Introduire les probabilités devant les élèves: activités « clef en main »

(animées par Annette Corpart et Nelly Lassalle)

Phénomène aléatoire : *« Le Hasard ne se définit pas plus que la Gravitation ou l'Amour… On en ressent les effets mais on ne sait pas trop ce que c'est. »* (Jean-Claude Girard)

Probabilité comme fréquence limite : *« Il y a tellement de gens qui trouvent à travers le monde la seule femme qu'ils puissent aimer, que l'énorme fréquence de ces rencontres me rend sceptique, moi qui ai un certain respect du calcul des probabilités. »* (Tristan Bernard)

Evénement impossible : *« Le sommet du crâne est apparemment l'unique endroit où l'on n'a aucune chance de pouvoir faire pousser des cheveux. »* (Groucho Marx)

Lorsque des questions de probabilité sont posées aux élèves en termes de «chances de gagner ou de perdre », avant tout enseignement théorique, les élèves ne refusent jamais de répondre sous prétexte que cela ne leur a jamais été enseigné. Autrement dit, la plupart ont une conception a priori de la notion de probabilité.

- ## Programme de la journée :

Présentation

Partie 1 : **Expériences à une épreuve**

Partie 2 : **Expériences à deux épreuves**

Partie 3 : **Autres situations de probabilité**

Partie 4 : **Commet bien choisir au hasard**

- ## Bibliographie :

➢ Statistique et Citoyenneté (Le citoyen face au chiffre) - IREM de Paris Nord (Brochure n°135 – 2007)

➢ Arbres et probabilités – IREM de Besançon (édition 1999)

➢ L'induction statistique au lycée illustrée par le tableur – Philippe DUTARTE (Edition Didier – 2005)

➢ Statistique au lycée, Volumes 1 et 2 – Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités (Brochures APMEP n°156 – 2005 et n°167 – 2007)

➢ **Document ressource des nouveaux programmes de lycée professionnel** :

http://eduscol.education.fr/pid23218-cid46460/ressources-en-mathematiques-et-sciences-physiques-et-chimiques.html

➢ **Sites pour obtenir des données brutes :**

http://www.insee.fr/fr/bases-de-données

http://www.statistiques-mondiales.com

En introduction

Enoncé 1

Je jette une pièce de monnaie non truquée. Combien ai-je de chances d'avoir « Pile » ?

Question : Peux tu répondre à la question posée ? Oui Non

Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

Enoncé 2

Je lance un dé classique (non truqué). **1.** Combien ai-je de chances d'avoir « 2 » ?

2. Combien ai-je de chances d'avoir un numéro pair ?

Questions : ✦ Peux tu répondre à la question **1.** ? Oui Non

Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

✦ Peux tu répondre à la question **2.** ? Oui Non

Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

Enoncé 3

Une urne contient 3 boules jaunes et 4 boules rouges. Les boules sont indiscernables au toucher. Je tire une boule (sans regarder !) **1.** Combien ai-je de chances de tirer une boule jaune ?

2. Combien ai-je de chances de tirer une boule rouge ?

Questions : ✦ Peux tu répondre à la question **1.** ? Oui Non

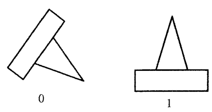
Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

✦ Peux tu répondre à la question **2.** ? Oui Non

Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

Enoncé 4

Je lance une punaise. Combien ai-je de chances que la punaise tombe sur sa tête (position 1) ?



Question : Peux tu répondre à la question posée ? Oui Non

Si oui, réponds :
………
Si non, pourquoi ?
………

Expériences à une épreuve

• **Expérimentation** : lancer un dé, tirer une carte, une boule ou un jeton.

• **Objectifs** : - s'interroger sur la liste des résultats possibles, leur variabilité, imprévisibilité, leurs fréquences, l'existence d'une « répartition idéale » ;

- réfléchir à l'indépendance des résultats vue sous l'angle d'absence de mémoire (le dé ne sait pas ce qui s'est passé avant) car les dés seront peu à peu remplacés par des « dés électroniques » ;

- observer que des situations familières sont interchangeables pour décrire un modèle.

• **Simulation** : utiliser le tableur et les fonctions ALEA.ENTRE.BORNES et NB.SI

On mettra en évidence intuitivement la convergence des fréquences; on constatera la nécessité de nombreux lancers pour que la fréquence de sortie du 6 s'approche et se stabilise autour du nombre 1/6.

Attention : la convergence dans la loi des grands nombres est lente. En travaillant sur un trop petit nombre de lancers (pour que les feuilles de calcul soient plus lisibles), on risque d'obtenir des résultats aberrants. Ce n'est pas parce que le hasard s'assagit avec le temps : quand on calcule une fréquence, on met le nombre n de lancers au dénominateur, si bien que l'effet des sautes d'humeur du numérateur sont amoindries lorsque n est grand.

• **Notions de cours** : on peut s'appuyer par exemple sur l'activité qui suit (voir la fiche élève page suivante).

<u>*Autre support possible*</u> : dans une urne, il y a 15 boules identiques numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard. Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « le numéro tiré est divisible par 3 ».
B : « le numéro tiré est divisible par 5 ».
C : « le numéro tiré est divisible par 7 ».
D : « le numéro tiré est divisible par 17 ».
D est un événement ***impossible*** : P(D) = 0 .
E : « le numéro tiré est divisible par 1 ».
E est un événement ***certain*** : P(E) = 1.
F : « le numéro tiré n'est pas divisible par 3 ».
F est l'événement ***contraire*** *de A* : P(F) = 1 – P(A).
G : « le numéro tiré est divisible par 3 ou par 7 ».
A et C sont deux événements ***incompatibles*** : P(G) = P(A)+P(C).
H : « le numéro tiré est divisible par 3 ou par 5 ».
A et B sont deux événements ***compatibles*** : P(H) $\neq$ P(A)+P(B).

Fiche élève

1. On va lancer un dé. Pour cela, on met le dé dans un gobelet qu'on agite avant de le lancer sur un plateau à rebord. Le dé va rouler sur le plateau avant de s'arrêter.
   Utilise la feuille des tableaux.
   a) Note le résultat du premier lancer dans la première case du tableau A. Pouvais-tu prévoir ce résultat?
   b) Explique pourquoi le résultat du 2ème lancer ne peut pas être prévu et ne dépend pas du résultat précédent.
   c) Complète le tableau A en effectuant 60 lancers.
   d) Compte les effectifs de 1, de 2,……, de 6 du tableau A. Complète alors le tableau B. On exprimera les fréquences avec des nombres à deux décimales.
   e) Pourquoi dit-on que le tableau B est un résumé du tableau A ? Quelles informations ont été perdues ?
   f) Combien vaut la somme des fréquences du tableau B ? ***Démontre*** que cette somme est 1. Si tu as trouvé un résultat différent, quelle en est la raison ?
   g) Compare tes tableaux avec ceux de tes voisins ? Sont-ils identiques ? Est-ce normal ?
   h) Complète le tableau C pour avoir selon toi une répartition idéale des 1,2,3,4,5 et 6.

2. On va maintenant cumuler les résultats obtenus par tous les élèves de ta classe.
(voir tableau B récapitulatif)
   a) Choisis une face du dé (de 1 à 6) et remplis le tableau D.
   b) Trace sur une feuille de papier millimétré les points :
      - d'abscisse : l'effectif cumulé des lancers.
      - d'ordonnée : la fréquence d'apparition correspondante pour la face choisie.
   c) Que constates-tu ?

