Lycée La Martinière-Monplaisir

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

****

Notations

n est un entier naturel tel que $n \geqslant 2$

E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n

$\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel E

0 est l'entier nul, le vecteur nul, l'endomorphisme nul

e est l'endomorphisme identité de E

$\mathrm{Sp}\,(f)$ est le spectre de f, où $f \in \mathcal{L}(E)$

$\mathrm{SEP}\,(f,\lambda)$ est le sous-espace propre pour f associé à λ, où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}\,(f)$

f^k est $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$, où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}^*$, et $f^0 = e$

$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E)\,;\, h^2 = f\}$, où $f \in \mathcal{L}(E)$

$\mathcal{D}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E ayant n valeurs propres deux à deux distinctes

$\mathcal{U}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E)\,;\, \mathcal{R}(f) \neq \varnothing\}$

$\mathcal{V}(E)$ est le complémentaire de $\mathcal{U}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}$, où $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ est une base de E

$\mathrm{tr}\,(f)$ est la trace de f, où $f \in \mathcal{L}(E)$

$\det\,(f)$ est le déterminant de f, où $f \in \mathcal{L}(E)$

$\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ est la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$

$\mathrm{E}(x)$ est la partie entière de x, où $x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$ et de degré $\leqslant n-1$.

Partie I : Étude du cas $n = 2$

On suppose ici $n = 2$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose ici que f admet deux valeurs propres distinctes, notées λ_1, λ_2.

a. Est-ce que f est diagonalisable ?

b. On note $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(f)$ par leurs matrices dans $\mathcal{B}$.
Montrer que $\mathcal{R}(f)$ est fini et préciser son cardinal, selon λ_1 et λ_2.

2. On suppose ici que f n'admet qu'une seule valeur propre, notée λ_1.

a. Est-ce que f est trigonalisable ?

b. On note $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ c & \lambda_1 \end{pmatrix}$, où $c \in \mathbb{C}$.

i. On suppose ici $\lambda_1 \neq 0$ et $c \neq 0$. Déterminer les éléments de $\mathcal{R}(f)$ par leur matrices dans $\mathcal{B}$.
Montrer que $\mathcal{R}(f)$ est fini non vide et préciser son cardinal.

ii. On suppose ici $c = 0$. Montrer : $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

iii. On suppose ici $\lambda_1 = 0$ et $c \neq 0$. Montrer : $\mathcal{R}(f) = \varnothing$.

3.a. Montrer : $$\mathcal{V}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E)\,;\, f^2 = 0 \ \text{ et } \ f \neq 0\}.$$

b. Est-ce que $\mathcal{V}(E)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$? fermé dans $\mathcal{L}(E)$?

4. Établir : $$\mathcal{R}(0) = \{h \in \mathcal{L}(E)\,;\, \mathrm{tr}\,(h) = 0 \ \text{ et } \ \det(h) = 0\}.$$

Partie II : Étude du cas où f admet n valeurs propres deux à deux distinctes

On suppose ici que f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, notées $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

1. Est-ce que f est diagonalisable ?

On note $\mathcal{B}$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

2. Montrer : $$\forall\, h \in \mathcal{R}(f), \quad h \circ f = f \circ h.$$

3. En déduire que, pour toute $h \in \mathcal{R}(f)$, la matrice de h dans $\mathcal{B}$ est diagonale.

4. Déterminer les matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{R}(f)$.

5. Est-ce que $\mathcal{R}(f)$ est fini ? non vide ? Quel est le cardinal de $\mathcal{R}(f)$, selon $\lambda_1, ..., \lambda_n$? Existe-t-il n, E, f tels que le cardinal de $\mathcal{R}(f)$ soit égal à 5 ?

6. Montrer : $$\forall\, h \in \mathcal{R}(f),\ \exists P \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}], \quad h = P(f).$$

7. Montrer que les éléments de $\mathcal{R}(f)$ commutent tous entre eux pour la loi $\circ$.

Partie III : Étude partielle du cas où f est nilpotent

On suppose ici que f est nilpotent et on note ν l'indice de nilpotence de f, défini par :

$$\nu \in \mathbb{N}^*, \quad f^\nu = 0, \quad f^{\nu-1} \neq 0.$$

1. Montrer : $\forall\, h \in \mathcal{R}(f), \quad h^n = 0.$

2. En déduire que, si $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$, alors $\nu \leqslant \mathrm{E}\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)$.

3. Deux exemples pour $n = 3$

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, f (resp. g) l'endomorphisme de E dont la matrice dans une base fixée $\mathcal{B}$ de E est A (resp. B).

Est-ce que $\mathcal{R}(f)$ est vide ?

Est-ce que $\mathcal{R}(g)$ est vide ?

4. Un exemple dans un espace de polynômes

On note $E = \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ et $f : E \longrightarrow E, \quad P \longmapsto P'$. Est-ce que $\mathcal{R}(f)$ est vide ?

Partie IV : Étude du cas où il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tel que $f - \alpha e$ soit nilpotent

A. On suppose ici qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tel que $f = e + g$.

1. Montrer qu'il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que, au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \underset{x \longrightarrow 0}{O}(x^n).$$

On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{X}^k$.

2. Montrer, au voisinage de 0 :

$$\big(P_n(x)\big)^2 - 1 - x = \underset{x \longrightarrow 0}{O}(x^n).$$

3. En déduire que le polynôme X^n divise le polynôme $P_n^2 - 1 - \mathrm{X}$ dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

4. Démontrer : $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

B. On suppose ici qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $g \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent tels que $f = \alpha e + g$. Montrer : $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

Partie V : Propriétés topologiques de $\mathcal{R}(f)$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$

1. Démontrer que, pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{R}(f)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$.

2. Montrer que, pour tout $f \in \mathcal{U}(E)$, $\mathcal{R}(f)$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{L}(E)$.

3. Montrer qu'il existe n, E, f tels que $\mathcal{R}(f)$ ne soit pas borné.

Partie VI : Propriétés de $\mathcal{U}(E)$

1.a. Démontrer que $\mathcal{D}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

b. Y a-t-il une inclusion entre $\mathcal{D}(E)$ et $\mathcal{U}(E)$, et si oui, dans quel sens ?

2.a. Montrer que $\mathcal{U}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$.

b. Soient $f \in \mathcal{V}(E)$, $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{U}(E)$ telle que $f_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} f$, $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h_p^2 = f_p$. Démontrer que la suite $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

3. Est-ce que $\mathcal{U}(E)$ est fermé dans $\mathcal{L}(E)$? ouvert dans $\mathcal{L}(E)$?

4.a. Montrer : $\forall \alpha \in \mathbb{C},\ \forall f \in \mathcal{U}(E),\quad \alpha f \in \mathcal{U}(E)$.

b. A-t-on : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E),\quad f + g \in \mathcal{U}(E)$?

c. A-t-on : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E),\quad f \circ g = g \circ f$?

d. A-t-on : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E),\quad f \circ g \in \mathcal{U}(E)$?

5. Démontrer que $\mathcal{U}(E)$ est connexe par arcs.

Partie VII : Cas des endomorphismes normaux

On suppose ici que E est muni d'un produit scalaire hermitien et que f est normal, c'est-à-dire $f \circ f^* = f^* \circ f$, où f^* désigne l'adjoint de f.

1. On note $u = \dfrac{1}{2}(f + f^*)$ et $v = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(f - f^*)$.

Montrer que u et v sont des endomorphismes hermitiens de E et que u et v commutent.

2. Démontrer que f est diagonalisable.

3. En déduire : $f \in \mathcal{U}(E)$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * *