Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Algèbre linéaire
Année 2006–2007

Exercices 1
Bases, matrices

On fixe un corps $\mathbb{K}$. Par défaut, E désigne un espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes linéaires de E.

I Exercices divers

1° Somme, somme directe de sous-espaces

a) Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $v \in E$. Montrer que $\alpha\, v = 0$ si et seulement si $\alpha = 0$ ou $v = 0$.
b) Mise en garde importante. On sait que la *somme* de deux sous-espaces est toujours un sous-espace. (Rappeler pourquoi.) En revanche, la *réunion* de deux sous-espaces n'est presque jamais un sous-espace.
Plus précisément, si F et G sont des sous-espaces de E, on a l'équivalence :

$$F \cup G \text{ est un sous-espace} \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

c) Généralisation. On suppose que $\mathbb{K}$ est infini. Supposons qu'un espace E soit la réunion d'un nombre fini de sous-espaces $F_1, \dots, F_n$, avec $n \geq 2$. Quitte à jeter certains sous-espaces, on peut supposer n minimal. Par suite, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a : $F_i \not\subset \bigcup_{j \neq i} F_j$. On peut donc choisir des vecteurs $x_i \in F_i$, $x_i \notin \bigcup_{j \neq i} F_j$. On a une infinité de vecteurs de la forme $tx_1 + (1-t)x_2$, donc l'un des F_i contient au moins deux de ces vecteurs. (Pourquoi ?) En déduire que F_i contient x_1 et x_2, une contradiction.
Peut-on supprimer l'hypothèse sur $\mathbb{K}$?

d) Soit E l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensembles des fonctions paires et celui des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de E.
Vérifier que l'application $f \mapsto \int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$. Trouver un supplémentaire de son noyau.

2° Familles libres

a) Vrai ou faux ? Toute $\begin{matrix}\text{sous}\\\text{sur}\end{matrix}$-famille d'une famille $\begin{matrix}\text{libre}\\\text{génératrice}\end{matrix}$ est $\begin{matrix}\text{libre}\\\text{génératrice}\end{matrix}$ (4 cas).
b) On prend $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ et $E = \mathbb{R}$. Montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre. Est-ce que la famille $\big((1+\sqrt{2})^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre ? Quelle propriété permet de montrer que la famille $(\pi^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre ? (Ici, $\pi = 3,14159...$ comme vous pensez.)
c) On prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et E l'espace des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

$$(x \mapsto \sin(nx))_{n\in\mathbb{N}^*}, \quad (x \mapsto |x-a|)_{a\in\mathbb{R}}, \quad (x \mapsto e^{ax})_{a\in\mathbb{R}}.$$

(Indications : dans tous les cas, commencer par écrire une combinaison linéaire (finie !) des vecteurs de la famille, en supposant que les tous coefficients qui apparaissent ne sont pas nuls.
Pour la première famille, on pourra dériver deux fois la combinaison linéaire et se débrouiller pour faire disparaître un terme, ou bien calculer l'intégrale sur $[0, 2\pi]$ de la combinaison linéaire multipliée par $\sin(kt)$, où k apparaît dans la combinaison. Pour la deuxième, on constatera en séparant un terme $|x-a|$ que la fonction est à la fois dérivable et non dérivable en a. Pour la troisième, on classera les a qui interviennent par ordre croissant, on divisera par l'exponentielle correspondant au paramètre a le plus grand et on passera à la limite en $+\infty$.)

3° Bases

a) Trivial mais fondamental. Si deux espaces vectoriels sont inclus l'un dans l'autre ont la même dimension **finie**, alors ils sont égaux. Contre-exemple en dimension infinie ?

b) Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Donner une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles, à l'aide du théorème de décomposition en éléments simples.
c) Bases et supplémentaires. Une famille obtenue en juxtaposant une base de deux supplémentaires est une base de l'espace. Les sous-espaces engendrés par deux parties complémentaires d'une base sont supplémentaires.
d) On admet le théorème de la base incomplète. Démontrer que tout sous-espace possède un supplémentaire.
e) L'existence d'un supplémentaire est vraiment un résultat non trivial. Donnons-nous un espace E et un endomorphisme linéaire $\varphi : E \to E$. Il est faux en général de dire que tout sous-espace de E stable par φ possède un supplémentaire stable par φ. Donner un contre-exemple.
f) A l'aide du théorème de d'Alembert et du théorème de décomposition en éléments simples, donner une base de l'espace vectoriel des fractions rationnelles $\mathbb{C}(X)$.

4° Applications linéaires

a) Montrer que l'on définit une unique application linéaire avec l'une des données suivantes :
- l'image d'une base de l'espace de départ ;
- sa restriction à deux sous-espaces supplémentaires.

b) (Projecteurs.) Soit E_1 et E_2 deux supplémentaires de E. Pour $x \in E$, on écrit $x = x_1 + x_2$ de façon unique, avec $x_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$. On note π_1 l'application qui à $x \in E$ associe x_1 : c'est la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2, et on définit de même π_2. Montrer que π_i est linéaire ; calculer son carré et $\pi_1 + \pi_2$.
Inversement, soit $\pi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\pi \circ \pi = \pi$. Montrer que $E_1 = \operatorname{Im} \pi$ et $E_2 = \operatorname{Ker} \pi$ sont supplémentaires. Montrer que π est la projection de E sur E_1 parallèlement à E_2. Calculer la restriction de π à ces sous-espaces.
Utiliser ce qui précède pour définir des bijections

$$\{\text{projecteurs}\} \longleftrightarrow \{\text{couples de sous-espaces de } E \text{ supplémentaires}\}.$$

A quoi correspond l'échange de E_1 et E_2 pour les projecteurs ?
Retenir ce qui précède. Généraliser à n sous-espaces.
A toutes fins utiles, vérifier que $\mathrm{Id}_E + \pi$ est inversible.
c) Soit π et π' deux projecteurs. On suppose que $\pi + \pi'$ est un projecteur. Montrer que $\pi \circ \pi' + \pi' \circ \pi = 0$, en déduire que $\pi \circ \pi' = \pi' \circ \pi = 0$. Monrer que $\operatorname{Im}(\pi + \pi') = \operatorname{Im} \pi + \operatorname{Im} \pi'$ et $\operatorname{Ker}(\pi + \pi') = \operatorname{Ker} \pi \cap \operatorname{Ker} \pi'$.
d) (Un exemple de projecteur.) Soit $E = \mathbb{K}[X]$, l'espace des polynômes en une indéterminée. Fixons un polynôme $B \in \mathbb{K}[X]$. On note $\varphi(A) = \varphi_B(A)$ le reste de la division euclidienne de A par B. Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \varphi(A)$ est linéaire. Calculer son carré. Caractériser son noyau ; son image.
e) (Symétries.) Comme ci-dessus, soit E_1 et E_2 deux supplémentaires de E, π le projecteur de E sur E_1 parallèlement à E_2. Pour $x \in E$, montrer qu'il existe un unique $\sigma(x) \in E$ tel que $(x + \sigma(x))/2 \in E_1$ et $x - \sigma(x) \in E_2$. Exprimer $\sigma(x)$ à l'aide de π ; en déduire que σ est linéaire ; calculer son carré et sa restriction à E_1 et E_2.
Inversement, soit $\sigma \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}_E$. Retrouver des espaces E_1 et E_2 de manière à ce que σ provienne de la construction ci-dessus. Associer un projecteur à σ de façon naturelle.

f) Pour chacune des conditions suivantes, déterminer un espace E et une application $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ qui la satisfassent :

$$\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi, \quad \operatorname{Im} \varphi \cap \operatorname{Ker} \varphi = \{0\}, \quad \operatorname{Im} \varphi + \operatorname{Ker} \varphi = E, \quad \Big(\operatorname{Im} \varphi \subset \operatorname{Ker} \varphi \text{ et } \operatorname{Im} \varphi \neq \operatorname{Ker} \varphi\Big).$$

g) On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que $\dim E$ est paire si et seulement s'il existe une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\operatorname{Im} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi$, si et seulement s'il existe une application $\psi \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\psi \circ \psi = -\mathrm{Id}_E$.
Que subsiste-t-il de ces résultats si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$?

h) On suppose $\dim E$ finie. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Exhiber $\psi \in \mathcal{L}(E)$ inversible et $\pi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\pi^2 = \pi$ et $\varphi \circ \psi = \pi$.
i) Soit E, F de dimension finie, W un sous-espace de E et

$$A = \{\varphi \in \mathcal{L}(E,F),\ W \subset \operatorname{Ker}\varphi\}.$$

Est-ce un sous-espace de $\mathcal{L}(E,F)$? Si oui, quelle est sa dimension ?

Les trois exercices qui viennent sont plus délicats, mais par exemple le j) sera vraiment utile plusieurs fois.
j) Soit E, F, G trois espaces, $\varphi : E \to F$ et $\psi : E \to G$ linéaires. Montrer l'équivalence :

$$\exists \theta \in \mathcal{L}(F,G),\ \psi = \theta \circ \varphi \iff \operatorname{Ker}\varphi \subset \operatorname{Ker}\psi.$$

k) (Une caractérisation des homothéties.) Soit $\varphi : E \to E$ une application linéaire telle que pour tout $x \in E$, la famille $(x, \varphi(x))$ soit liée. Montrer que φ est une homothétie.
l) (Centre de $\mathcal{L}(E)$.) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ une application linéaire qui commute à $\mathcal{L}(E)$: pour tout $\psi \in \mathcal{L}(E)$ on a $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$. Montrer que φ est une homothétie.
(Indication : S'il existe $x \in E$ tel que $(x, \varphi(x))$ soit libre, considérer $\theta : x \mapsto x + \varphi(x)$ pour en tirer $x = 0$, une contradiction, et conclure avec k).)

5° Théorème du rang et applications

a) Démontrer le théorème du rang sous la forme : soit $\varphi : E \to F$ linéaire et E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker}\varphi$. Alors la restriction de φ à E' établit un isomorphisme sur $\operatorname{Im}\varphi$. En déduire, lorsque E est de dimension finie, la relation bien connue :

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \operatorname{rg}\varphi = \dim E.$$

Jusqu'à la fin du 5°, on suppose E de dimension finie.
b) Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = 0$, $f + g = \mathrm{Id}_E$. Montrer que $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g = \dim E$.
c) Soit F et N deux sous-espaces de E. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}\varphi = F$ et $\operatorname{Ker}\varphi = N$.
d) Déterminer $\sup(\operatorname{rg}\varphi + \operatorname{rg}\psi)$, le sup étant pris sur l'ensemble des couples $(\varphi, \psi) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que $\psi \circ \varphi = 0$.
e) Soit $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ linéaires. Montrer que $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) \leq \max(\operatorname{rg}\psi, \operatorname{rg}\varphi)$. Montrer que si φ (resp. ψ) est inversible, alors $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rg}\psi$ (resp. $\operatorname{rg}(\psi \circ \varphi) = \operatorname{rg}\varphi$).
f) Même situation. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(\varphi \circ \psi) \leq \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\psi$.

II Thème : noyaux et images itérés

On se donne une endomorphisme linéaire φ sur un espace de dimension quelconque E. On veut étudier la suite de sous-espaces :

$$K_n = \operatorname{Ker}\varphi^n, \quad I_n = \operatorname{Im}\varphi^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

1° Trivialités et exemples

a) Montrer que pour tout n on a $K_n \subset K_{n+1}$ et $I_n \supset I_{n+1}$.
b) Vérifier que si $I_n = I_{n+1}$ (resp. $K_n = K_{n+1}$), alors on a $I_n = I_{n+p}$ (resp. $K_n = K_{n+p}$) pour tout $p \geq 1$.
On dit alors que la suite stationne à partir de n.
c) Montrer que si la dimension de E est finie, les deux suites stationnent à partir d'un certain rang.

d) En dimension infinie, tout peut arriver : aucune suite ne stationne, exactement une stationne ou les deux stationnent. Donner un exemple (avec $\dim E = +\infty$) correspondant aux quatre cas possibles.
(Indication : Pour les cas délicats, on pourra penser à la dérivation sur les polynômes et sur $\mathbb{R}[X, X^{-1}]$, les polynômes en X et X^{-1}.)

2° Plus de précisions

a) Montrer que si $I_n = I_{n+1}$ et $K_{n+1} = K_{n+2}$, alors $K_n = K_{n+1}$.
b) En déduire que si la suite $(I_n)_n$ stationne à partir de m et la suite $(K_n)_n$ stationne à partir de p, alors on a : $p \leq m$.
c) Procéder de même en échangeant image et noyau. En déduire que si les suites stationnent, c'est à partir du même entier.
d) Montrer que si les suites stationnent à partir de n, on a : $E = I_n \oplus K_n$.

III Thème : espace vectoriel cyclique par rapport à un vecteur

Soit E un espace de dimension n, φ un endomorphisme de E, On note

$$\mathcal{C}(\varphi) = \{\psi \in \mathcal{L}(E),\ \varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi\},$$
$$\mathcal{P}(\varphi) = \{a_0 \mathrm{Id} + a_1 \varphi + \cdots + a_k \varphi^k \mid\ k \geq 0,\ (a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{K}^k\}.$$

a) Quelle relation y a-t-il entre $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathcal{P}(\varphi)$?
b) Vérifier que $\mathcal{C}(\varphi)$ et $\mathcal{P}(\varphi)$ sont des sous-algèbres de l'algèbre des endomorphismes de E, i.e. des sous-espaces stables par produit.

On supose désormais qu'il existe un vecteur v tel que $(v, \varphi(v), \ldots, \varphi^{n-1}(v))$ soit une base de E. Evidemment, l'existence d'un tel vecteur n'est pas assurée en général.
c) Quelle est l'allure de la matrice de φ dans cette base ?
d) Montrer que $(\mathrm{Id}, \varphi, \ldots, \varphi^{n-1})$ est une base de $\mathcal{P}(\varphi)$.
e) Montrer que l'application $\mathcal{C}(\varphi) \to E$, $\psi \mapsto \psi(v)$ est linéaire et injective.
f) En déduire que $\mathcal{C}(\varphi) = \mathcal{P}(\varphi)$.

(Voir aussi le problème de synthèse.)

Exercices 2
Matrices

I Manipulations basiques

1° Calculs de quelques matrices

a) L'exemple fondamental

Soit m et n deux entiers strictement positifs et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ une matrice $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

est linéaire. Calculer sa matrice dans la base canonique.

b) Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus n. En donner une base. Montrer que l'application de $E \to E$, $P \mapsto XP' - P$ est linéaire. Calculer sa matrice dans la base précédente.

c) Soit $A = (a_{ij})$ la matrice 2×2 définie par : $a_{ij} = 2i+j-2$. Montrer que l'application $\mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M \mapsto AM$ est linéaire. Calculer sa matrice dans la base des matrices élémentaires.

d) Soit φ un endomorphisme de rang 1 de $\mathbb{K}^n$ (avec $n \geq 2$).
Montrer que dans une base convenable, seule la première ligne de la matrice de φ n'est pas nulle. Une telle base est-elle unique ?
Montrer que cependant le coefficient en haut et à gauche ne dépend pas du choix d'une telle base.
Améliorer le choix de la base de manière à ce que tous les coefficients soient nuls sauf un.

e) Soit φ un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ tel que $\dim \mathrm{Ker}(\varphi - \mathrm{Id}) = n-1$. Montrer qu'il existe une base et des scalaires $(a_1, \ldots, a_n)$ dans laquelle la matrice de φ est A dans une base convenable.
Montrer que a_n ne dépend pas du choix de la base.
Si $a_n \neq 1$ (resp. $a_n = 1$), trouver une base dans laquelle la matrice de φ est B (resp. C). Peut-on avoir $a = 0$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2° Quelques calculs avec les matrices

a) Soit M une matrice $n \times n$ de rang 1. Montrer qu'il existe des vecteurs $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = X.{}^tY$, où X est une colonne et ${}^tY$ une ligne.
Montrer que l'on a : $M^2 = \mathrm{tr}(M)\, M$. (La trace est définie en II.)

