n}{4}-2)_I = (\dfrac{n}{2}-1\dots n-2)_I$.
$\dfrac{n}{2}-1$ est impair donc le premier nombre de la liste vaut $\dfrac{n}{2}+1$
$n-2$ est pair donc le dernier nombre de la liste est $n-3$.
Soit k un élément de cette liste. En posant, comme plus haut $x = \frac{n}{4}$, la liste s'écrit :

$$r = (2x+1,2x+3,\dots 2x+1+2(x-2))$$

Soit $k \in r$, $k = 2x+1+2\times k'$ avec $0 \leq k' \leq x-2$
Avant k il y a k' éléments dans la liste r et après k il y a aussi k' éléments.
Entre $R(r)$ et r il y a $x-1+1+1+x-1+1 = 2x+1$ éléments. $(\dots R(r).R(q).b.a.q.c.r\dots)$
Finalement entre les deux occurrences de k il y a $2k'+2x+1 = k$ éléments.
s Soit k appartenant à $r = (2\frac{n}{4}-1\dots 4\frac{n}{4}-2)_P = (\frac{n}{2}-1\dots n-2)_P$.
$\frac{n}{2}-1$ est impair donc le premier nombre de la liste vaut $\frac{n}{2}$
$n-2$ est pair donc le dernier nombre de la liste est $n-4$.
Soit k un élément de cette liste. En posant, comme plus haut $x = \frac{n}{4}$, la liste s'écrit :

$$r = (2x,2x+3,\dots 2x+2(x-2))$$

Soit $k \in r$, $k = 2x+2\times k'$ avec $0 \leq k' \leq x-2$
Avant k il y a k' éléments dans la liste r et après k il y a aussi k' éléments.
Entre $R(s)$ et s il y a $x-1+1+x-1+1 = 2x$ éléments. $(\dots R(s).R(p).b.p.c.s\dots)$
Finalement entre les deux occurrences de k il y a $2k'+2x = k$ éléments.

Le cas $n \equiv 3[4]$

Des raisonnements analogues permettent d'étudier le cas où $n \equiv 3[4]$.
Prenons un exemple :
$n = 23 \equiv 3[4]$. $x = \lceil \frac{23}{4} \rceil = 5$

1. $a = (9)$
2. $b = (18)$
3. $c = (19)$
4. $d = (20)$
5. $p = (1,3,5,7)$
6. $q = (2,4,6,8)$
7. $r = (11,13,15,17)$
8. $s = (10,12,14,16)$

16,14,12,10,7,5,3,1,18,1,3,5,7,19,10,12,14,16,9,17,15,13,11,8,6,4,2,18,9,2,4,6,8,19,11,13,15,17

Programme

La méthode est bien sûr facilement implémentable en Python (par exemple) :

```
from math import ceil

def R(liste):
l=liste
length=len(l)
aux=[]
for i in range(length):
aux.append(l[length-i-1])
return aux

def liste_impair_entre(a,b):
l=[i for i in range(a,b) if i%2==1]
return l
def liste_pair_entre(a,b):
l=[i for i in range(a,b) if i%2==0]
return l

def langford(n):
if n%4==1 or n%4==2:
return None
x=ceil(n/4)
a=[2*x-1]
b=[4*x-2]
c=[4*x-1]
d=[4*x]
p=liste_impair_entre(1,a[0])
```

```
q=liste_pair_entre(2,a[0])

r=liste_impair_entre(a[0]+1,b[0])

s=liste_pair_entre(a[0],b[0])

if n%4==0:
return R(s) + R(p)+ b + p + c + s + d + R(r) + R(q) + b + a + q + c + r + a + d
else:
return R(s) + R(p) + b + p + c + s + a + R(r) + R(q) + b + a + q + c + r
for i in range(2,17):
print(langford(i))
```

[2, 3, 1, 2, 1, 3]
[2, 3, 4, 2, 1, 3, 1, 4]
None
None
[4, 1, 6, 1, 7, 4, 3, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5]
[4, 1, 6, 1, 7, 4, 8, 5, 2, 6, 3, 2, 7, 5, 3, 8]
None
None
[8, 6, 3, 1, 10, 1, 3, 11, 6, 8, 5, 9, 7, 4, 2, 10, 5, 2, 4, 11, 7, 9]
[8, 6, 3, 1, 10, 1, 3, 11, 6, 8, 12, 9, 7, 4, 2, 10, 5, 2, 4, 11, 7, 9, 5, 12]
None
None
[12, 10, 8, 5, 3, 1, 14, 1, 3, 5, 15, 8, 10, 12, 7, 13, 11, 9, 6, 4, 2, 14, 7, 2, 4, 6, 15, 9, 11, 13]
[12, 10, 8, 5, 3, 1, 14, 1, 3, 5, 15, 8, 10, 12, 16, 13, 11, 9, 6, 4, 2, 14, 7, 2, 4, 6, 15, 9, 11, 13, 7, 16]
Ce qui permet d'obtenir facilement des permutations de Langford pour toute valeur souhaitée, le programme étant de complexité linéaire !

4.3.4 Prolongements

Il y a plusieurs façons de prolonger ce problème. La première consiste à se poser la question du nombre de permutations de Langford pour un n donné.
Des indications dans la suite A014552 de « The On-line encyclopedia of integer sequences » :

0, 0, 1, 1, 0, 0, 26, 150, 0, 0, 17792, 108144, 0, 0, 39809640, 326721800, 0, 0, 256814891280, 2636337861200, 0, 0, 3799455942515488, 46845158056515936, 0, 0, 111683611098764903232, 1607383260609382393152

Un autre prolongement est de considérer que le nombre d'éléments entre les deux occurrences de k vaut $k-1$. C'est le problème dit de Langford-Skolem.
On peut aussi regarder une généralisation avec des suites de 3 ou 4 nombres identiques : Combien y a-t-il de façons de disposer les nombres 1,1,1,2,2,2,3,3,3,...,n,n,n de sorte qu'il y ait zéro nombre entre le premier et le deuxième 1 et zéro nombre entre le deuxième et le troisième 1 ; un nombre entre le premier et le deuxième 2 et un nombre entre le deuxième et le troisième 2 ; . . .$n-1$ nombres entre le premier et le deuxième n et $n-1$ nombres entre le deuxième et le troisième n ?

D'autres prolongements peuvent aussi être trouvés sur OEIS :
https://oeis.org/search?q=Langford&sort=&language=english&go=Search
Enfin, d'un point de vue algorithmique, en considérant le tableau (page 61), la résolution passe par un « SAT-solver », c'est-à-dire un programme dont le but est de trouver au moins une combinaison de variables satisfaisant une formule booléenne. Dans notre cas, il s'agirait de touver les lignes du tableau 4.1 qui sont compatibles, c'est-à-dire qui ne se chevauchent pas (celles marquées en rouge dans le tableau). Ce problème fait partie des problèmes NP-complets.

4.3.5 Fraction continue

$[0,2,3,1,4] = \dfrac{19}{43}$ c'est donc l'inverse de la fraction de départ.
Supposons $a \neq 0$ et considérons la fraction continue $[0,a,b,c,d]$

$$[0,a,b,c,d] = 0 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} = \frac{1}{R}$$

Si $a = 0$

$$R = 0 + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}$$

$$[b,c,d] = b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}} = \frac{1}{R}$$

Dans tous les cas, on obtient l'inverse de R
Non, l'écriture d'un nombre rationel en fraction continue n'est pas unique mais il n'y a que deux écritures différentes :

$$[a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n] = [a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n - 1,1] \text{ si } a_n > 1$$
$$\text{sinon : } [a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,1] = [a_0,a_1,a_2,a_3,\ldots,0,1]$$

$$x = [1,1,\ldots] = 1 + \frac{1}{x}$$

Par conséquent :
x vérifie l'équation $x = 1 + \dfrac{1}{x}$ et donc x est le nombre d'or.

4.3.6 Somme d'impairs

Considérons la somme de k nombres impairs consécutifs (on s'appuie sur le fait que la somme de k premiers impairs vaut k^2.) :

$$2n + 1 + 2n + 3 + \cdots + 2n + 2k - 1 = k \times 2n + \sum_{i=1}^{k} 2i - 1 = k \times 2n + k^2 = k(2n + k)$$

Deux cas se présentent : k est impair et alors $2n + k$ est aussi impair et la somme est impair.

Ou bien k est pair et la somme est multiple de 4.
Réciproquement Soit N impair, est-il somme de k impairs consécutifs ?
Si N est premier, alors nécessairement $k = 1$. Donc N ne peut pas être premier.
Si N est composé (donc $N >1$ et N non premier) alors $N = xy$ avec $1 < x \leq y$ et x et y tous les deux impairs.
On pose $k = x$ et $2n + k = y$ soit $n = \dfrac{y-x}{2}$ et

$$N = xy = x(y-x) + x^2 = (y-x) + 1 + (y-x) + 3 + \ldots (y-x) + 2x - 1$$

Si N est multiple de 4 alors $N = 4p = 2p - 1 + 2p + 1$ et c'est bien la somme de deux impairs consécutifs.
Finalement :
Les nombres qui peuvent s'écrire comme somme d'impairs consécutifs sont les multiples de 4 et les nombres impairs composés.

4.4 Dans les classes

Nous avons recueilli encore une fois beaucoup de réponses pour cette version de 2024 de l'épreuve du problème ouvert. En règle générale, les classes ont plutôt privilégié le « butinage », sans approfondir la solution d'un exercice. C'est peut-être une conséquence du nombre de problèmes proposés, chaque élève qui se lance dans la résolution choisit en fonction de son goût mais il y a peut-être moins de travail collaboratif, même si la figure 4.2 donne un contre-exemple sous la forme d'un travail collectif au tableau pour la résolution du premier problème.

4.4.1 Amoncèlement de carrés

Ce premier problème a dans l'ensemble été bien traité ; il s'agit encore d'un problème pour lequel on peut se demander s'il ne manque pas une donnée et qui oblige à nommer des variables et à faire des calculs avec ces nombres inconnus. C'est bien le cas de cette classe qui fixe la largeur du grand carré à 1 et effectue les calculs (Fig. 4.2).

4.4.2 Pythagore

Ce problème de géométrie a été intéressant parce que sa résolution passe par l'élaboration d'un plan de travail d'analyse de la figure géométrique. Plusieurs classes ont proposé le plan de résolution comme le montre les figures 4.3 et 4.4 issues de classes de troisième ; ces rédactions montrent bien la capacité des élèves à réfléchir à des problèmes ayant plusieurs étapes pourvu qu'on leur en donne la possibilité. Notamment dans la réponse de la figure 4.3 la planification est faite *a priori*, ce qui correspond à une analyse et une synthèse profonde de la figure géométrique qui conduit à la résolution du problème. C'est une approche algébrique de la géométrie pour laquelle les grandeurs sont considérées avant leurs mesures. Une classe de seconde illustre bien ce propos en écrivant dans la présentation de la solution :

> « Nous avons eu l'idée de nommer avec une inconnue les longueurs FE et EG pour ensuite exprimer côtés EB et EC du triangle BCE avec cette inconnue. Ainsi, on pourra se servir du théorème de Pythagore dans le triangle comme une équation pour isoler cette inconnue et donc calculer la valeur exacte du côté EB. »