3. On joue maintenant à tirer au hasard une carte d'un paquet de 6 cartes de même couleur, composé de l'as, du 2, du 3, du 4, du 5 et du 6. On recommence en procédant toujours de la même manière : quand une carte est tirée et qu'on a noté son numéro, on la remet dans le paquet que l'on bat avant de tirer une nouvelle carte.
   Effectue 60 tirages et note tes résultats dans le tableau E.
   a) Peux-tu dire que, comme dans le lancer d'un dé, le résultat de chaque tirage est imprévisible et ne dépend pas des tirages précédents ?
   b) En supposant que tu tires 10 fois de suite la carte 2, que pourrais-tu dire du résultat du 11ème tirage ?
   c) Chaque carte a-t-elle autant de chances de sortir que les autres ? Déduis une répartition idéale des tirages.

4. On place dans un sac opaque 6 boules ou 6 jetons, indiscernables au toucher, numérotés de 1 à 6. Le jeu consiste à secouer le sac pour bien mélanger les boules, à plonger la main dans le sac, sortir une boule, noter son numéro et la remettre dans le sac. On répète 60 fois ce tirage.
   Chaque boule a-t-elle autant de chances de sortir que les autres ? Déduis une répartition idéale des tirages.

5. Si on voulait tirer 1000 fois de suite un dé, une carte ou une boule comme précédemment, ce serait très long ! La solution consiste à simuler ces tirages à l'aide de certaines fonctions **d'un tableur**.

   a) Ouvre l'assistant fonction et lis la notice de la fonction ALEA.ENTRE.BORNES. Cette fonction produit un nombre au hasard entre 1 et 6 exactement comme si on lançait un dé ou si on tirait une carte ou une boule comme ci-dessus. **Simule ainsi 1000 lancers d'un dé** des cellules A1 à J100.

   b) Tu vas **construire l'histogramme en bâtons des fréquences d'apparition de chaque numéro**. Pour cela, présente ton travail en écrivant : *numéros des faces* en K1, *effectifs* en L1, *fréquences* en M1, *total* en K8.
   Remplis les cellules K2 à K7 avec les nombres de 1 à 6.

   Ouvre l'assistant fonction et lis la notice de la fonction NB.SI. On voit que le rôle de cette fonction est de compter les effectifs ; insère alors la formule =NB.SI($A$1:$J$100;K2) dans la cellule L2. Que compte-t-on avec cette formule ? Quel est le rôle du double dollar ? Recopie la formule jusqu'à la cellule L7. Vérifie que la somme de ces effectifs est 1000 en L8.

   Calcule les fréquences correspondantes de M2 à M7 puis leur somme en M8.

   Trace l'histogramme des fréquences avec l'assistant graphique .

   Refais plusieurs simulations en utilisant la touche F9 . Que constates-tu ?

   c) On souhaite à présent **observer l'évolution de la fréquence d'apparition du numéro 6.** Ecris *cumul des 6* en N1, *cumul des lancers* en O1, *fréquences successives* en P1.
   Insère la formule =NB.SI($A$1:J1;6) dans la cellule N2 .Cette formule donne l'effectif des 6 dans la première ligne. Recopie-la de la cellule N2 jusqu'à la cellule N101 . Quels résultats donne-t-elle ?

   En O2, écris 10 puis en O3, =O2+10 et déroule cette formule jusqu'à O101.

   Calcule les fréquences de 6 après le 10ème lancer, le 20ème lancer, etc (tu insèreras la formule utilisée en P2 que tu dérouleras jusqu'à P101.

   Utilise l'assistant graphique pour **tracer le graphe à 100 points représentant l'évolution des fréquences de 10 lancers en 10 lancers**. Que constates-tu ?

   Refais plusieurs simulations.

Feuille des tableaux

Tableau A (60 lancers)

Tableau B (résumé des 60 lancers)

Résultat	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Tableau C (répartition idéale)

Résultat	1	2	3	4	5	6
Effectif						
Fréquence						

Tableau D (mise en commun des lancers) en choisissant d'étudier la face …. et en se rapportant au tableau B récapitulatif

Lancers cumulés	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	660	720
Cumul des effectifs de la face choisie												
Fréquence correspondante												

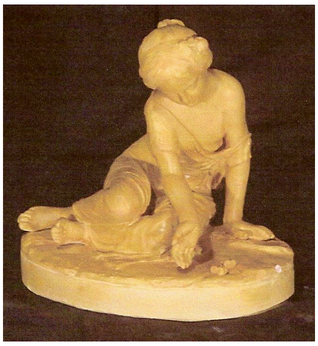
Lancers cumulés	780	840	900	960	1020	1080	1140	1200	1260	1320	1380	1440
Cumul des effectifs de la face choisie												
Fréquence correspondante												

Tableau E (60 tirages)

Tableau B récapitulatif : écris ton nom dans la première colonne puis sur la ligne de ton nom, recopie le résumé des 60 lancers de ton tableau B.

Nom de l'élève	1	2	3	4	5	6

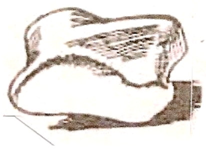
Et si on ne sait pas estimer la probabilité d'un évènement ?



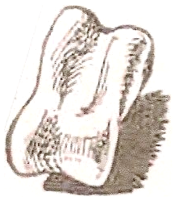
- **Expérimentation** : lancer d'un osselet.

- **Objectif** : approche fréquentiste de la probabilité dans un cas où il n'y a pas d'autre approche possible : lorsque rien ne permet d'estimer la probabilité d'un événement élémentaire, la stabilisation des fréquences conduit à une estimation de cette probabilité.

- **Description de l'activité** : on lance un osselet, il peut retomber suivant quatre positions : la position « Bosse », la position « Creux », la position « I » et la position « J ».



Position « B »



Position « C »

Position « I »

Position « J »

Quelle probabilité attribuer à la position « C » ?

- **Conditions de l'expérimentation** :

Mettre un osselet dans un gobelet. Agiter et effectuer 20 lancers. Pour chaque lancer, compter le nombre de fois où l'on obtient la position « C ».

- **Exploitation des résultats expérimentaux** :

Mise en commun des résultats de tous les élèves de la classe : compter le nombre de positions « C » obtenues parmi les 20 x N (avec N : nombre d'élèves de la classe).

Calcul de la fréquence de la position « C ».

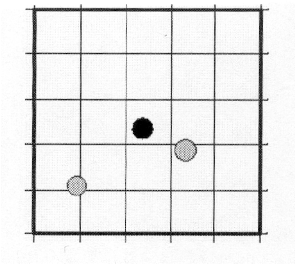
- **Synthèse** :

En réalisant des expériences aléatoires, on fait des statistiques et on calcule des fréquences d'apparition de telle ou telle issue. On ne détermine pas la probabilité (ou la loi de probabilité), mais on l'estime. Ensuite, une fois le modèle accepté, les raisonnements faits sur les probabilités sont tout à fait rigoureux.

Probabilités et Géométrie

Jeu de « Franc Carreau »

- **Principe du jeu :** on lance un palet rond sur un parquet quadrillé, on fait « Franc Carreau » si le palet s'immobilise à l'intérieur d'un carreau :



- **Objectifs :** - approche d'une probabilité (sans que cette valeur soit connue au départ, contrairement au jeu de pile ou face avec une pièce bien équilibrée ou au lancer d'un dé non pipé) à partir d'un grand nombre d'expériences.

  - justification géométrique.

- **Description du jeu :** tu prends une pièce de monnaie de 1 centime d'euro et tu la lances sur le plateau de jeu distribué. Tu fais « Franc Carreau » (et tu gagnes) si la pièce tombe sur une seule case (elle peut toucher les bords mais pas empiéter sur une autre case). Sinon tu perds.

  As tu davantage de chance de gagner que de perdre ?