b) On fixe $m, n \in \mathbb{N}^*$. Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, soit $E^{(ij)}$ la matrice $m \times n$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i,j), qui vaut 1. Montrer que la famille $(E^{(ij)})_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.
Calculer le produit de deux matrices élémentaires.

c) Soit M une matrice $n \times n$ telle que pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on ait : $AMB = 0$. Montrer que $M = 0$.

d) Soit A, B deux matrices $n \times n$ telle que pour tout $X \in \mathbb{K}^n$ on ait : $AX = BX$. Montrer que $A = B$.

e) Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

f) On note
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Calculer A^2 et A^3, en déduire une relation de dépendance linéaire entre A, A^2 et A^3. Montrer que A est semblable à la matrice diagonale ayant pour coefficients diagonaux 0, -1, 2. Calculer A^n pour tout n.

II Trace

1° Définition matricielle

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose : $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$: c'est la somme des coefficients diagonaux.

a) Vérifier que l'application tr est linéaire.

b) Constater que pour tout A on a : $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}({}^tA)$.

c) Montrer que l'on a pour tout A, B : $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

2° Trace d'un endomorphisme

Soit E un espace de dimension n et φ un endomorphisme de E. Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) une base de E, A (resp. A') la matrice de φ dans $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$).

a) Quelle relation y a-t-il entre A et A' ?

b) Montrer que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A'$.

c) Expliquer comment et pourquoi on peut définir la trace d'un endomorphisme.

d) Exemple : calculer la trace d'un projecteur.

3° Formes bilinéaires associées

a) Montrer que les applications $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ et $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^tAB)$ sont bilinéaires (i.e. les applications $A \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ et $B \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ sont linéaires) et symétriques.

b) Montrer que ces formes bilinéaires sont non-dégénérées : si pour tout B on a $\operatorname{tr}(AB) = 0$, alors $A = 0$. (Utiliser les matrices élémentaires.)

c) On suppose ici que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{tr}({}^tAA) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $A = 0$. En d'autres termes, on a ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4° Des exercices presque indépendants

a) On se donne deux matrices carrées A et B. Résoudre : $X - \operatorname{tr}(X)\, A = B$.
(Indication : donner pour plus tard un coup de trace à l'équation ; vérifier que l'application $X \mapsto X - \operatorname{tr}(X)\, A$ est linéaire, calculer son rang selon la trace de A, son noyau, son image.)

b) Soit M une matrice 2×2 de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice dont les coefficients diagonaux sont nuls. Peut-on généraliser aux matrices $n \times n$?

Sauf mention du contraire, E désigne un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.

I Essentiellement du cours

1° Hyperplans

On appelle hyperplan de E tout sous-espace qui possède un supplémentaire de dimension 1.
a) Montrer que tous les supplémentaires d'un hyperplan sont de dimension 1. (On donnera deux preuves : avec un calcul de dimensions, l'autre directe.)
b) Montrer que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan. Que se passe-t-il si la forme linéaire est nulle ?
c) Inversement, montrer que tout hyperplan H est le noyau d'une forme linéaire ℓ non nulle. Justifier l'expression "ℓ est une équation de H."
d) Montrer que deux formes linéaires ont le même noyau si et seulement si elles sont proportionnelles (avec un coefficient de proportionnalité non nul).
On a établi ainsi une bijection naturelle : $\{\text{hyperplans de } E\} \longleftrightarrow \{\text{droites de } E^*\}$.

2° Orthogonal

Pour P une partie de E, on note $P^\perp = \{\ell \in E^*,\ \forall v \in P,\ \ell(v) = 0\}$.
a) Montrer que $P^\perp$ est un sous-espace de E^* et que $P^\perp = (\mathrm{Vect}(P))^\perp$, où $\mathrm{Vect}(P)$ est l'espace vectoriel engendré par P. On ne se préoccupera donc plus que de sous-espaces.