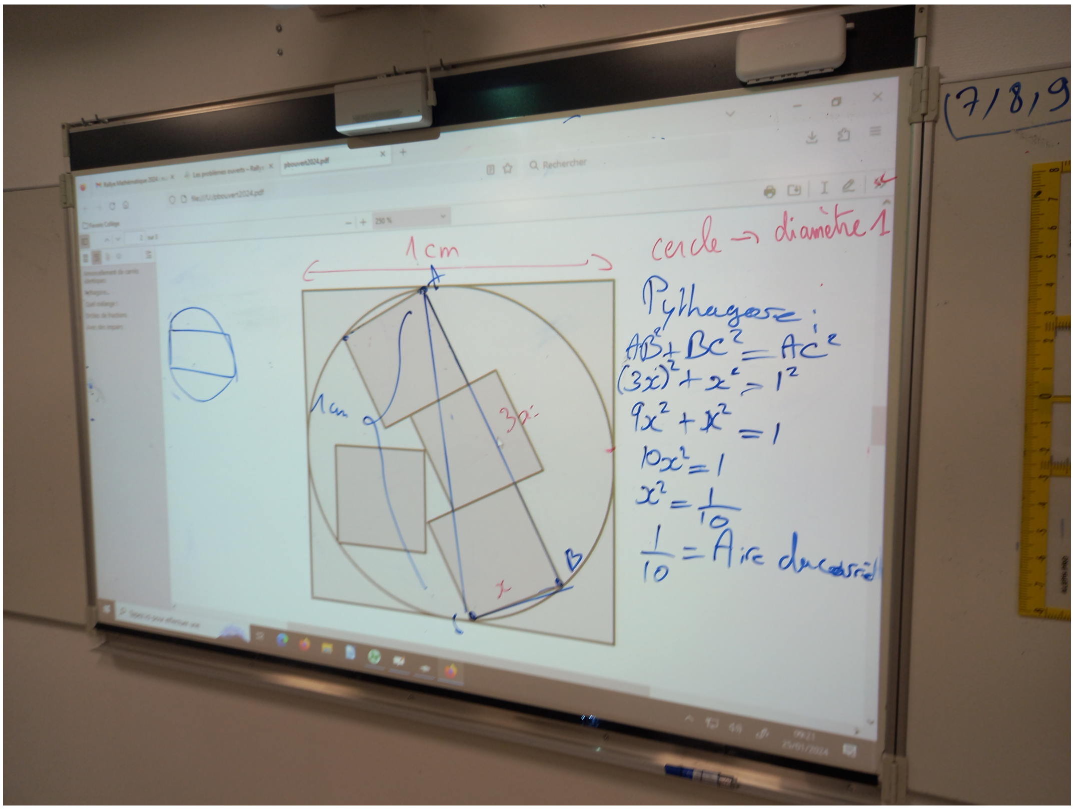
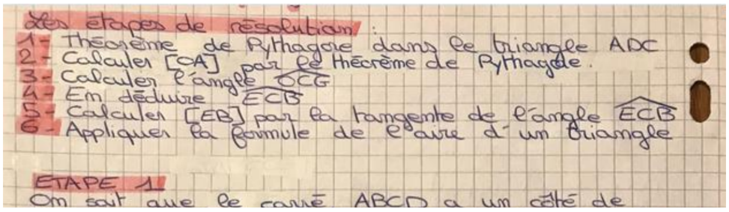


FIGURE 4.2 – Un travail collaboratif au tableau



Étape 1 :

OP=1 et (OP) ⊥ (CE)

OF=1 et (OF) ⊥ (DA)

(OF) // (AB)

FH=AB=4

FA=HB=1

OH=CH=3

Étape 2 :

CO= $3\sqrt{2}$

OCH=45°

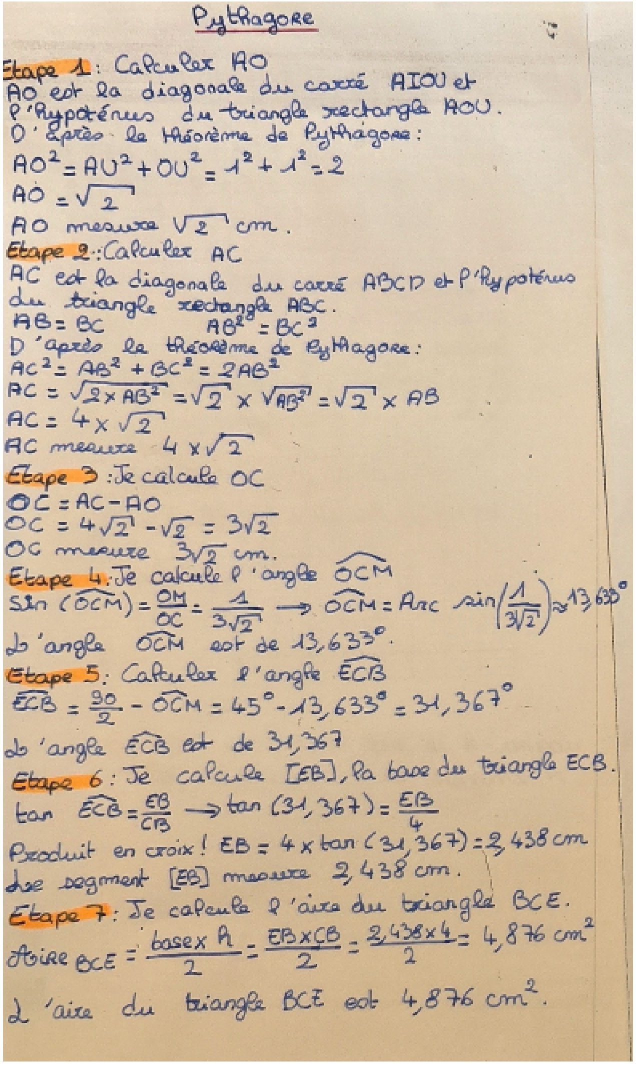
PCH= 45 - arsin $\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$

Étape 3 :

EB = $4\tan\left(45-\left(ar\sin\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\right)\right)$

FIGURE 4.3 – Deux planifications *a priori* de la résolution en classes de troisième et de seconde

Les réactions des élèves montrent bien la compréhension de la figure et la maîtrise de la manipulation des variables et des inconnues avec lesquelles il est possible de calculer ou de résoudre des équations. Le calcul, la résolution d'équations prennent alors du sens en étant au service du raisonnement et pas seulement un exercice en soi. Sur ces deux premiers problèmes, comme sur d'autres expérimentés en classe, les élèves sont conduits à faire les calculs pour attteindre un but précis ; les calculs deviennent indispensables, contribuent à la solution et leur maîtrise est nécessaire et justifie les exercices répétitifs. Il est à noter que lors de la résolution de ce genre de problèmes, le nombre important de calculs effectués par les élèves participent au développement de la maîtrise des calculs eux-mêmes.



Pythagore

Etape 1 : Calculer AO
AO est la diagonale du carré AIOU et l'hypoténuse du triangle rectangle AOU.
D'après le théorème de Pythagore :
$AO^2 = AU^2 + OU^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$AO = \sqrt{2}$
AO mesure $\sqrt{2}$ cm.

Etape 2 : Calculer AC
AC est la diagonale du carré ABCD et l'hypoténuse du triangle rectangle ABC.
$AB = BC$ $AB^2 = BC^2$
D'après le théorème de Pythagore :
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$
$AC = \sqrt{2 \times AB^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{AB^2} = \sqrt{2} \times AB$
$AC = 4 \times \sqrt{2}$
AC mesure $4 \times \sqrt{2}$

Etape 3 : Je calcule OC
$OC = AC - AO$
$OC = 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
OC mesure $3\sqrt{2}$ cm.

Etape 4 : Je calcule l'angle $\widehat{OCM}$
$\sin(\widehat{OCM}) = \frac{OM}{OC} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \longrightarrow \widehat{OCM} = \text{Arc}\sin\left(\frac{1}{3\sqrt{2}}\right) \approx 13{,}633°$
L'angle $\widehat{OCM}$ est de $13{,}633°$.

Etape 5 : Calculer l'angle $\widehat{ECB}$
$\widehat{ECB} = \frac{90}{2} - \widehat{OCM} = 45° - 13{,}633° = 31{,}367°$
L'angle $\widehat{ECB}$ est de 31,367

Etape 6 : Je calcule [EB], la base du triangle ECB.
$\tan \widehat{ECB} = \frac{EB}{CB} \longrightarrow \tan(31{,}367) = \frac{EB}{4}$
Produit en croix ! $EB = 4 \times \tan(31{,}367) = 2{,}438$ cm
Le segment [EB] mesure 2,438 cm.

Etape 7 : Je calcule l'aire du triangle BCE.
$\text{Aire}_{BCE} = \frac{\text{base} \times h}{2} = \frac{EB \times CB}{2} = \frac{2{,}438 \times 4}{2} = 4{,}876 \text{ cm}^2$
L'aire du triangle BCE est $4{,}876 \text{ cm}^2$.

Figure 4.4 – Une autre planification en classe de troisième

4.4.3 Quel mélange

Ce n'est pas le problème le mieux traité parmi les cinq. Cependant, beaucoup de classes ont mis en évidence les impossibilités pour 2, les permutations gagnantes pour 3 et 4 ; certains sont allés plus loin en découvrant une permutation « gagnante » pour $n = 7$ ou $n = 8$ mais sans explications du raisonnement conduit pour mettre en évidence ces solutions. Nous nous sommes peut-être un peu laissé emporter par la beauté du problème sans assez prendre en compte ce que des élèves de troisième ou de seconde seraient capables de faire. C'est une question toujours vive dans notre travail sur les problèmes : comment transformer une situation mathématique féconde (et celle-là l'est !) en une situation didactique qui le soit aussi ? Bien sûr, l'analyse *a priori* est essentielle et l'exploration des solutions possibles doit permettre de mettre en évidence les connaissances nécessaires pour transformer l'expérience sur les objets mathématiques en un raisonnement hypothético-déductif. Ici, cette analyse n'avait pas été menée suffisamment finement et en tous cas, l'expérimentation montre bien que les élèves ne peuvent dépasser le stade de l'expérience comme illustré sur la figure 4.5. Il serait peut-être intéressant de proposer ce problème à un niveau supérieur, peut-être L3, pour que les étudiants puissent avoir les connaissances notamment en combinatoire assez présentes pour pouvoir relier les expériences et la théorie.

Ça marche pour...

n = 3 231213

n = 8 8427524638573161

n = 7 15163745326427

Nous n'avons pas trouvé pour...

Figure 4.5 – Quelques résultats

4.4.4 Drôles de Fractions

On a :

N

$R = [a, b, c, d]$

$$R = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\cfrac{cd+1}{d}}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{d}{cd+1}} = a + \cfrac{1}{\cfrac{b(cd+1)+d}{cd+1}}$$

$$= a + \frac{cd+1}{b(cd+1)+d} = \frac{a(b(cd+1)+d) + cd + 1}{b(cd+1)+d}$$

$R' = [0, a, b, c, d]$

$$= 0 + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}}} = 0 + \cfrac{1}{\cfrac{a(b(cd+1)+d)+cd+1}{b(cd+1)+d}}$$

Figure 4.6 – Des calculs littéraux bien menés

Ce problème plus technique a été assez bien traité par les classes qui s'y sont intéressées. Le reproche qu'on peut apporter au problème lui-même c'est son manque d'ouverture. Même si la question finale incitait à prolonger les recherches pour découvrir d'autres propriétés de l'écriture des nombres en fractions continues, les élèves se sont contenté (et c'est bien normal) de répondre aux premières questions posées. Finalement, cette expérience montre que les élèves de troisième et de seconde peuvent être capables de mener des calculs littéraux assez complexes comme illustré sur la figure 4.6.

4.4.5 Avec des impairs

Contrairement aux deux problèmes pécédents, celui-là était bien adapté pour les élèves de troisième et seconde ; il a donné lieu à de très belles démonstrations s'appuyant sur des expériences avec les nombres impairs et conduisant à des résultats bien expliqués comme cette conclusion reproduite sur la figure 4.7. Les connaissances nécessaires à sa résolution sont bien présentes en troisième et seconde, les expériences faites en additionnant deux, trois, quatre nombres impairs consécutifs permettent d'émettre des conjectures qui peuvent ensuite être démontrées. On a ici un exemple d'un problème qui peut être proposé, bien sûr dans ces classes, mais plus tard au lycée dans les classes scientifiques et sans doute plus tôt en n'exigeant pas de démonstration mais plutôt des conjectures qui peuvent être vérifiées numériquement. Ce problème fait référence à la situation des nombres trapézoïdaux (somme d'entiers naturels consécutifs) qui est une Situation Didactique de Recherche de Problème analysée et largement observée sur le site de DREAM [6]. On peut également s'intéresser aux nombres pairs consécutifs. . . Voilà un prolongement pour lequel nous laissons au lecteur le plaisir de le chercher !

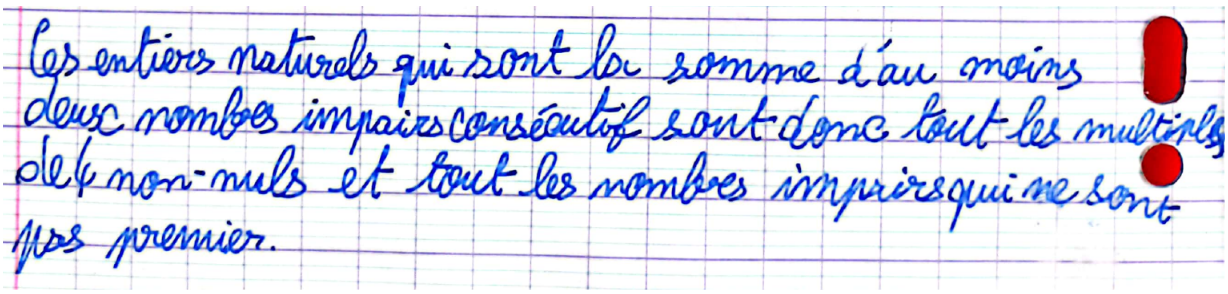


Figure 4.7 – La conclusion de l'étude sur les nombres impairs consécutifs par une classe de seconde

Conclusion En conclusion de cette année, deux leçons apparaissent : tout d'abord, le fait de proposer cinq problèmes a vraiment permis à plus de classes de participer à l'épreuve. Très souvent les professeurs des classes inscrites au Rallye ont proposé les problèmes et les élèves s'en sont emparés en groupe ou individuellement. C'est très positif pour cette épreuve du Rallye.
Ensuite, l'expérimentation en vraie grandeur avec beaucoup de classes a bien montré que certains problèmes, même s'ils sont intéressants d'un point de vue mathématique ne sont pas de bons candidats pour être des situations didactiques à mettre en place dans la classe. Nous devrons être plus vigilants pour que tous les propblèmes proposés puissent être abordés avec les connaissances des élèves.

6. https://math.univ-lyon1.fr/dream/?page_id=1272

Chapitre 5

2025

5.1 Introduction

Il y a 20 ans, nous nous réunissions dans les locaux de l'IREM de Lyon. Josette Feurly-Reynaud alors présidente de la régionale de l'APMEP avait réuni ses troupes. Michel Mizony, le directeur de l'IREM avec Maryvonne Le Berre et moi-même présentions alors un projet de Rallye sur l'Académie de Lyon. Les IA-IPR avaient été prévenus et représentaient le rectorat de Lyon. La discussion n'a pas été très longue ; des équipes se sont constituées pour penser la forme que pourrait prendre ce Rallye, mais l'unanimité était faite sur trois principes fondamentaux :

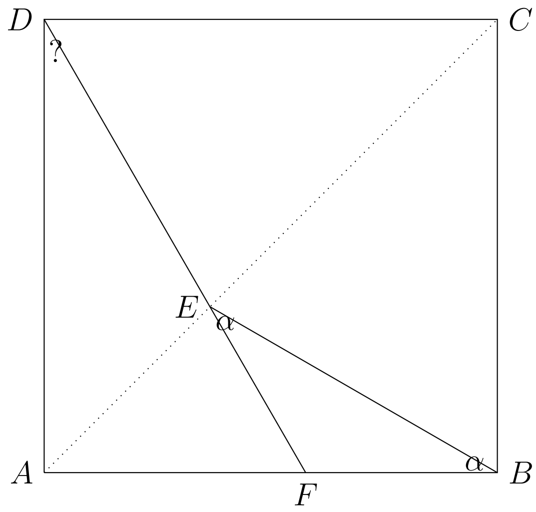
- le Rallye devra concerné les classes de troisième (collège) de seconde (lycée général ou technologique) et de seconde professionnelle (lycée professionnel) ;
- le Rallye sera un travail d'équipe et il y aurait une seule réponse par classe ;
- les « meilleures » classes participeront à un parcours mathématique, sur le campus de La Doua.

Ces trois principes demeurent les fondements du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon même si, au fur et à mesure des années des améliorations ont été apportées par l'équipe du Rallye ; une association a été créée, les groupes responsables de cette manifestation se sont spécialisés sur la communication, la création des épreuves, le problème ouvert, des lycées à l'étranger participent au rallye,. . .Depuis 20 ans, le nombre de participants au Rallye est passé de 12098 élèves concernés en 2006 à 21717 en 2025 avec quelques variations, notamment dans les années de la pandémie. Peut-on dire que le Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon est devenu une institution dans le paysage de l'enseignement des mathématiques ? Je le crois sincèrement ! Et j'espère que les décideurs pourront se rendre compte encore longtemps de l'impact de cette manifestation dans les collèges et lycées de l'Académie.
Cette année, l'épreuve des problèmes ouverts s'est déroulée entre janvier et mars ; les élèves ont eu beaucoup de temps pour résoudre les problèmes et le nombre de classes participantes a été conséquent.

5.2 Énoncés

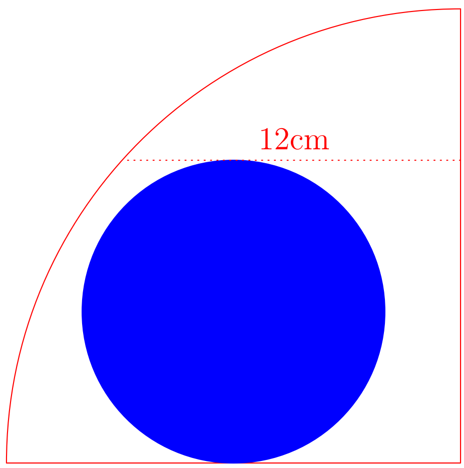
5.2.1 Quel est l'angle ?

$ABCD$ est un carré. Le triangle EFB est isocèle de sommet F. Que vaut l'angle $\widehat{ADF}$?



5.2.2 Disque dans un quart de disque

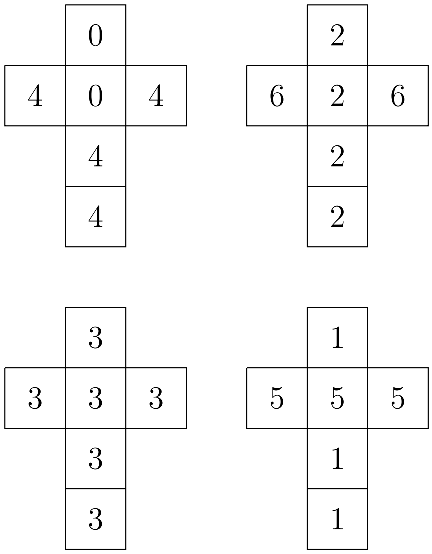
Quelle est la mesure de la surface qui n'est pas bleue ?



5.2.3 Les dés

On dispose des quatre dés ci-dessous. Le jeu se joue à deux joueurs. Le premier choisit un des dés, puis le second choisit un dé parmi les trois restants. Ils lancent tous les deux le dé. Celui qui gagne est celui qui obtient le plus grand nombre.

Quelle stratégie utiliseriez vous pour avoir le plus de chance de gagner ?



Pouvez-vous trouver d'autres dés, avec au moins deux "petites" valeurs sur chaque dés, qui donneraient au premier joueur une probabilité plus grande de gagner ?

5.2.4 Combien de premiers ?

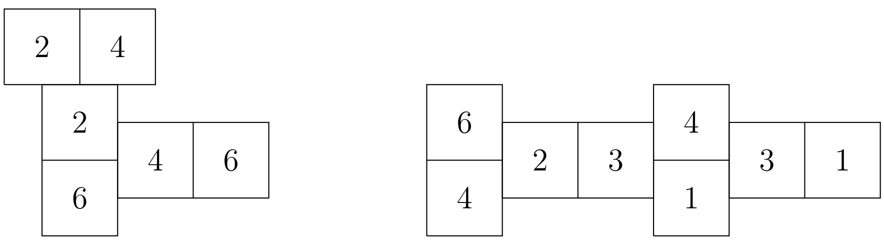
Un nombre premier est un nombre entier positif qui a exactement deux diviseurs (2, 3, 5, 7, 11,...).
Est-ce qu'il existe un nombre premier p qui soit somme et différence de deux nombres premiers ; autrement dit est-ce qu'il existe un entier premier p tel que :

$$\begin{aligned} p &= p_1 + q_1 \quad \text{avec } p_1 \text{ et } q_1 \text{ premiers} \\ p &= p_2 - q_2 \quad \text{avec } p_2 \text{ et } q_2 \text{ premiers} \end{aligned}$$

S'il en existe, trouvez les tous !

5.2.5 Dominos

On fabrique une chaîne de dominos mais en utilisant la différence des nombres notés sur le domino. Par exemple :



On utilise des dominos avec les seuls nombres 0, 1 et 2 : il y en a 6. Peut-on créer une chaîne avec ces 6 dominos ? en ligne ou en escalier ?
Maintenant on utilise des dominos avec les nombres 0, 1, 2, 3. Peut-on créer une chaîne avec tous les dominos ?
Et avec des dominos comprenant les nombres de 0 à 4 ? de 0 à 5 ? de 0 à 6 ? etc.

5.3 Un peu de mathématiques

5.3.1 Quel est l'angle ?

Posons $AB = 1$ Si on appelle α l'angle commun du triangle isocèle FBE, on en déduit que l'angle externe $\widehat{EFA}$ vaut 2α. Donc l'angle cherché vaut $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$. Par conséquent,

$$AF = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \frac{1}{\tan 2\alpha} \ (1)$$

Appelons H le projeté de E sur (AB). et posons $AH = a$. Dans le triangle BEH, $\tan\alpha = \frac{a}{1-a}$ (2).
Mais aussi,

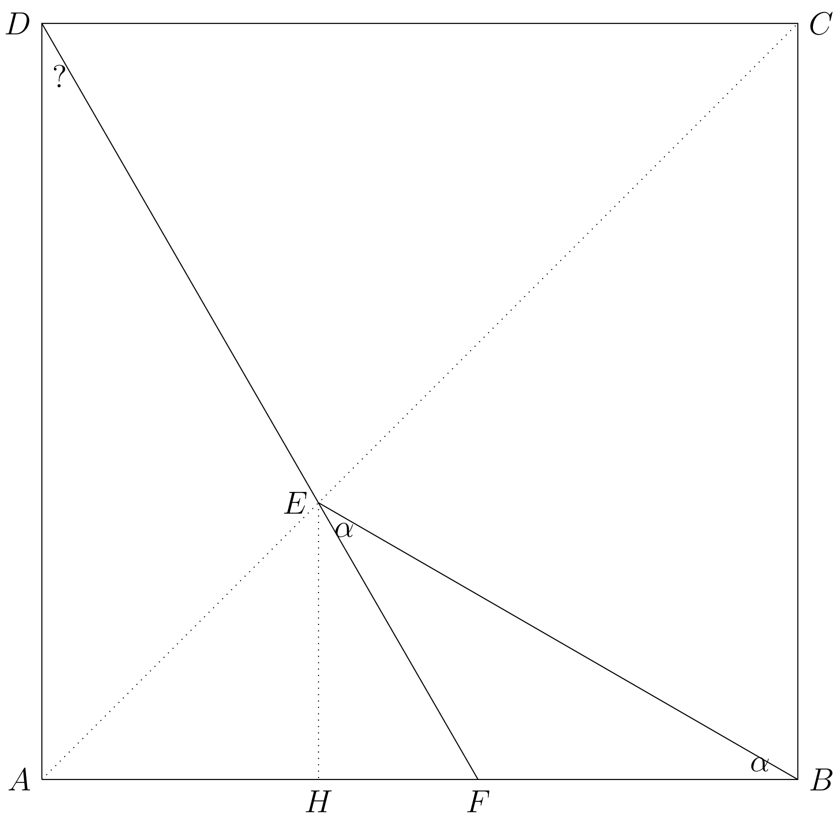
$$EF = \frac{a}{\sin 2\alpha}$$
$$HF = \frac{a}{\tan 2\alpha}$$
$$EH = a$$

Donc, d'après (1),

$$AF = AH + HF = a + \frac{a}{\tan 2\alpha} = \frac{1}{\tan 2\alpha}$$

Donc

$$a = \frac{1}{\tan(2\alpha) + 1}$$



Comme, d'après, (2), $\tan\alpha = \frac{a}{1-a}$, il vient :

$$a = \cfrac{1}{\cfrac{\cfrac{2a}{1-a}}{1-\cfrac{a^2}{(1-a)^2}}+1} = \cdots = \frac{1-2a}{1-2a^2}$$