- **Conditions de l'expérimentation :** Effectue 30 fois ce jeu et compte le nombre de fois où tu as fait « Franc Carreau ».

- **Exploitation des résultats expérimentaux :**

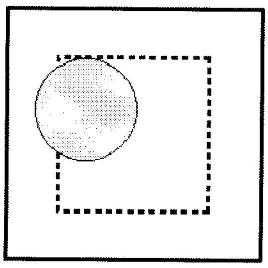
  Mise en commun des résultats de tous les élèves de la classe : compter le nombre de « Franc Carreau » obtenus parmi les 30 x N (avec N : nombre d'élèves de la classe).

  Calcul de la fréquence des « Franc Carreau »

- **Démonstration :**

Situation : elle permet de déterminer cette probabilité à l'aide de considérations géométriques : on la calcule à l'aide du rapport des aires de deux carrés.

On lance un disque de rayon $r = 0{,}8$ cm sur une portion de plan pavée par des carrés de côtés $l = 3{,}2$ cm. Il y a « Franc Carreau » si le centre du disque s'immobilise à une distance supérieure à r des côtés du carré, donc dans un carré intérieur de $l - 2r = 1{,}6$ cm.



La probabilité de gagner est donc égale au rapport « surface favorable sur surface possible », donc au rapport des surfaces des deux carrés. On a donc :

$$\text{P(Franc Carreau)} = \frac{(l-2r)^2}{l^2} = \frac{1{,}6^2}{3{,}2^2} = 0{,}25$$

Expériences à deux épreuves

- **Expérimentation** : lancer de deux dés ; jeu des cartons ; jeu du tourn'en rond.

- **Objectifs** : - estimer une distribution de probabilité *a priori* (ai-je plus de chance de gagner en choisissant cette option plutôt qu'une autre ?);
  - confronter cette estimation avec les résultats statistiques de nombreux jeux ou/et un calcul de cette distribution, à partir d'un tableau à double entrée ou d'un arbre.

- **Simulation** : on peut autoriser les élèves à utiliser de vrais dés (de couleur différente pour les aider ensuite à dénombrer les résultats possibles) ou imposer de simuler les tirages à l'aide de la calculatrice (avec la touche RAND ou RAN#) ou encore utiliser un tableur et un vidéo-projecteur.

- **Cours : -** construire des tableaux à double entrée ou des arbres pour modéliser et décrire des expériences aléatoires à deux épreuves.
  - s'appuyer sur les propriétés des fréquences (pourcentages, proportions. ..) pour mettre en place celles des probabilités : dans un arbre, *la fréquence ou la probabilité du résultat auquel conduit « un chemin » est égale au produit des fréquences rencontrées « le long de ce chemin » ; si le résultat se trouve « au bout de plusieurs chemins », on ajoute les fréquences correspondant à « ces chemins ».*

- **Activités :** voir les fiches élève pages suivantes.

Jeu des cartons

- **Description de l'activité :**

On dispose de dix cartons. Sur chacun figure un nombre. 5 de ces nombres sont positifs, les 5 autres sont négatifs.
Vaut-il mieux faire le pari d'obtenir un nombre négatif en tirant un seul carton ou d'obtenir un produit négatif en tirant successivement et sans remise deux cartons ?

- **Objectifs :**

Approche d'une probabilité (sans que cette valeur soit connue au départ) à partir d'un grand nombre d'expériences.
Calcul de cette probabilité (à partir d'un tableau à double entrée ou d'un arbre de modélisation).

- **Conditions de l'expérimentation de la deuxième situation :**

Découper les dix cartons.
Tirer successivement et sans remise deux cartons. Reproduire 10 fois cette expérience.
Compter le nombre de produits négatifs (sur les 10) obtenus avec les 2 cartons tirés.

- **Exploitation des résultats expérimentaux :**

Mise en commun des résultats de tous les élèves de la classe : compter le nombre de produits négatifs obtenus parmi les 10 x N (avec N : nombre d'élèves de la classe).
Calcul de la fréquence des produits négatifs.

- **Une méthode de démonstration possible : à partir d'un tableau à double entrée.**

Compléter le tableau suivant :

1er tirage / 2ème tirage										

Faire remarquer que dans toutes les « cases » de la diagonale, le produit n'existe pas.
Compter le nombre de « cases » où le produit est positif, celui où le produit est négatif.
En déduire la probabilité cherchée.

- **Résultat :**

Expérience aléatoire : Tirer successivement et sans remise 2 cartons.
Notons Ω l'univers et A l'événement : « le produit obtenu est négatif ».

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$$

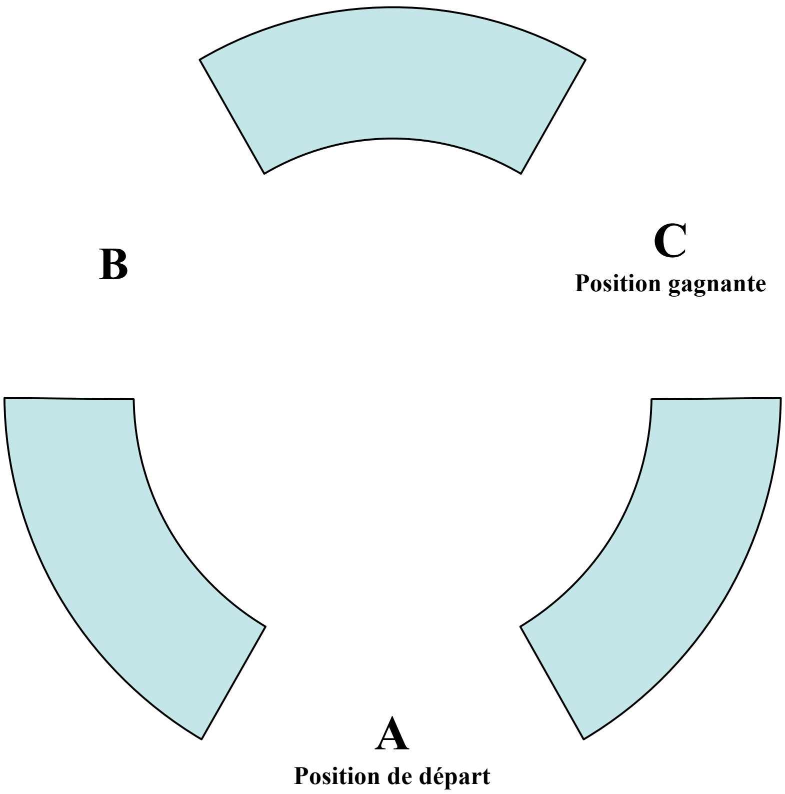
3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6

3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6

3	5	8	12	7
-1	-2	-9	-4	-6

Tourn'en rond

Se munir d'un dé, d'un jeton (une pièce de monnaie peut convenir) et du plateau de jeu ci-dessous.
Place le jeton sur le point A. Un copain te propose deux règles de jeu:



Jeu n° 1	Jeu n° 2
❖ Lance le dé: si tu obtiens 5 ou 6, tourne et déplace le jeton en B; si tu obtiens 1, 2, 3 ou 4, tourne dans l'autre sens et déplace le jeton en C. ❖ Si tu es arrivé en C, tu as gagné la partie en un coup. Si tu es arrivé en B, relance le dé: si tu obtiens encore 5 ou 6, tu arrives alors en C et tu as gagné la partie en deux coups; sinon, tu retournes en A et la partie est perdue.	❖ Lance le dé: si tu obtiens 1, 2, 3, 4 ou 5, tourne et déplace le jeton en B; si tu obtiens 6, tourne dans l'autre sens et déplace le jeton en C. ❖ Si tu es arrivé en C, tu as gagné la partie en un coup. Si tu es arrivé en B, relance le dé: si tu obtiens encore 1, 2, 3, 4 ou 5, tu arrives alors en C et tu as gagné la partie en deux coups; sinon, tu retournes en A et la partie est perdue.