Donc, on a à résoudre l'équation :

$$2a^3 - 3a + 1 = 0$$

On remarque que 1 est solution de cette équation (solution à rejeter puisque $a < 1$ par construction). On aboutit alors à :

$$2a^2 + 2a - 1 = 0$$

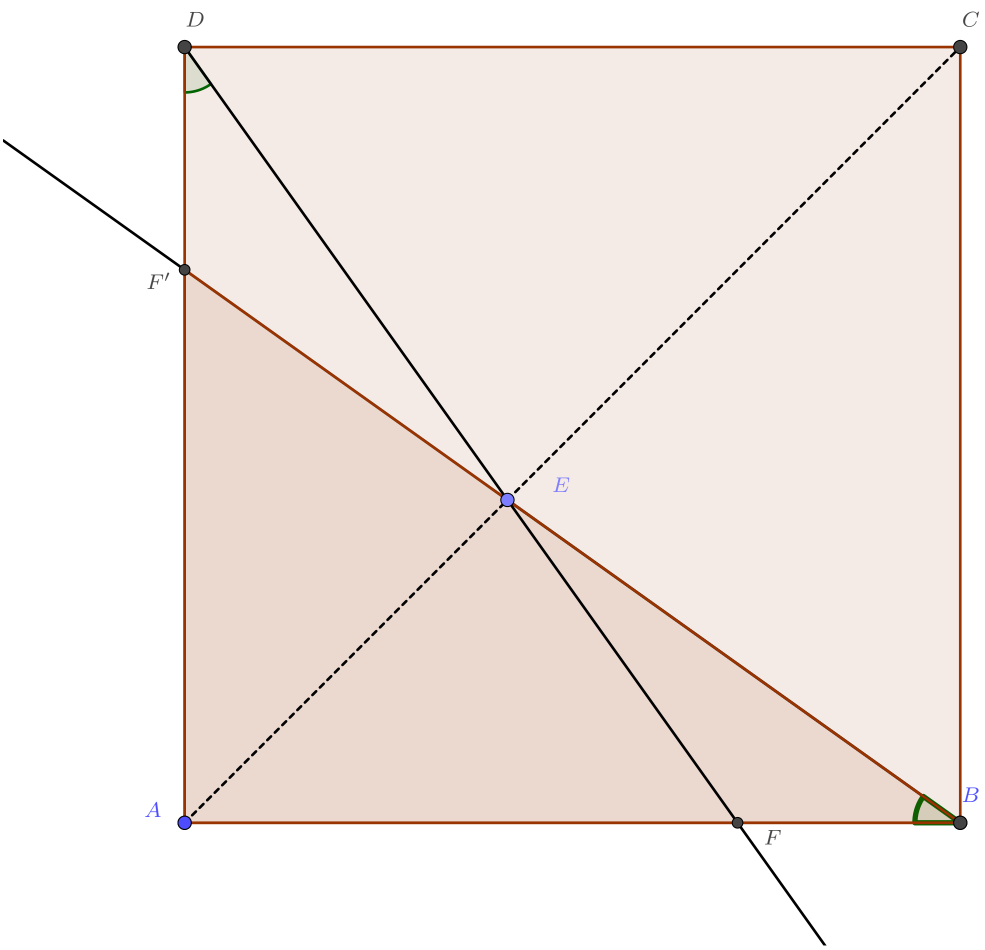
Dont la seule solution positive est :

$$a = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

Et par conséquent :

$$\tan\alpha = \frac{a}{1-a} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } \alpha = \frac{\pi}{6} \text{ et l'angle cherché vaut : } \frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

Une deuxième solution géométrique sympathique :

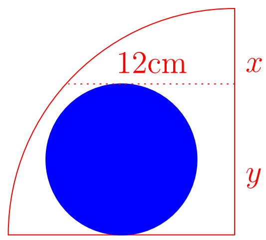


En utilisant les dénominations des points sur la figure ci-dessus, on démontre que quelque soit la position de E sur la diagonale, les triangles DFA et $BF'A$ sont symétriques par rapport à la diagonale AC. Donc : $\widehat{EBA} = \widehat{EDA}$. Appelons α cet angle.
Donc quand le triangle EFB est isocèle, l'angle $\widehat{EFA}$ vaut 2α et donc dans le triangle AFD : $2\alpha + \alpha + \frac{\pi}{2} = \pi$ et donc $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Une troisième solution pourrait utiliser la géométrie analytique en plongeant la figure dans le repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$. Les calculs ne seront pas développés ici mais reviennent globalement à ceux de la première solution.

5.3.2 Disque

C'est encore un problème dont on pense qu'il pourrait manquer une donnée ! Mais ce n'est qu'une question de point de vue pourvu qu'on pense à calculer avec des nombres inconnus ! Bien sûr la solution demande la connaissance du théorème de Pythagore mais c'est la seule propriété géométrique dont on se servira. La solution est essentiellement une solution algébrique !



Appelons R le rayon du quart de cercle et r le rayon du cercle bleu. x et y les longueurs telles que notées sur la figure ci-dessus.
Alors : $R = x + y$ et $y^2 + 12^2 = R^2$ et $y = 2 \times r$ donc $R^2 - 4r^2 = 144$
La surface qui n'est pas colorée mesure $\frac{1}{4}\pi R^2 - \pi r^2 = \frac{144\pi}{4} = 36\pi \text{cm}^2$

5.3.3 Les dés non-transitifs

Comme le titre l'indique, chaque dé sera battu par le dé suivant dans l'ordre indiqué sur la figure 5.1. Ainsi, si le premier joueur choisit le dé numéro 1, le second gagnera la partie avec une probabilité $\frac{2}{3}$ s'il choisit le dé numéro 2 ; si le premier joueur choisit le dé numéro 2, le second gagnera la partie avec une probabilité $\frac{2}{3}$ s'il choisit le dé numéro 3 ; si le premier joueur choisit le dé numéro 3, le second gagnera la partie avec une probabilité $\frac{2}{3}$ s'il choisit le dé numéro 4 ; et enfin, si le premier joueur choisit le dé numéro 4, le second gagnera la partie avec une probabilité $\frac{2}{3}$ s'il choisit le dé numéro 1 ;
Preuve
Il suffit pour prouver ce résultat de construire les arbres de probabilité :

Le premier joueur choisit le dé 1 et le second le dé 2 :

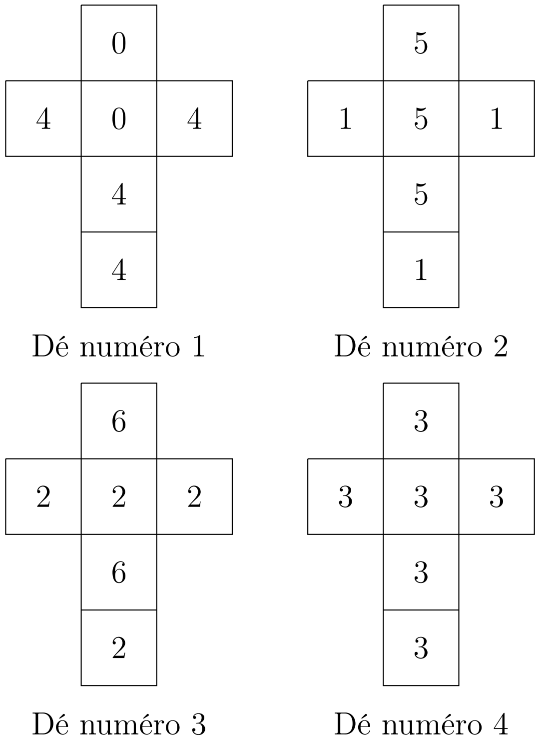
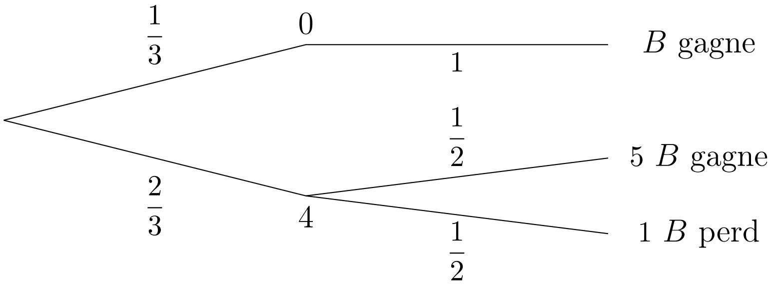
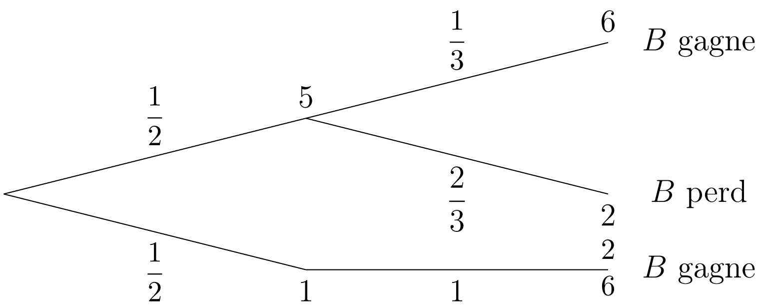


Figure 5.1 – Les quatre dés



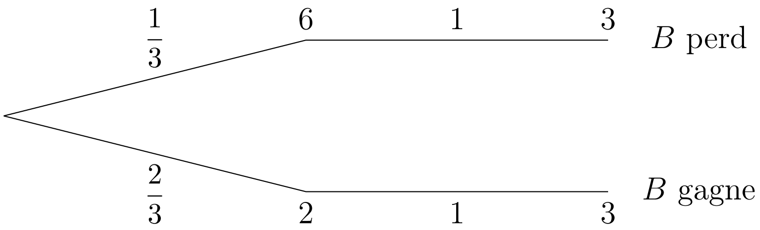
Par conséquent B gagne toujours sur le 0 et une fois sur deux sur le 4 ; donc la probabilité que B gagne vaut : $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

Le premier joueur choisit le dé 2 et le deuxième le dé 3 :



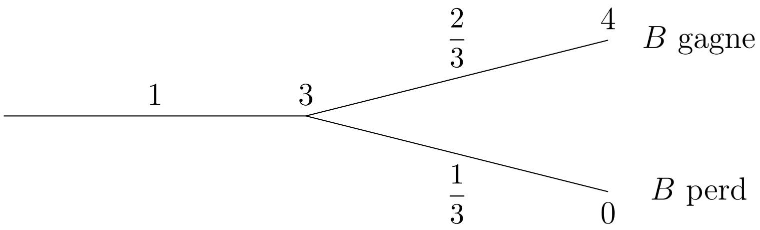
Ici B gagne lorsqu'il fait un 6 contre un 5 ou bien lorsque A fait 1 (puisque le 2 et le 6 gagnent sur le 1) ; la probabilité que B gagne est donc : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$.

Le premier joueur choisit le dé 3 et le deuxième le dé 4 :



Ici, la probabilité que B gagne est trivialement de $\frac{2}{3}$.

Enfin, le premier joueur choisit le dé 4 et le premier le dé 1 :



Dans ce dernier cas, le résultat est aussi trivial et B gagne avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.

5.3.4 Combien de premiers ?

Soit p_1 et q_1 deux nombres premiers, on suppose $p_1 < q_1$.
Soit $p_1 = 2$, soit $p_1 = 2k + 1$ et $q_1 = 2h + 1$; dans le deuxième cas : $p_1 + q_1$ et $q_1 - p_1$ sont pairs et ne peuvent pas être tous les deux des nombres premiers.
Donc, un des deux nombre premiers est forcément 2. Il faut alors trouver une progression arithmétique de 3 termes et de raison 2 telle que les termes sont premiers.
Il y en a au moins une : 3, 5, 7. Et effectivement 5=3+2 et 5=7-2. Donc 5 est une solution.
D'une facon générale, existe-t'il une suite p, $p + 2$, $p + 4$ qui soit composée de trois nombres premiers.
Examinons les restes dans la division par 3 :
Comme p est premier, soit $p = 3$ (on a déjà vu le cas) soit $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv 2[3]$
Mais si $p \equiv 1[3]$, $p + 2 \equiv 0[3]$ et $p + 2$ n'est pas premier.
Et si $p \equiv 2[3]$, $p + 4 \equiv 0[3]$ et $p + 4$ n'est pas premier.
Donc 5 est l'unique solution.

On pourrait prolonger en demandant toutes les progressions arithmétiques de raison 10 ou 100 et de longueur supèrieure à 2 dont tous les termes soient des nombres premiers.
Avec des arguments semblables, on trouve 3, 13, 23 et c'est la seule et il n'y en a pas de raison 100 (parce que un de p, $p+10$, $p+20$ est divisible par 3 donc, $p = 3$ et 3, 13, 23 est une solution mais 3, 103, 203 n'est pas une solution parce que $203 = 7 \times 29$)

5.3.5 Dominos

Si on limite à des dominos dont les nombres vont de 0 à 2 ; il y en a 6 :

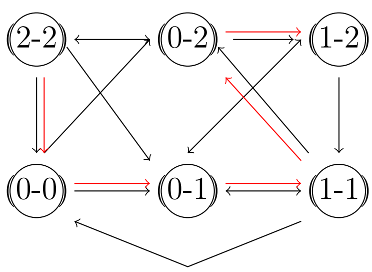
0	0	1	1	2	2	1	0	2	0	2	1

On peut faire une chaîne : 2,2 - 0,0 - 0,1 - 1,1 - 0,2 - 2,1
Remarque : il y a 4 zéro sur les dominos et 4 dominos dont la différence fait 0 ; il y a donc forcément deux doubles côte à côte ; ici 2,2 et 0,0 (c'est vrai aussi s'il y a 28 dominos).

Pour les dominos allant de 0 à 3 (il y en a dix), on trouve :
0,0 - 0,1 - 1,3 - 2,3 - 1,2 - 1,1 - 0,2 - 2,2 - 0,3 - 3,3 : on remarque ici que la chaîne boucle puisque $3 - 3 = 0$.
On trouve :

2	3	4	5	6
"22"	"33"	"00"	"33"	"36"
"00"	"00"	"01"	"00"	"33"
"01"	"01"	"14"	"01"	"00"
"11"	"11"	"34"	"15"	"01"
"02"	"02"	"13"	"45"	"16"
"21"	"21"	"23"	"14"	"56"
	"13"	"12"	"34"	"15"
	"22"	"11"	"13"	"45"
	"03"	"04"	"25"	"14"
	"23"	"44"	"23"	"34"
		"03"	"12"	"13"
		"33"	"11"	"25"
		"02"	"05"	"23"
		"24"	"55"	"12"
		"22"	"04"	"11"
			"44"	"06"
			"03"	"66"
			"35"	"05"
			"02"	"55"
			"24"	"04"
			"22"	"44"
				"03"
				"35"
				"26"
				"46"
				"02"
				"24"
				"22"

D'une façon plus générale, la modélisation peut être faite par un graphe orienté dont les sommets sont les dominos et les arêtes existent entre le domino (a,b) et le domino (c,d) si $|a-b| \in \{c,d\}$.
Une chaîne existe s'il existe un chemin hamiltonien dans le graphe (visite de tous les sommets une fois et une seule).
Exemple : pour $n = 2$, en rouge un chemin hamiltonien :



Mais on voit sur cet exemple que (0,2) - (2,2) - (0,0) - (0,1) - (1,2) - (1,1) est aussi un chemin hamiltonien.
Supposons qu'on ait réussi à construire un chemin hamiltonien H_n dans l'ensemble des dominos (0,0) à $(0,n)$.

Une des extrémités au moins du chemin H_n est un double En effet, il y a $n+1$ dominos doubles dans le graphe G_n et n dominos non double possèdant un 0. Il y en a donc au moins un qui n'est relié à aucun domino.

Construction de H_{n+1} à partir de H_n Pour construire un chemin hamiltonien dans l'ensemble des dominos allant de (0,0) à $(0,n+1)$, il faut rajouter les dominos $(0,n+1)$ jusqu'à $(n+1,n+1)$.
Mais on sait qu'il y a un chemin entre $(0,n+1)$ et tous les dominos $(k,n+1)$ puisque $n+1-0=n+1$; de la même façon, il y a un chemin dans les deux sens entre les dominos $(k,n+1)$ et $(n+1-k,n+1)$ pour k allant de 0 à $n+1$; si $n+1$ est pair, le domino n'est relié qu'à $(0,n+1)$ (le chemin allant de $(0,n+1)$ à $\left(\dfrac{n+1}{2},n+1\right)$.
Dans le chemin hamiltonien H_n tout domino (a,b) dont la différence est k est relié à un domino de la forme (k,x) ; on peut donc rajouter les dominos $(k,n+1)$ et $(n+1-k,n+1)$ dans le chemin.

$$\begin{tikzcd}
(a,b) \arrow[r, "|a-b|=k"] \arrow[d] & (k,n+1) \arrow[d] \\
(k,x) & (n+1-k,n+1) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Si $n+1$ est pair, on peut relier le domino double de la fin du chemin H_n à $(0,n+1)$ puis à $\left(\dfrac{n+1}{2},n+1\right)$.
Par exemple, à partir de $n=5$ on construit H_6 puis H_7 (Figure 5.2).

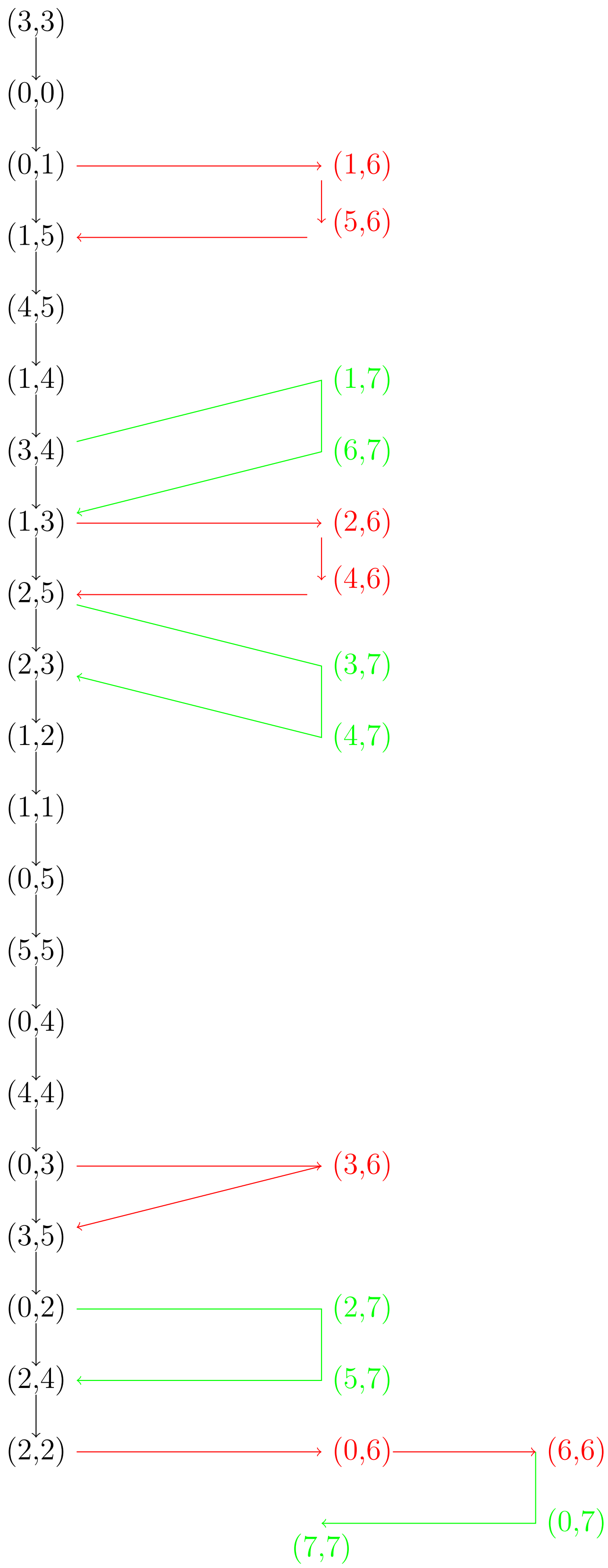


Figure 5.2 – Construction de H_6 et H_7 à partir de H_5

5.4 Dans les classes

Les deux problèmes de géométrie ont attiré beaucoup de classes et pratiquement aucune des réponses reçues n'a évité ces deux problèmes. La géométrie reste attractive malgré le peu de cas qu'il en est fait dans les programmes actuels. Mais, regardons comment les élèves se sont emparés de ces deux problèmes !

5.4.1 Quel est l'angle ?

Ce premier problème a été dans l'ensemble assez mal traité parce que, très souvent, les solutions s'appuyaient sur des constatations faites sur le dessin. Il a cependant permis encore de prévoir la résolution et d'écrire un plan pour arriver au résultat, comme, par exemple le commencement de solution donnée par une classe de seconde sur la figure 5.3. Ou, comme cette rédaction venant encore d'une élève de seconde, dans laquelle les propriétés qui sont susceptibles de servir sont rappelées au début de la solution (Fig. 5.4)

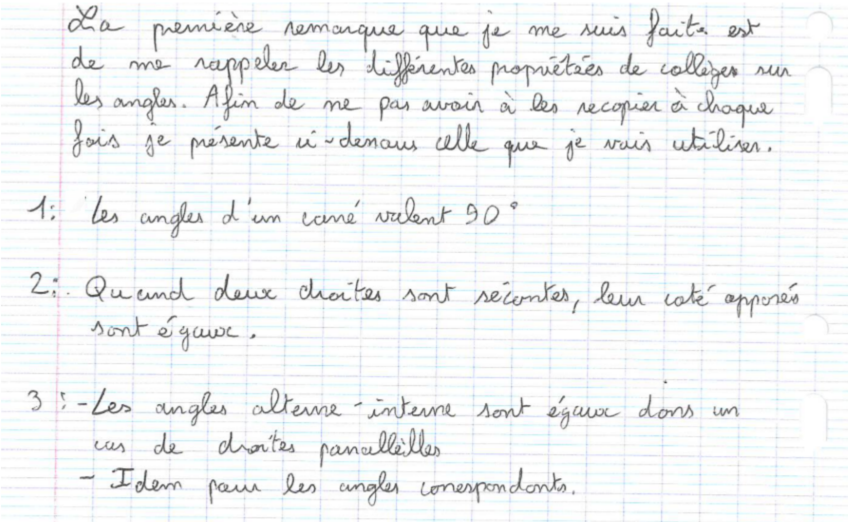
Pour résoudre ce problème, nous allons calculer l'angle d'abord FDC avant de calculer l'angle ADF.
On aura donc 2 variables dans ce problème :
- x qui désignera la valeur de l'angle FDC et ainsi, de l'angle AFD
- y qui désignera la longueur d'un côté du carré

Pour calculer l'angle FDC, on :
- Définira [FB] en fonction de x et y
- Définira [EF] en fonction de x et y
- Dira que FB=EF
- Dira que les points D, E et F sont alignés

Le dernier point peut être résolus en utilisant, a un moment le théorème de Thalès. L'avant dernier point sera résolu grâce à une équation.

Figure 5.3 – Une planification de la solution

Des raisonnements ont ainsi permis de mettre en évidence quelques premiers résultats, même si, souvent, les calculs n'ont pas été menés à bien. Sur la solution d'une classe de troisième, les élèves ont bien démontré que l'angle recherché et l'angle α avait même mesure mais n'ont pas su continuer le raisonnement (Fig. 5.5). Le manque de pratique des calculs a peut-être été un frein aux raisonnements. Mais de très belles solutions sont aussi apparues dans les réponses, comme celle de la figure 5.6.
Comme bien illustré sur ces extraits de réponses, la géométrie permet de planifier, de construire des raisonnements, d'effectuer des calculs et de mettre en œuvre des propriétés apprises dans une situation particulière. Même pour des solutions inachevées, le petit bout de parcours réalisé est une entrée structurante dans la compréhension de ce que peuvent être les mathématiques. Ces réponses nous incitent à continuer à proposer des problèmes de géométrie dans les futures épreuves du problème ouvert du Rallye. Le deuxième problème est aussi un bon exemple de la réflexion dont les élèves ont su faire preuve.



La première remarque que je me suis faite est de me rappeler les différentes propriétés de collège sur les angles. Afin de ne pas avoir à les recopier à chaque fois je présente ci-dessous celle que je vais utiliser.

1: les angles d'un carré valent 90°

2: Quand deux droites sont sécantes, leur coté opposés sont égaux.

3: - Les angles alterne-interne sont égaux dans un cas de droites parallèles
- Idem pour les angles correspondants.