Si tu veux jouer avec ton copain, chacun d'entre vous devra mettre en C une sucette.
Celui qui gagne la partie empoche les deux sucettes.

En supposant que tu es gourmand, quel jeu vas-tu choisir pour t'assurer le maximum de chance de gagner ?

1. **Simulation de l'expérience** (à faire à la maison)

Effectue 40 parties avec le jeu n°1 et note dans le tableau ci-dessous tes 40 résultats en cochant chaque partie dans la bonne case.

Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total $n_1 =$	Total $n_2 =$	Total $n_3 =$

Vérifie que $n_1 + n_2 + n_3 = 40$

Recommence 40 parties avec le jeu n°2 et note dans le tableau ci-dessous tes 40 résultats en cochant chaque partie dans la bonne case.

Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total $n_1' =$	Total $n_2' =$	Total $n_3' =$

Vérifie que $n_1' + n_2' + n_3' = 40$

Quel jeu te paraît le plus favorable après cette simulation ?

2. <u>**Exploitation des résultats expérimentaux**</u> (étude statistique)

Mettons en commun les résultats de tous les élèves de la classe dans le tableau récapitulatif suivant :

Nom de l'élève	Jeu n°1			Jeu n°2		
	Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues	Parties gagnées en un seul coup	Parties gagnées en deux coups	Parties perdues
Total	$N_1 =$	$N_2 =$	$N_3 =$	$N_1' =$	$N_2' =$	$N_3' =$

On peut vérifier que $N_1 + N_2 + N_3 = N_1' + N_2' + N_3' = 40 \times \mathrm{N}$, si N est le nombre d'élèves de la classe.

A partir de ce tableau, nous allons nous intéresser à la proportion de parties gagnées parmi les parties jouées, que nous appellerons ***la fréquence des parties gagnées***.

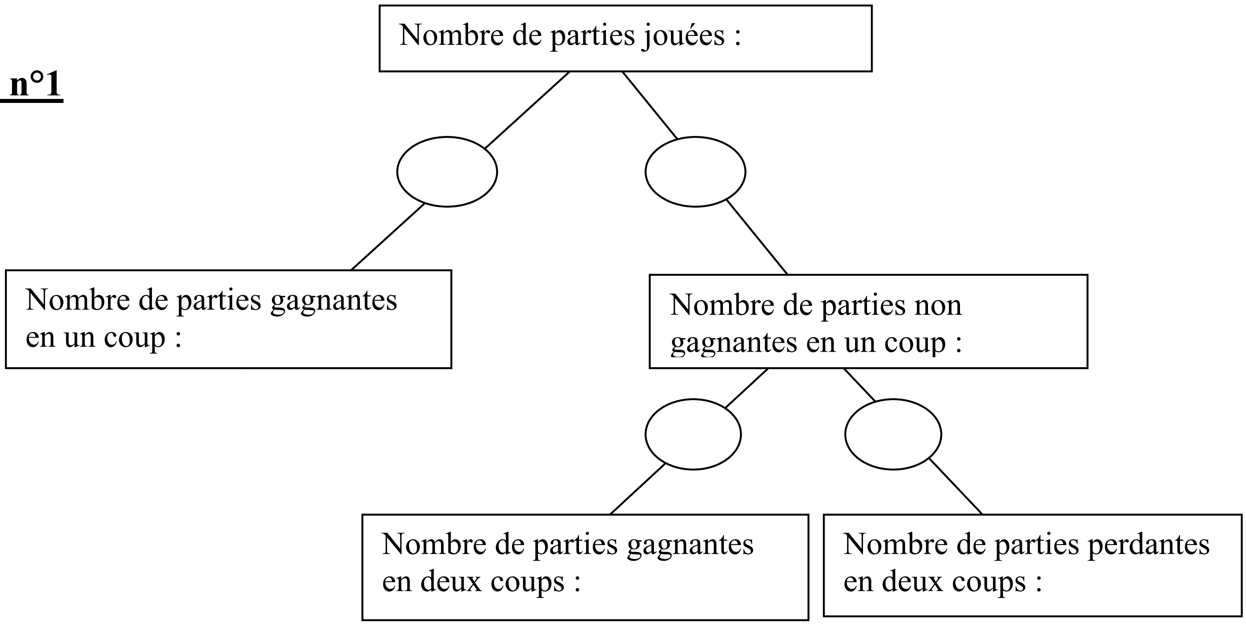
Calculer cette fréquence pour chaque jeu :

$f =$

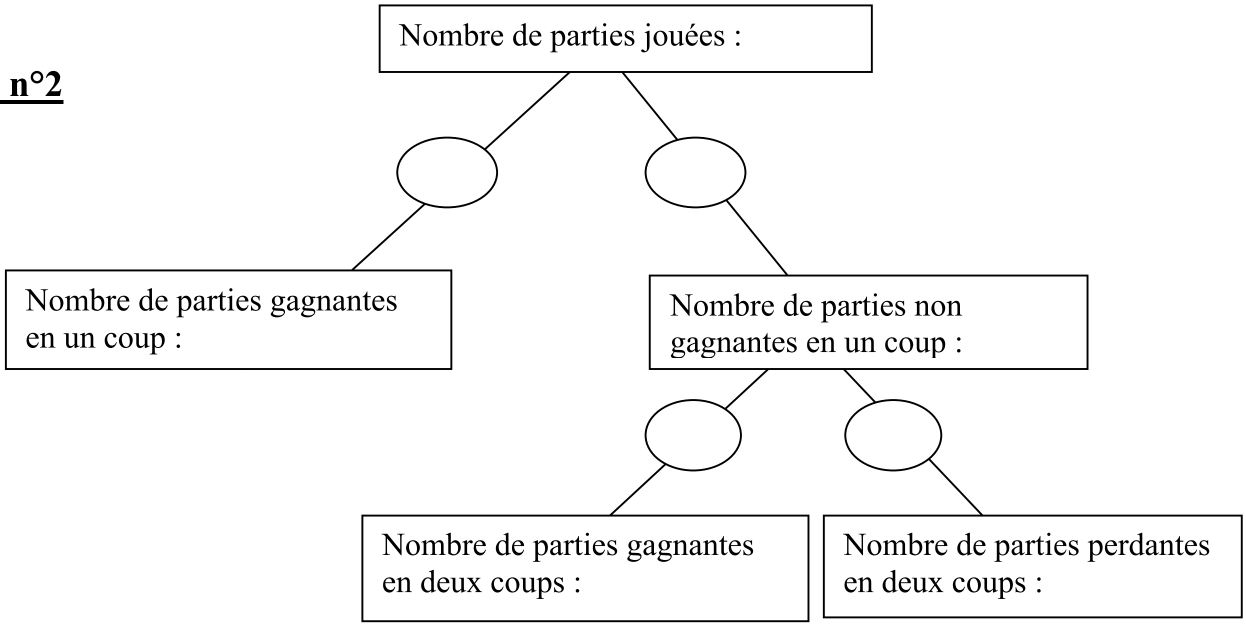
$f' =$

Résumons à présent ces résultats en complétant les schémas "en arbre" ci-dessous. Remplir les rectangles puis indiquer dans les ronds les *fréquences* correspondant à chacune des branches.