Figure 5.4 – Rappel de quelques propriétés

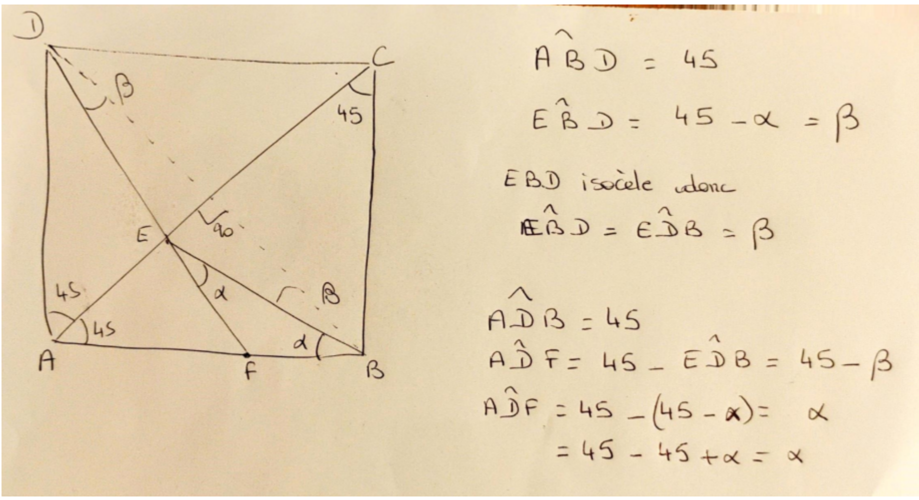


Figure 5.5 – Un début de raisonnement

5.4.2 Disque dans un quart de disque

Ce problème est plus astucieux que le précédent qui pouvait être résolu en suivant scrupuleusement un plan préconçu. Ici, c'est plus déstabilisant puisque très peu d'indications sont données : la longueur d'une demie corde d'un cercle dont on ne connaît pas le rayon ! Et pourtant, la magie de l'algèbre associé à des connaissances géométriques suffisent à donner la réponse. Beaucoup de classes ont bien répondu à ce défi ; là encore, il s'agit de prévoir ce que l'on doit faire et de poser les longueurs inconnues avec lesquelles il va falloir calculer. C'est ce qu'a bien fait cette classe dont la réponse débute par la figure 5.7 ou comme cette classe qui pose les inconnues et construit son raisonnement jusqu'à la réponse (Fig. 5.8).

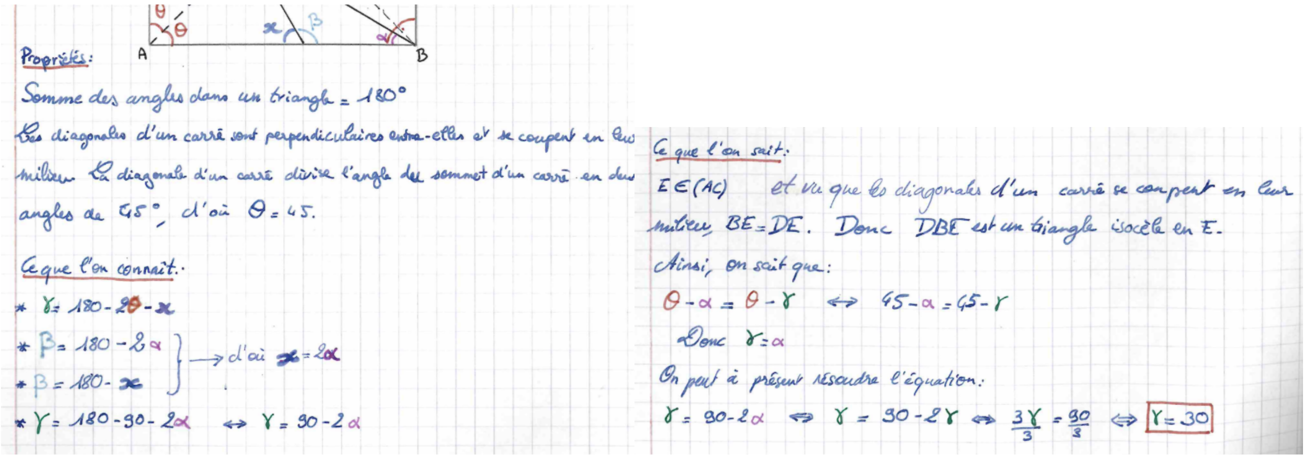


FIGURE 5.6 – Une réponse bien menée !

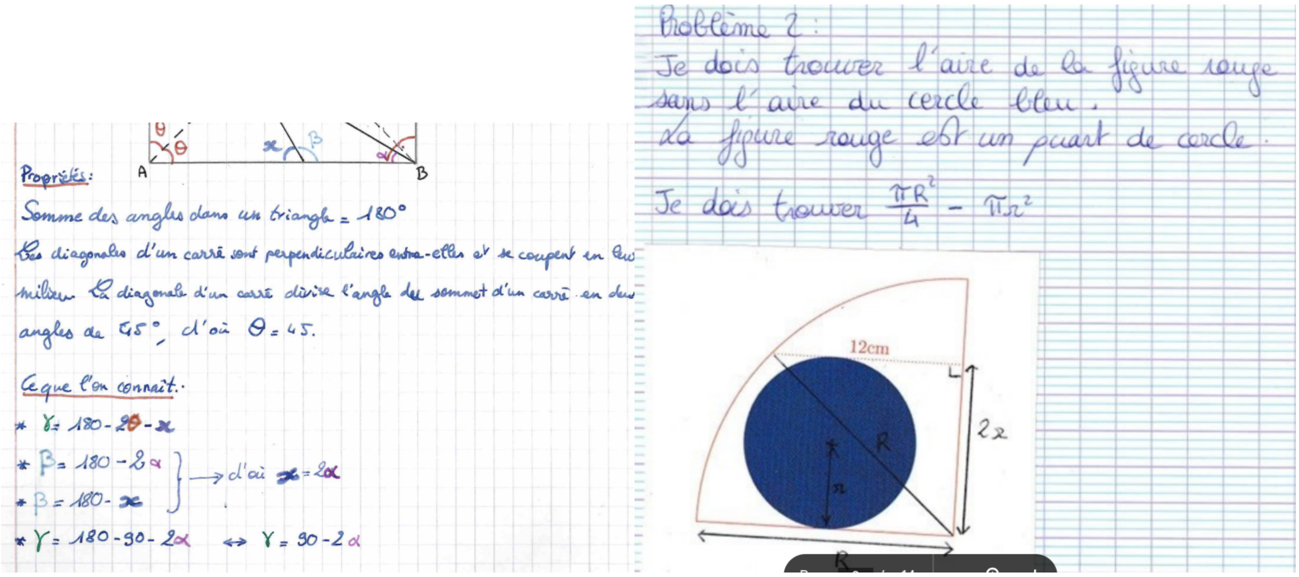


FIGURE 5.7 – Posons le problème !

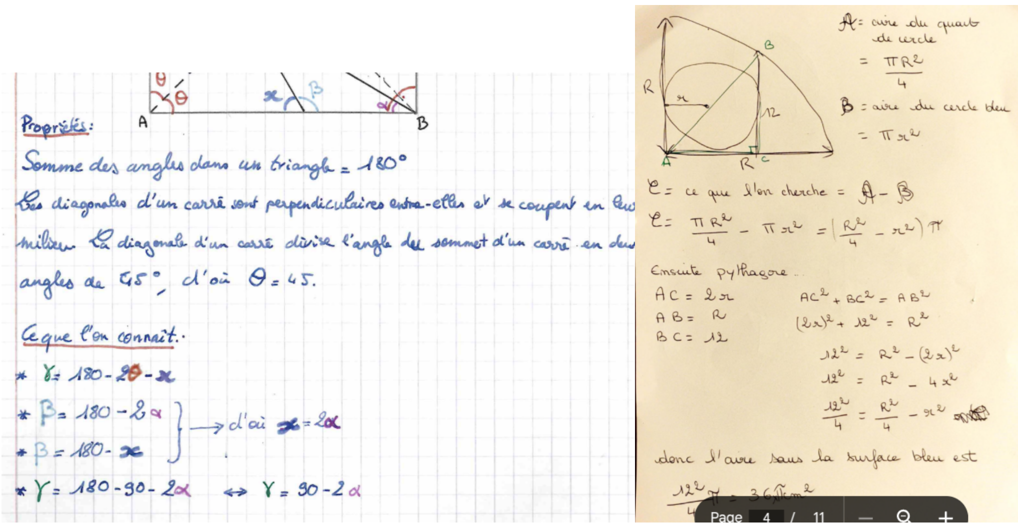
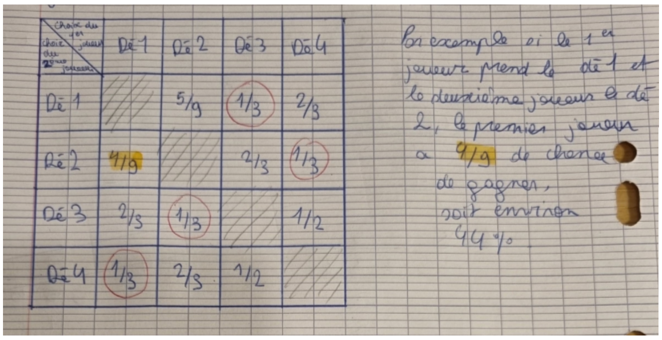


FIGURE 5.8 – Un raisonnement bien construit

Ces deux situations géométriques peuvent être utilisées dans les classes de troisième ou de seconde pour permettre aux élèves de libérer leur créativité en mathématique. L'expérience du Rallye montre bien que les élèves en sont capables !

5.4.3 Les dés

Ce problème a donné lieu à des raisonnements très intéressants et des études très complètes pour arriver souvent à une solution correcte : chaque dé a son supérieur ! Cette idée, assez contre-intuitive, est intéressante à proposer à des élèves qui commencent à découvrir le calcul des probabilités. La solution utilisant des arbres montre aussi la puissance de ce moyen de représentation et de calcul. Les classes ont utilisé ou bien des tableaux (Fig. 5.9), ou des arbres (Fig. 5.10), ou même des expériences conduisant à une approximation de la probabilité par une fréquence (Fig. 5.11). Toutes ces solutions nous paraissent pertinentes et peuvent être reprises en classe en troisième et seconde, bien sûr, mais aussi beaucoup plus tôt, lors de l'introduction du concept de probabilité. Je pense en particulier aux classes primaires qui abordent les probabilités dès la rentrée 2025-2026.



2ème joueur / 1er joueur	Probabilités de gagner pour le deuxième joueur			
	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Dé 4
Dé 1		20/36	12/36	24/36
Dé 2	16/36		24/36	12/36
Dé 3	24/36	12/36		18/36
Dé 4	12/36	24/36	18/36	

Note : Ce tableau confirme notre hypothèse de départ, selon laquelle il est avantageux d'être le joueur 2.

Figure 5.9 – Des tableaux pour exprimer les probabilités

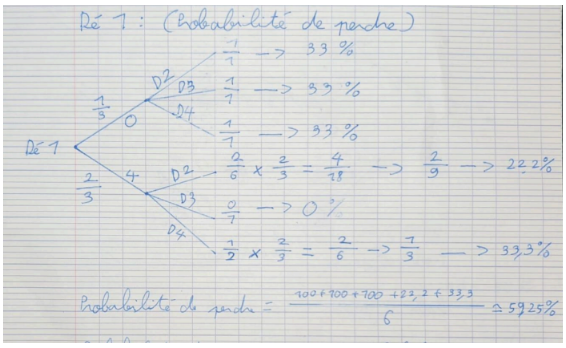


Figure 5.10 – Des arbres de probabilité

5.4.4 Combien de premiers ?

Toutes les classes qui ont abordé ce problème ont trouvé que 5 était une solution puisque $5 - 2 = 3$ et $7 - 2 = 5$ (Fig. 5.12) ; la difficulté était alors de trouver que c'était la seule solution. Les réponses ont été nombreuses à considérer les nombres premiers comme d'une part des nombres impairs (sauf pour 2 qui était rapidement exclu) et de mettre en évidence que ces nombres impairs pouvaient être congru à 1 ou 2 modulo 3 (qu'ils avaient comme reste 1 ou 2 dans

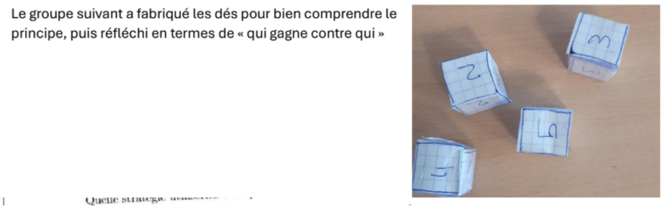


Figure 5.11 – Expériences avec les dés

la division euclidienne par 3) ce qui conduisait rapidement à la solution. Tous les correcteurs des Olympiades savent bien l'importance des congruences dans la résolution des problèmes des concours nationaux ou internationaux. D'où l'intérêt de montrer à tous les élèves participants au Rallye cet outil extraordinaire. Beaucoup de classes s'en sont bien emparées pour donner des raisonnements bien satisfaisants pour ce problème, mais aussi, beaucoup de classes ont exprimé le résultat sans démonstration.