<u>Jeu n°1</u>



<u>Jeu n°2</u>



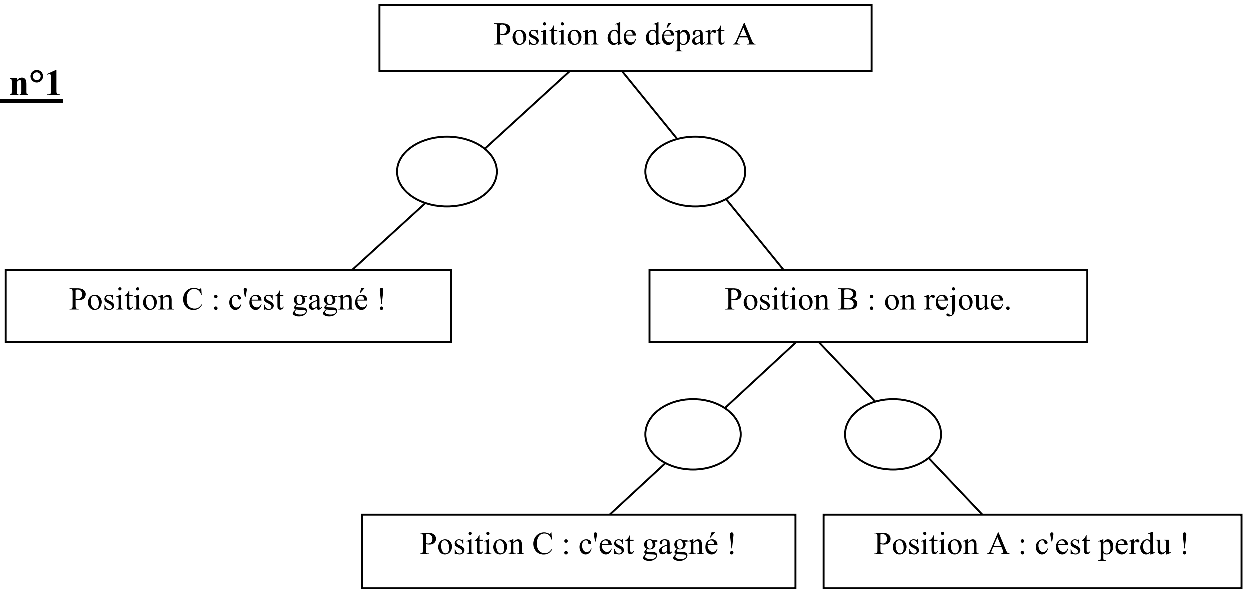
Comment peut-on retrouver *la fréquence des parties gagnées* à chaque jeu, en utilisant uniquement *les quatre fréquences* figurant dans le schéma correspondant ? De la même manière, déterminer *la fréquence des parties perdues*. Quelle relation existe-t-il entre ces deux résultats ?

3. **<u>Mesurer le hasard</u>** (domaine des probabilités)

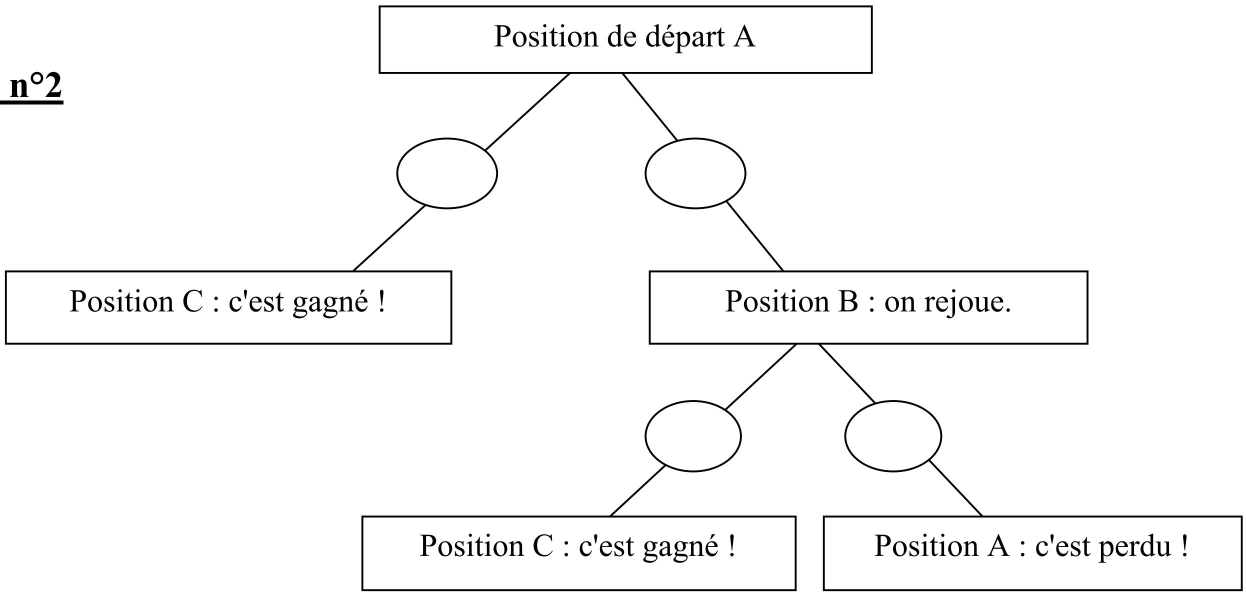
Monsieur Hasardus, savant probabiliste bien connu, prétend qu'il n'était pas nécessaire de réaliser les expériences car "*il est évident que la probabilité de gagner est de 7/9 au jeu n°1 et de 31/36 au jeu n°2 : il suffit de réaliser des arbres similaires aux précédents mais en écrivant des* ***probabilités*** *à la place des fréquences"*.

Saurez-vous faire aussi bien que lui?

<u>Jeu n°1</u>



<u>Jeu n°2</u>

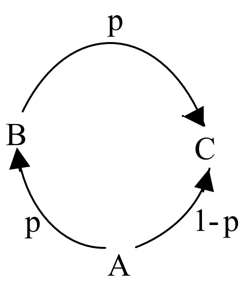


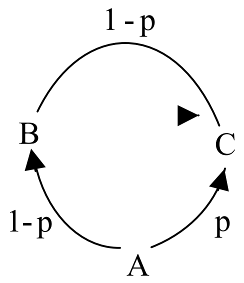
4. <u>Commentaires et prolongements</u> (pour le professeur)

- ❖ On peut faire comparer les fréquences expérimentales (déterminées a posteriori) avec les probabilités théoriques (déterminées a priori). La stabilisation autour de la valeur théorique est relativement lente.

- ❖ En exercice ou en contrôle, on peut demander aux élèves de choisir eux-mêmes les faces du dé qui mènent à C puis de faire les calculs correspondants pour déterminer la probabilité de gagner.

- ❖ On peut faire démontrer que, si p désigne la probabilité de tourner d'un cran dans un sens donné, deux jeux "symétriques" donnent la même probabilité de gagner.





En effet, cette probabilité vaut $p^2 + (1 - p)$ dans le premier cas et $(1 - p)^2 + p$ dans le deuxième.

5. <u>Bibliographie</u> : cette activité est inspirée d'une brochure de l'IREM de Strasbourg parue en 1994. ("enseigner les probabilités en classe de Terminale")

Autres situations de probabilités

Exercice 1 :

Dans un article daté de Novembre 2001, le Boston Sunday Globe indiquait que les probabilités pour une personne de mourir d'une piqûre d'araignée, d'une piqûre d'abeille ou d'une morsure de chien étaient les suivantes :

Araignée : 1 / 54 000 000

Abeille : 1 / 6 000 000

Chien : 1 / 18 000 000

Etant donné ces informations, entourez la *ou* les bonnes réponses :

a) La probabilité pour une personne de mourir d'une piqûre d'araignée est 3 fois plus grande que la probabilité de mourir d'une morsure de chien.

b) La probabilité pour une personne de mourir d'une morsure de chien est 3 fois plus grande que la probabilité de mourir d'une piqûre d'araignée.

c) La probabilité pour une personne de mourir d'une morsure de chien est 3 fois plus grande que la probabilité de mourir d'une piqûre d'abeille.

d) La probabilité pour une personne de mourir d'une piqûre d'abeille est 3 fois plus grande que la probabilité de mourir d'une piqûre d'araignée.

Réponse : *b)*

Exercice 2 :

Dans le but d'améliorer la gestion de son personnel et son recrutement, une entreprise a mis au point un test pour prévoir si un nouvel employé partira de l'entreprise dans l'année qui suit son embauche ou s'il restera plus longtemps. Ce test a été expérimenté sur 100 personnes et on a obtenu les résultats suivants :

		Décision en réalité		
		Non départ	Départ	Total
Prévision	Départ	63	12	75
	Non départ	21	4	25
	Total	84	16	100

a) Quelle est la proportion d'employés pour lesquels le test avait prédit qu'ils ne partiraient pas avant un an et qui sont en réalité partis ?

b) Quelle est la proportion d'employés pour lesquels le test avait prédit qu'ils partiraient avant un an et qui sont en réalité restés ?

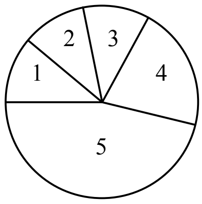
c) Comment mesurer la fiabilité de ce test, c'est-à-dire la probabilité qu'il donne une prévision correcte pour une personne donnée ?

Réponse : *c) : P(« Test fiable »)* = 1 – (0,04 + 0,63) = 0,33

Exercices pouvant se modéliser par des arbres

Exercice 3 :

a) Une roue de loterie est divisée en cinq secteurs, portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 tels que :



Les numéros 1, 2, 3 ont la même probabilité.
La probabilité du n°4 est double de celle des n° 1, 2 et 3 et celle du n°5 est double de celle du n°4.
Calculer la probabilité de chaque numéro.

b) Une seconde roue de loterie est divisée en quatre secteurs circulaires portant les numéros 1, 2, 3 et 4. Les numéros 1 et 2 ont la même probabilité. Les n° 3 et 4 ont la même probabilité, double de celle des n° 1 et 2.
Construire, en justifiant, une telle roue.

c) On fait tourner ces deux roues l'une après l'autre. On gagne lorsque la somme des numéros obtenus est 8 ou 9.
Quelle est la probabilité de gagner ?

<u>*Réponse*</u> : *c) P(«gagner»)* $= \frac{2}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{27}\approx 0,37$.

Exercice 4 :

Monsieur et Madame Dupond et leurs trois enfants Julien, Cécile et Léa tirent les rois. La galette contenant une seule fève a été partagée en cinq parts égales : chacun tire une part au hasard. Léa peut être reine si elle obtient elle-même la fève ou si un roi la choisit pour reine. Monsieur Dupond couronnera sa reine en tirant au hasard un carton dans un chapeau contenant les noms des trois femmes. Julien jouera à pile ou face pour savoir qui de ses deux sœurs sera reine.

Quelle probabilité a Léa d'être reine ?

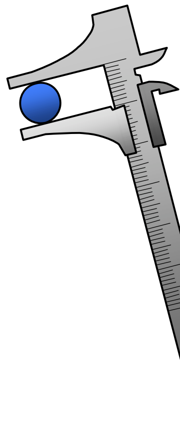
<u>*Réponse*</u> : *P(« Léa est reine »)* $= \frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{11}{30}\approx 0,37$.

Contrôle de qualité

Cette activité est extraite du document ressource des nouveaux programmes de lycée professionnel.

ACTIVITÉ 12 : PILE OU FACE ET CONTRÔLE DE QUALITÉ

Niveau : terminale professionnelle.
Module : probabilités.
Thématique : contrôler la qualité (vie économique et professionnelle).



Énoncé

Lors de certains contrôles de qualité en cours de fabrication dans l'industrie (diamètre d'une pièce par exemple), des cartes de contrôle reposent sur la procédure suivante : la moyenne de la cote surveillée (le diamètre de la pièce par exemple) est calculée sur des échantillons aléatoires prélevés régulièrement en fin de fabrication. Ces moyennes sont reportées sur une carte de contrôle (comme ci-dessous). Si une série de 7 points consécutifs se trouve du même côté de la « moyenne attendue » (la norme visée), le processus doit être surveillé pour déceler une éventuelle « dérive » dans le processus de fabrication.

L'explication du choix du nombre 7 se trouve dans la résolution du problème de probabilités suivant : une pièce de monnaie équilibrée est lancée 7 fois, quelle est la probabilité de l'événement A : « la pièce est tombée 7 fois sur pile »

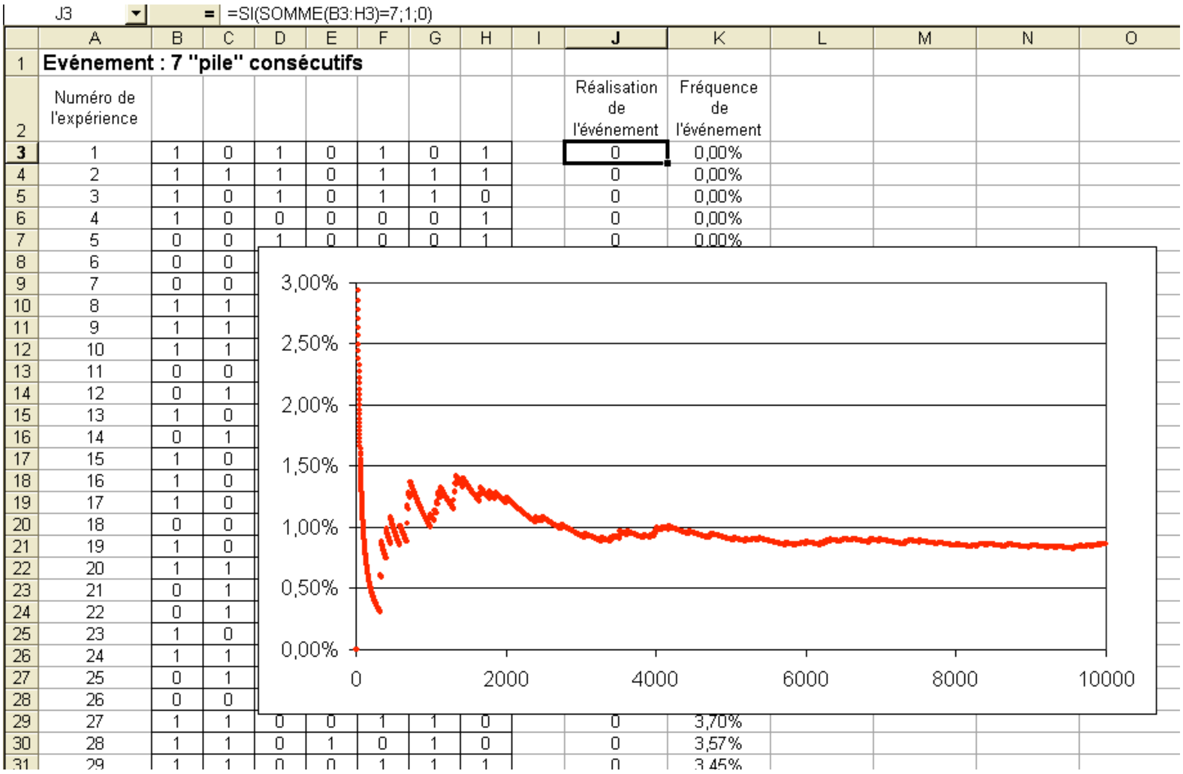
1. Estimer la valeur de cette probabilité à l'aide de simulations sur un tableur.