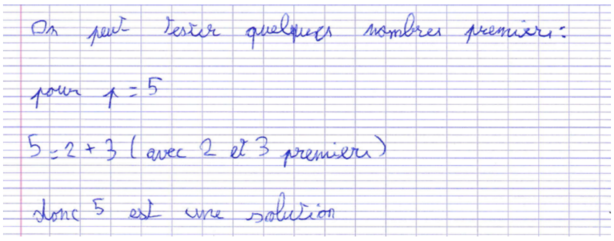


Figure 5.12 – Une solution

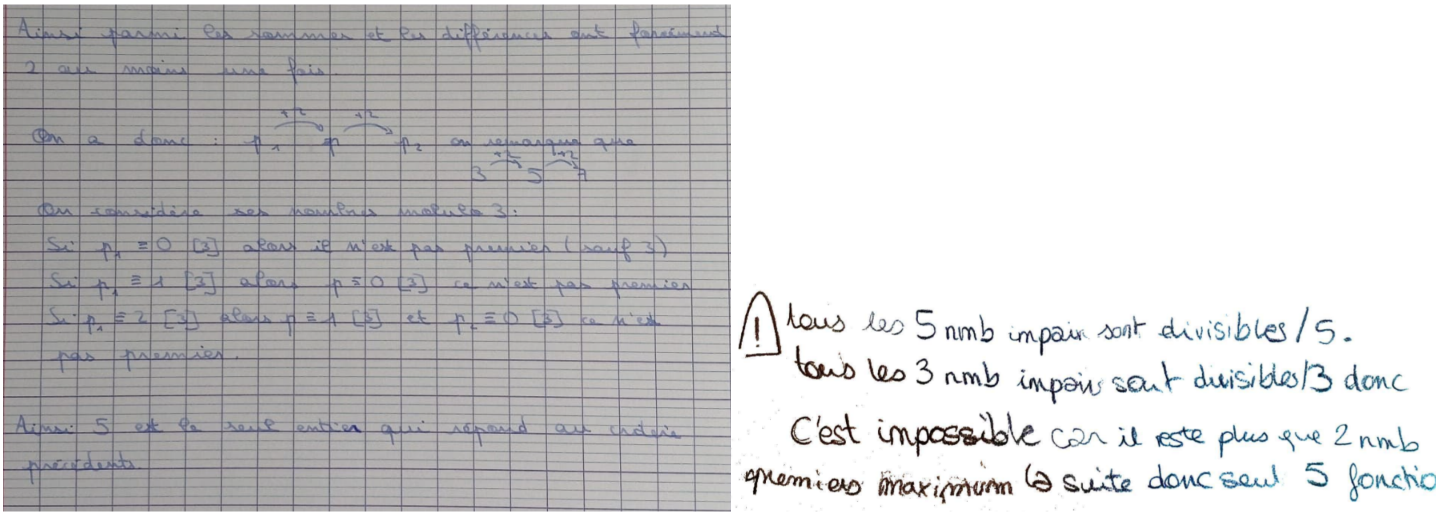


Figure 5.13 – Utilisation des congruences ou de la divisibilité

5.4.5 Dominos

Comme attendu, beaucoup de réponses ont été données à ce problème. En effet, des manipulations permettent de résoudre des cas particuliers et d'obtenir des résultats intéressants. Ce problème a été utilisé aussi lors de la finale du Rallye 2025 (Fig. 5.15) ; cette finale se déroule traditionnellement sur le campus de la Doua et les élèves des classes sélectionnées font un Rallye en découvrant le campus universitaire de l'Université Lyon 1.

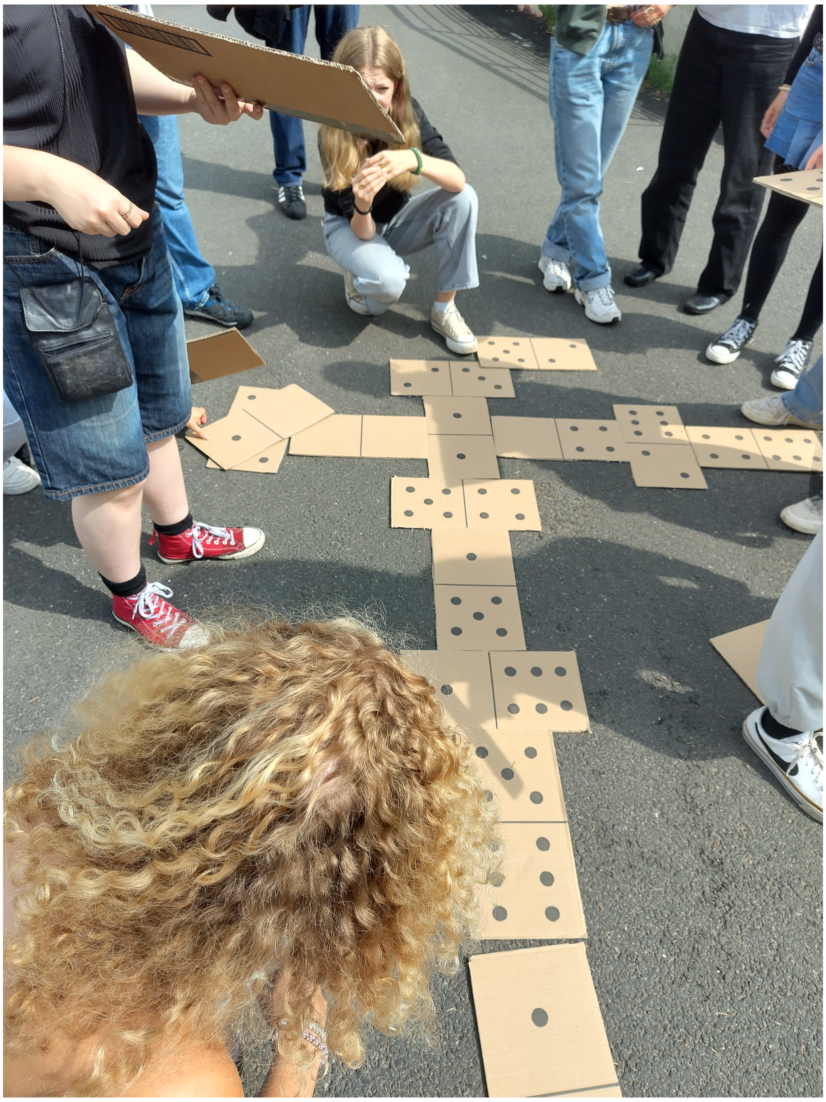


Figure 5.14 – Des dominos sur le campus de la Doua

En revanche, les réponses n'ont jamais dépassé les phases d'expérimentation (Fig. 5.15) et très peu de raisonnement ont été tenté pour essayer de justifier la possibilité ou l'impossibilité de construire des chaînes avec des n-dominos.

Conclusion Cette quinzième session de l'épreuve du problème ouvert s'est encore une fois bien déroulée avec de plus en plus de réponses fournies par les classes. Le bonus que la participation à cette épreuve offre attire des classes qui ne se seraient peut-être pas penchées sur les problèmes mais les réponses proposées montrent bien que les élèves se sont pris au jeu. Tous les exemples qui parsèment ces paragraphes *Dans les classes* montrent bien l'engouement de la recherche de problèmes ; les professeurs des classes inscrites encouragent les élèves, pour certains organisent des séances de recherche et facilitent la communication des réponses proposées par les élèves. Nous n'avons que peu de retours sur les façons dont ces problèmes sont proposés aux élèves des classes inscrites, mais le nombre croissant de réponses est un encouragement à continuer ce travail !

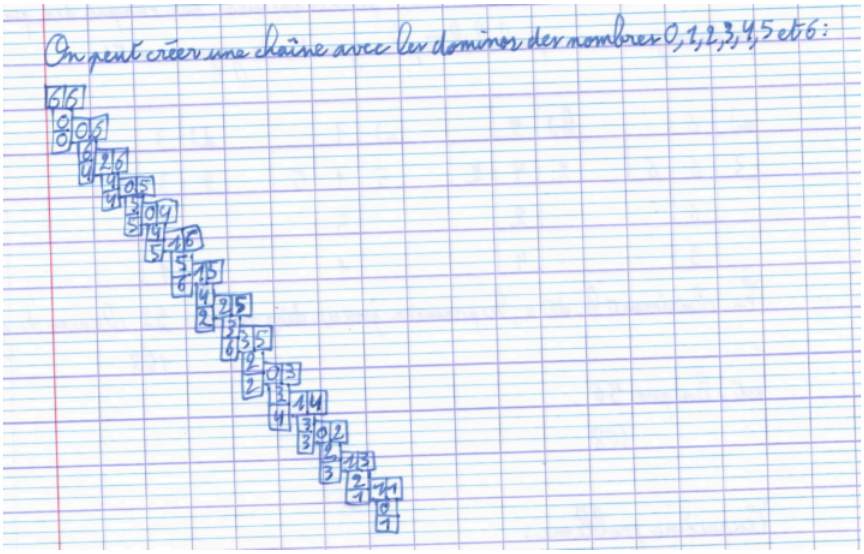


Figure 5.15 – Suite de dominos

Conclusion

Pourquoi faire chercher des problèmes ? Ne sont-ils pas trop compliqués pour les élèves ? N'est-ce pas du temps perdu sur la maîtrise des techniques mathématiques si importantes pour *réussir* en maths ? Qu'est-ce qu'on (les élèves, les professeurs) gagne dans ces séances de recherche souvent bruyantes et en apparence désordonnées ? Est-ce la solution pour améliorer les compétences des élèves dans les évaluations internationales ? Pourquoi s'obstiner à faire chercher des problèmes de géométrie ou d'arithmétique, matières qui sont de plus en plus réduites dans les programmes de mathématiques ? Est-ce vraiment important de comprendre des mathématiques, ne suffit-il pas de maîtriser quelques techniques utiles dans la vie quotidienne ? Quelle image des mathématiques est donnée à travers ces problèmes ouverts si éloignés des problèmes concrets qui se posent quotidiennement ?