2. Lancer 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée.
  a) Dessiner un arbre figurant tous les résultats possibles de l'expérience.
  b) À l'aide de l'arbre précédent, calculer la probabilité de l'événement « la pièce est tombée trois fois sur pile ».

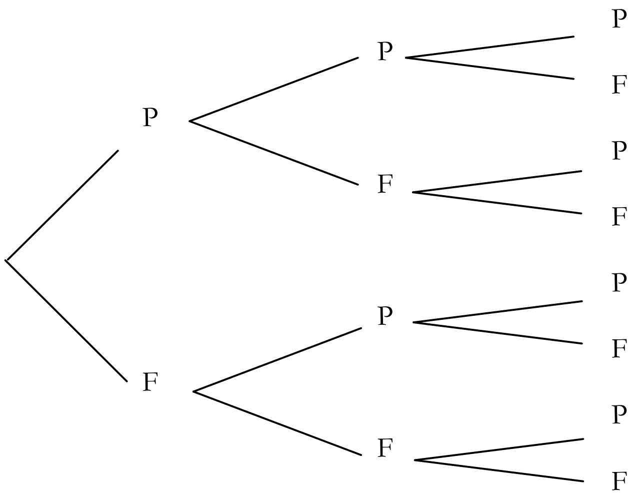
3. Par analogie avec le cas de 3 lancers, donner la probabilité de l'événement A et comparer avec l'estimation de la question **1**.

Éléments de réponse

1. Une feuille de calcul telle que celle montrée ci-après peut être constituée. Selon les circonstances, cette feuille de calcul peut-être totalement ou partiellement fabriquée par les élèves, en salle informatique ou en utilisant un vidéo projecteur.
Pour constituer cette feuille de calcul, 7 lancers à pile ou face sont simulés en introduisant en cellule B3 la formule =ENT(ALEA()+0,5) qui a été recopiée vers la droite.
La réalisation ou non de l'événement *A* est codée par 1 ou 0 avec l'introduction en cellule J3 de la formule =SI(SOMME(B3:H3)=7;1;0) .
Le calcul des fréquences cumulées de l'événement *A* est obtenu en introduisant en K3 la formule =J3/A3 puis en K4 la formule =SOMME(J$3:J4)/A4 .
Il faut sélectionner la ligne 4 puis recopier vers le bas, par exemple jusqu'à la ligne 10 002 pour obtenir la fréquence de l'événement *A* sur 10 000 expériences.
La touche F9 permet de répéter les 10 000 expériences et de faire constater que la probabilité de l'événement *A* est un peu inférieure à 1 %.



2. a)



b) La probabilité de l'événement PPP est $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0{,}125$.

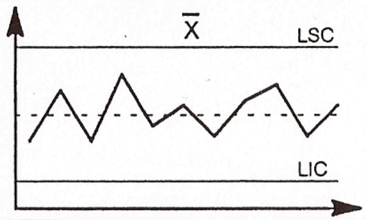
3. On a $P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^7$, soit environ 0,008 c'est-à-dire 0,8 %.

Ce résultat est conforme aux observations des simulations.

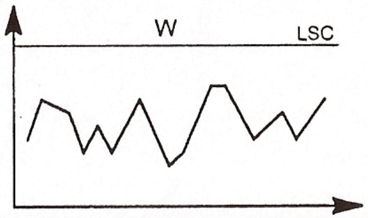
MSP
RENAULT

GUIDE MSP

PROCESSUS MAITRISE



Répartition homogène des points entre les limites de contrôle



ACTIONS

ATTENDRE LE PROCHAIN PRELEVEMENT

POINT HORS LIMITE DE CONTROLE OU AMORCE DE DERIVE

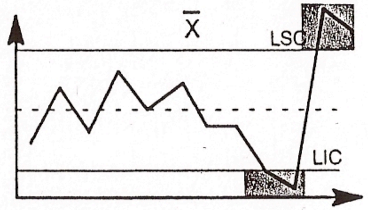
Suivre ou verrouiller les caractéristiques processus plutôt que celles du produit est le principe de base de MSP.

L'évolution de l'un de ces facteurs explique le franchissement des limites de contrôle ou les tendances inhabituelles du processus.

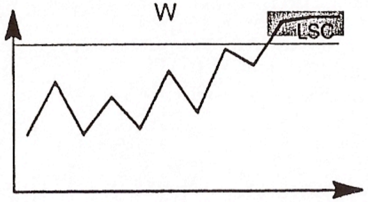
Aussitôt alerté, le chef d'unité recherche l'élément responsable en consultant la liste des paramètres influents, et vérifie ensuite la présence ou non des verrous physiques ou l'évolution des cartes de contrôle des caractéristiques soupçonnées et pilote les actions correctives.

PARAMETRES INFLUENTS		
INDICATEUR	FACTEUR	VERROU
Moyenne	F1 F2	Verrou physique Carte de contrôle
Etendue	F3	Verrou physique
Les 2 à la fois	F4	Carte de contrôle

PROCESSUS ANORMAUX

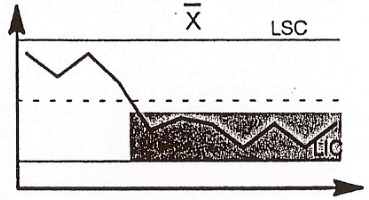


Points au-delà des limites de contrôle

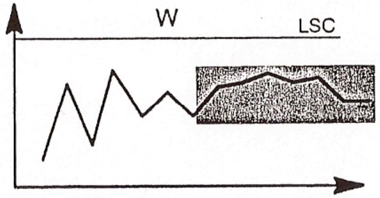


Alerter le chef d'unité qui :
- consultera la liste des paramètres influents pour rechercher l'élément responsable des points au-delà des limites de contrôle.

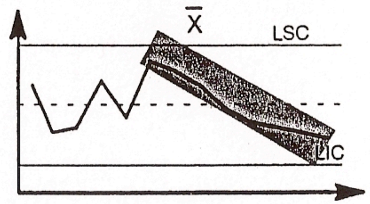
Pendant l'**ANALYSE** mettre en place la procédure de verrouillage ou l'arrêt de l'installation.



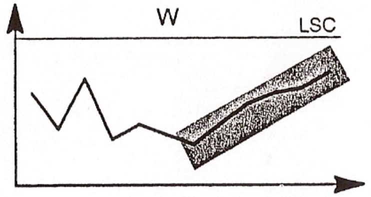
Changement de niveau (7 points consécutifs)



TENDANCES INHABITUELLES



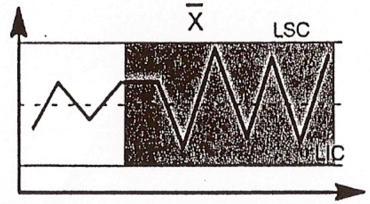
7 points consécutifs en augmentation ou en diminution



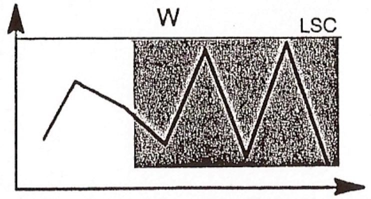
Alerter le chef d'unité

pour faire une **ANALYSE** des

causes de cette tendance

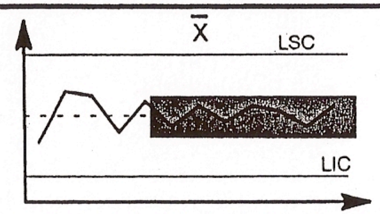


La variabilité des points croît

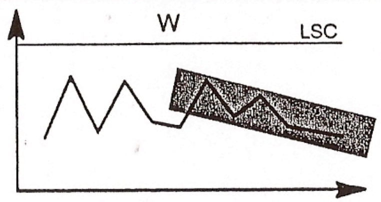


VARIATIONS IMPORTANTES

Alerter le chef d'unité
pour **ANALYSER** les causes
de cette dégradation.



La variabilité des points décroît



AMELIORATION DU PROCESSUS

Alerter le chef d'unité
pour rechercher les causes
de cette amélioration.

Comment bien choisir au hasard ?

- **Expérimentation** : prélever un échantillon dans une population (pour estimer une moyenne).

- **Objectifs** :
  - illustrer l'ambiguïté de l'expression « choisir au hasard »;
  - mettre en évidence l'importance de préciser les conditions de l'expérience ;
  - comparer différentes méthodes d'échantillonnage.

- **Description de l'activité** : La population considérée est constituée de 60 cercles de différents diamètres dessinés sur une feuille de papier. Le but de l'activité est d'estimer le diamètre moyen de cette population de cercles à partir du prélèvement d'échantillons de 5 cercles.

Dans chacun des cas suivants, on demande aux élèves de choisir 5 cercles d'une certaine manière, et de calculer la moyenne et l'écart type obtenus avec les cercles de leur échantillon. On met ensuite en commun les résultats de tous les élèves de la classe et on construit le diagramme en bâtons de la série statistique de ces diamètres moyens observés par chacun des élèves.

Echantillon empirique : pour prélever cet échantillon, on ne demande aucune méthode particulière, l'élève fait comme il veut : soit en fermant les yeux, soit en choisissant d'après lui au hasard…

Cette méthode est très mauvaise car le regard des élèves est attiré par les grands cercles qui ont plus tendance à être choisis que les petits, ce qui implique une forte influence sur le diamètre moyen observé.

Cette forme de sondage correspond aux sondages où l'enquêteur choisit les personnes à interroger (comme les « micro-trottoirs ») : il choisira les personnes les plus visibles ou les plus disponibles. Mais il ne rencontrera pas les personnes qui sortent peu (les malades, les personnes âgées, certains handicapés…) ou qui n'ont pas envie de répondre. Elle est évidemment très facile à mettre en œuvre mais on dit qu'elle est « biaisée ».

Echantillon aléatoire simple : pour prélever cet échantillon, on commence par numéroter les cercles de 1 à 60. On utilise une table de chiffres au hasard (ou la touche « Rand » d'une calculatrice ou la fonction « Alea » d'un tableur) pour obtenir 5 nombres compris entre 1 et 60 afin de sélectionner les 5 cercles constituant l'échantillon.

La théorie montre que cette méthode est « sans biais ». En effet, dans un sondage aléatoire simple, chaque individu statistique a une probabilité égale d'être sélectionné pour constituer l'échantillon. Cette méthode nécessite d'avoir une base de sondage complète (c'est-à-dire la liste entière des membres de la population étudiée). Elle a l'avantage d'être basée sur une théorie solide permettant de calculer la précision et la fiabilité des résultats. Elle est facile à appliquer, mais elle peut se révéler très coûteuse.

Echantillon aléatoire stratifié : on considère que la population est divisée en deux parties : 45 petits cercles (dont le diamètre est inférieur ou égal à 2 cm) et les autres, 15 grands cercles. En raison de cette répartition 3/4, 1/4 des cercles entre les deux catégories, on va fabriquer un échantillon de taille 5 formé de cercles des deux catégories répartis dans à peu près les mêmes proportions, soit 4 petits cercles et 1 grand cercle. Les petits cercles sont numérotés de 1 à 45, les grands de 1 à 15 ; puis on prélève l'échantillon en utilisant une table de chiffres au hasard (ou d'une calculatrice). On calcule ensuite la moyenne d_p des diamètres des 4 petits cercles de l'échantillon, le diamètre d_g du grand cercle et enfin on estime le diamètre moyen dans la population par $\frac{45\, d_p + 15\, d_g}{60}$.

Cette méthode d'échantillonnage, appelée échantillonnage par stratification, est une méthode également aléatoire et qui améliore la précision. On partage la population en groupes supposés relativement homogènes par rapport à l'objet d'étude (appelés *strates*) et l'on prélève dans chaque strate un échantillon aléatoire simple. Il faut donc connaître a priori sur la population une caractéristique liée au problème étudié. Par exemple, pour une enquête sur les modes de consommation, on peut stratifier la population selon les différentes CSP (Catégories Socio-Professionnelles) ou selon l'habitat (urbain/rural), etc …

La moyenne estimée du caractère sur la population est alors la moyenne pondérée de chaque observation. Cette méthode est plus précise que l'échantillonnage aléatoire simple, l'erreur d'échantillonnage étant réduite dans la mesure où la dispersion globale a pu être réduite aux dispersions dans chaque strate. En effet, on a homogénéisé la population par sous-populations afin de prélever un échantillon représentatif.

La méthode élimine donc les échantillons excessifs du point de vue de leur représentativité relativement aux différentes strates, mais pour cela il faut connaître la répartition de la population d'après ce critère. De plus elle nécessite d'avoir un recensement de la population, ce qui n'est pas toujours possible.

<u>Echantillon à deux degrés</u> : on groupe les cercles « géographiquement » en six paquets de 10 numérotés de 1 à 6. On choisit un groupe au hasard à l'aide d'une table de chiffres au hasard ou d'un dé ou d'une calculatrice. On numérote ensuite les cercles du groupe choisi de 1 à 10. Enfin pour constituer l'échantillon, on choisit 5 cercles du groupe à l'aide d'une table de chiffres au hasard (ou d'une calculatrice).

Cette méthode, dite échantillonnage à deux degrés, est une méthode aléatoire qui peut avoir un coût moindre à mettre en œuvre car elle ne nécessite pas de prélever un échantillon dans toute la population. Comme pour l'échantillonnage stratifié, on partage la population en groupes (appelés *grappes* ou *unités primaires*). Par contre cette division ne se fait pas à partir de critères liés à la problématique étudiée, mais sur une base géographique. On sélectionne ensuite au hasard un certain nombre d'unités primaires puis on procède à un deuxième tirage au sort pour prélever un échantillon aléatoire dans chaque unité sélectionnée.

A taille d'échantillon égale, le sondage à deux degrés est moins précis que le sondage aléatoire simple (et donc nettement moins précis que le sondage stratifié), puisque la variance étant minimisée à l'intérieur des groupes (car « qui se ressemble s'assemble »), le groupe choisi n'est pas en général le meilleur du point de vue de la dispersion. Par exemple, pour un sondage à deux degrés, on pourra choisir dans un premier temps un établissement scolaire, mais ses élèves y seront d'origine semblable. De même, pour un sondage sur les usagers des bus d'une ville, on pourra être amené à choisir d'abord une ligne de bus, mais les passagers seront d'origine homogène. Cependant, ce type de sondage est simple à mettre en œuvre.

Dans la pratique, on réalise un mélange de sondage par stratification et de sondage à deux degrés, ceci pour avoir la facilité de l'échantillonnage à deux degrés avec la précision de l'échantillonnage stratifié.

• **Bibliographie** : cette activité est extraite d'un article plus détaillé « Un TP sur les sondages », Statistique au lycée, Volume 2 – Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités – Brochure APMEP n°167