Nous, et d'autres avant nous, nous sommes bien sûr posé toutes ces questions. Avons nous des réponses définitives ? Non, bien sûr ! Les formules magiques pour enseigner les mathématiques n'existent pas et toute méthode présentée comme telle n'est que supercherie. En revanche, de nombreux travaux scientifiques en didactique des mathématiques (*mathematics education* dans le monde anglo-saxon) mettent en évidence les apports d'un enseignement fondé sur des situations fondées sur des manipulations d'objets théoriques ou tangibles. Dans la tradition d'Emma Castelnuovo qui soutenait que les mains sont les outils les plus démocratiques, l'expérience permet de travailler sur des objets concrets (figures, objets tangibles, objets naturalisés,...) pour atteindre l'abstraction des modèles mathématiques sous-jacents. « Problem-based learning is a type of developmental learning, where learning content is represented as a system of open-ended problems of different complexity levels. »[Shabanova *et al.*, 2018]

Pour Schoenfeld ([Schoenfeld, 1992]), le processus de résolution de problèmes est un dialogue entre les connaissances préalables de celui qui cherche à résoudre le problème, ses tentatives et ses réflexions tout au long du processus ([Schoenfeld, 1982]). En tant que tel, le cheminement vers la solution d'un problème est un processus émergent et dépendant du contexte. Cela s'écarte des processus prédéfinis et indépendants du contexte de l'heuristique de Polya ([Polya, 1945]). Cela ressort clairement de la description qu'en fait Schoenfeld ([Schoenfeld, 1982]) d'un bon *résolveur* de problèmes :

> To examine what accounts for expertise in problem solving, you would have to give the expert a problem for which he does not have access to a solution schema. His behavior in such circumstances is radically different from what you would see when he works on routine or familiar "non-routine" problems. On the surface his performance is no longer proficient ; it may even seem clumsy. Without access to a solution schema, he has no clear indication of how to start. He may not fully understand the problem, and may simply "explore it for a while until he feels comfortable with it. He will probably try to "match" it to familiar problems, in the hope it can be transformed into a (nearly) schema-driven solution. He will bring up a variety of plausible things : related facts, related problems, tentative approaches, etc. All of these will have to be juggled and balanced. He may make an attempt solving it in a particular way, and then back off. He may try two or three things for a couple of minutes and then decide which to pursue. In the midst of pursuing one direction he may go back and say "that's harder than it should be" and try something else.
> Or, after the comment, he may continue in the same direction. With luck, after some aborted attempts, he will solve the problem. (p. 32-33)

Et les problèmes qui sont présentés dans cet ouvrage ont tous cette propriété de laisser un espace d'expérimentation avec des objets matériels ou des objets suffisamment naturalisés pour pouvoir constituer un domaine d'expérience. Mais ils ont aussi la propriété d'être construits sur des connaissances et dans des domaines suffisamment familiers pour pouvoir être convoqués facilement par les élèves. Le reste est question de curiosité, de créativité, de persévérance et quelque soit le résultat atteint, la confrontation avec la complexité et la possibilité de s'en accomoder, voir de la maîtriser donne une image humaine des mathématiques. Non, il n'est pas nécessaire d'être un génie pour faire des mathématiques, non les mathématiques ne sont pas la chasse gardée des garçons, mais il faut construire à partir de ses connaissances propres et des expériences menées sur des objets naturalisés un raisonnement logiquement correct pour avancer un peu dans la recherche. Et cette avancée permet d'approfondir ses connaissances et de se construire une image positive des mathématiques.

Beaucoup d'auteurs mentionnent le fait qu'un *problème* dont la résolution fait directement référence à son mode de résolution ou à des techniques connues ne mérite pas le titre de « problème ». Perkins ([Perkins, 2000]), par exemple, insiste sur le fait qu'un problème se doit d'être problématique !
Perkins (Ibid.) distingue les problèmes raisonnables des problèmes déraisonnables (*unreasonable*). Les deux types de problèmes peuvent être résolus mais seuls les premiers peuvent être résolus par un raisonnement. Les second nécessitent une innovation (il parle du phénomène AHA !) pour être résolus.
Mais cependant, le problème est en soi inerte. Il n'est ni raisonnable ni déraisonnable. C'est la personne qui s'en empare qui confère cette qualité au problème. Il reconnaît également qu'un problème déraisonnable pour une personne peut être tout à fait raisonnable pour une autre ; le caractère raisonnable dépend de la personne. Perkins (Ibid.) en déduit alors des heuristiques qui peuvent débloquer les situations selon que les difficultés proviennent d'un espace de possibles trop grand ou au contraire trop étroit et ne permettant pas d'avancer ou que la recherche semble se heurter à un mur ou enfin si chacune des pistes semble le détourner de la solution. Tout comme Polya ([Polya, 1945]), Perkins propose des heuristiques comme méthode générale de la résolution de problème. Les critiques, notamment de la psychologie de la forme (Gestaltpsychologie), portent sur le fait que la résolution de problèmes est le fruit d'une perspective personnelle et, à ce titre, ne peut s'enseigner. En fait, selon cette théorie, non seulement la résolution de problèmes ne peut s'enseigner, mais toute tentative d'adhérer à une heuristique, quelle

qu'elle soit, entrave la recherche d'une solution correcte ([Krutestkii, 1976]). Même si cette position tend à laisser penser qu'il y aurait une prédisposition à résoudre des problèmes, plus raisonnablement, ils pointent le fait que apprendre systématiquement une méthode de résolution empêche de s'autoriser à sortir du moule et à réfléchir par soi pour atteindre ce phénomène du AHA ! Il s'agit donc certainement de prendre une position médiane et de considérer les heuristiques comme des aides potentielles, des idées à considérer lorsque la recherche semble conduire à des impasses mais sans en faire la méthode miracle pour résoudre les problèmes.

C'est à partir de ces réflexions que nous avons pensé les problèmes ouverts du Rallye et que nous continuerons à en proposer dans les années futures.

Table des figures

Bibliographie

[Aldon, 2018] ALDON, G. (2018). *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux*. Canopée-IREM de Lyon.

[Aldon, 2021] ALDON, G. (2021). *Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon*. IREM de Lyon.

[Aldon *et al.*, 2010] ALDON, G., CAHUET, P.-Y., DURAND-GUERRIER, V., FRONT, M., KRIEGER, D., MIZONY, M. et TARDY, C. (2010). *Expérimenter des problèmes innovants en mathématiques à l'école*. INRP, Université Claude-Bernard-Lyon 1 (IUFM).

[Aldon et Gardes, 2020] ALDON, G. et GARDES, M. L. (2020). Les trois carrés. manquerait-il une donnée ? *Petit x*, 113:90–95.

[Aldon et Tisseron, 1998] ALDON, G. et TISSERON, C. (1998). Des situations pour mettre en oeuvre une démarche scientifique au lycée. *In Actes du Colloque Recherche et Formation*. IUFM de Grenoble.

[Arsac *et al.*, 1992] ARSAC, G., BALACHEFF, N. et MANTE, M. (1992). Teacher's role and reproducibility of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23:5–29.

[Arsac *et al.*, 1991] ARSAC, G., GERMAIN, G. et MANTE, M. (1991). *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.

[Arsac et Mante, 1983] ARSAC, G. et MANTE, M. (1983). Des problèmes ouverts dans nos classes de premier cycle. *Petit x*, 2:5–33.

[Balacheff, 1988] BALACHEFF, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège*. phdthesis, Université Joseph Fourier Grenoble 1.

[Barbin et Boyé, 2006] BARBIN, E. et BOYÉ, A. (2006). *François Viète, un mathématicien sous la renaissance*. Vuibert.

[Bkouche, 1997] BKOUCHE, R. (1997). Quelques remarques à propos de l'enseignement de la géométrie. *Repères IREM*, 26:49–71.

[Brousseau, 1986] BROUSSEAU, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*. Thèse de doctorat, Université de Bordeaux 1.

[Clairaut, 1741] CLAIRAUT, A. C. (1741). *Élémens de géométrie, par M. Clairaut,de l'Académie Royale des Sciences et de la société Royale de Londres*. David fils (Paris).

[Davies, 1959] DAVIES, R. (1959). On langford's problem (ii). *The mathematical gazette*, 43: 253–255.

[Dewey, 1938] DEWEY, J. (1938). Experience and education. *The Educational Forum*, 50(3): 241–252.

[Durand-Guerrier et Aldon, 2007] DURAND-GUERRIER, V. et ALDON, G. (2007). La dimension expérimentale dans les problèmes de recherche en mathématiques. *In Actes de la CIEAEM 59, Dobogòckö*. CIEAEM.

[Front, 2015] Front, M. (2015). *Émergence et évolution des objets mathématiques en Situation Didactique de Recherche de Problème : le cas des pavages archimédiens du plan.* phdthesis, Université Lyon1.

[Gardes, 2013] Gardes, M.-L. (2013). *Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres.* phdthesis, Université Lyon 1.

[Gardes et Mizony, 2012] Gardes, M.-L. et Mizony, M. (2012). La conjecture d'erdös-straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*, 87:59–78.

[Hilbert, 1900] Hilbert, D. (1900). Matematisch probleme. *In Göttinger Nachrichten König. Geselschaft der Wisenschaften, Translated for the BULLETIN, with the author's permission, by Dr. MARY WINSTON NEWSON.*, pages 437 – 479. Mathematisches Institut Leipzig.

[Krutestkii, 1976] Krutestkii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* University of Chicago Press.

[Laborde, 1989] Laborde, C. (1989). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploration de phénomènes didactiques. *Numdam*, S6:9–11.

[Longo, 2020] Longo, G. (2020). La rigueur. *In* Paul, T. et Schmidt, M., éditeurs : *Le jeu difficile entre rigueur et sens*, pages 21 – 28. Spartacus IDH.

[Maronne et Patras, 2022] Maronne, S. et Patras, F. (2022). L'épistémologie mathématique de gaston bachelard. *In* (1)-2, M., (dir.) : *Gaston Bachelard and philosophy of science today*, pages 21 – 28. Spartacus IDH.

[Peix et Tisseron, 2003] Peix, A. et Tisseron, C. (2003). Concepts didactiques pour analyser et réorganiser ne formation à la conduite de problèmes de recherches à l'école élémentaire. *In* Durand-Guerrier, V. et Tisseron, C., éditeurs : *Actes du séminaire national de Didactique des Mathématiques, année 2002.* IREM de Paris 7.

[Perkins, 2000] Perkins, D. (2000). *Archimedes' bathtub : The art of breakthrough thinking.* Norton and Company.

[Petitot, 1987] Petitot, J. (1987). Refaire le « timée » : Introduction à la philosophie mathématique d'albert lautman. *Revue d'histoire des sciences*, 40 (1):79–115.

[Pilet et Grugeon, 2021] Pilet, J. et Grugeon, B. (2021). L'activité numérico-algébrique à la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. *Education et Didactiques*, 15-2:9–26.

[Polya, 1945] Polya, G. (1945). *How to solve it ?* New Jersey Princeton Universit.

[Schoenfeld, 1982] Schoenfeld, A. (1982). Some thoughts on problem-solving research and mathematics education. *In* Lester, F. et Garofalo, J., éditeurs : *Mathematical problem solving : Issues in research*, pages 27–37. Franklin Institute Press.

[Schoenfeld, 1992] Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically : Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *In* Grouws, D., (dir.) : *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pages 334–370. Simon and Schuster.

[Shabanova *et al.*, 2018] Shabanova, M., Sergeeva, T., Nikolaev, R. et Pavlova, M. (2018). Inquiry-based mathematics education in the style of experimental mathematics. *In INTED2018 Proceedings*, pages 7933–7941. IATED.

[Therez et Therez, 2018] Therez, D. et Therez, G. (2018). Le rallye dans l'enseignement des maths. *In* Aldon, G., (dir.) : *Le rallye mathématique dans la classe : un jeu très sérieux*, pages 115–145. Canopée-IREM de Lyon.

[Viète, 1591] Viète, F. (1591). *Francisci Vietae in artem analyticem isagoge.* Metayer, Tours.

IREM Académie de Lyon - Université Claude Bernard Lyon 1
Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques

Titre : Les problèmes ouverts du Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon 2021-2025

Auteur : Gilles Aldon

Éditeur : IREM de Lyon

Date : 16 septembre 2025

Résumé : Le Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon fête en 2025 ses 20 ans d'existence. L'épreuve « Problème ouvert » du Rallye existe, elle, depuis 2011, vingt ans après la publication de « Problème ouvert et situation problème » de Gilbert Arsac, Gilles Germain et Michel Mante.

La tradition est robuste à l'IREM de Lyon !

Elle s'appuie sur des travaux des groupes de recherche qui n'ont pas cessé depuis 1991 de travailler sur le rôle des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, notamment l'équipe DREAM (Démarches de Recherche pour l'Enseignement et l'Apprentissage des Mathématiques) et l'équipe du Rallye appuyée par l'association RMAL (Rallye Mathématique de l'Académie de Lyon).

Cette brochure reprend les énoncés des épreuves de problème ouvert 4 de 2021 jusqu'à 2025. Pour chacun des problèmes, nous proposons une petite exploration mathématique puis quelques comptes rendus des travaux réalisés par les élèves qui peuvent donner des pistes pour utiliser en classe ces problèmes.

Mots clef : Problème ouvert, rallye

Pages : 98 A4

ISBN : 978-2-90694371-1

Prix : 10€

9 782906 943711

IREM de Lyon – 21 avenue Claude Bernard – F69622 Villeurbanne cedex
Tél : 04.72.43.13.82 ou 04.72.44.81.24 – Fax : 04.72.44.80.67
Courriel : iremlyon@univ-lyon1.fr - Site : http://math.univ-lyon1.fr/irem/