Soit F un sous-espace de E.
b) Vérifier que la restriction à F définit un morphisme surjectif $\mathrm{Res} : E^* \to F^*$.
c) Quel est le noyau de Res ? En déduire la formule :

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E.$$

d) En déduire que $(F^\perp)^\perp = F$, puis que $(P^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(P)$.

3° Transposition

Soit E et F deux espaces vectoriels. Pour $\varphi : E \to F$ linéaire, on note

$$^t\varphi : \begin{array}{ccc} F^* & \longrightarrow & E^* \\ \ell & \longmapsto & \ell \circ \varphi. \end{array}$$

a) Montrer que $^t\varphi$ est linéaire.
b) Montrer que l'application $\mathcal{L}(E,F) \to \mathcal{L}(F^*,E^*)$, $\varphi \mapsto {}^t\varphi$ est un isomorphisme linéaire.
c) Montrer que l'on a $(\mathrm{Im}\,\varphi)^\perp = \mathrm{Ker}\,{}^t\varphi$ (facile) et $\mathrm{Im}\,{}^t\varphi = (\mathrm{Ker}\,\varphi)^\perp$ (plus dur ; cela revient à (re)montrer que pour $m \in E^*$, $\exists \ell \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K}), m = \ell \circ \varphi \Leftrightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\,m$, cf. fiche 1).
Si E et F sont de dimension finie, en déduire que

$$\mathrm{rg}\,\varphi = \mathrm{rg}\,{}^t\varphi.$$

d) Soit $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) une base de E (resp. F) et $\mathcal{B}^*$ (resp. $\mathcal{C}^*$) sa base duale. Montrer que la matrice de $^t\varphi$ dans les bases $(\mathcal{C}^*,\mathcal{B}^*)$ est la transposée de la matrice de φ dans les bases $(\mathcal{B},\mathcal{C})$.
e) Soit G un troisième espace. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\psi \in \mathcal{L}(F,G)$, alors on a : $^t(\psi \circ \varphi) = {}^t\varphi \circ {}^t\psi$.
f) Soit A une matrice $m \times n$. Déduire de c) et d) que $\mathrm{rg}\,A = \mathrm{rg}\,{}^tA$.
g) Soit B une matrice $n \times p$. Déduire de e) que l'on a : $^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$. Redémontrer cette dernière égalité directement.

II Systèmes d'équations de sous-espaces (vraiment important)

Soit E de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1° Recherche d'équations d'un sous-espace donné

a) Théorie. Soit F un sous-espace de E de dimension d. On forme une base de F et on la complète en une base de E. En considérant sa base duale, montrer qu'il existe $r = n - d$ formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_r \in E^*$ telles que $F = \cap_{i=1}^r \operatorname{Ker} \ell_i$.
b) Pratique. A l'aide de l'algorithme de Gauss, exhiber de telles équations lorsque F est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par $(1, 0, -1, 2)$, $(-1, 1, 1, 3)$ et $(-1, 2, 1, 8)$. Généraliser.

2° Etude du sous-espace défini par des équations

Inversement, on se donne p formes linéaires $\ell_1, \ldots, \ell_p \in E^*$ et on s'intéresse à $F = \cap_{i=1}^p \operatorname{Ker} \ell_i$. Pour cela, on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & E & \longrightarrow & \mathbb{K}^p \\ & v & \longmapsto & (\ell_1(v), \ldots, \ell_p(v)). \end{array}$$

a) Vérifier que $\operatorname{Ker} \varphi = F$. Au lieu d'étudier p formes linéaires, on étudie donc 1 application linéaire $E \to \mathbb{K}^p$.
b) Quelle est la matrice de φ dans les bases $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$?
c) On note r le rang de la famille $(\ell_i)_{i=1,\ldots,p}$. Quitte à réordonner, on peut supposer que $(\ell_1, \ldots, \ell_r)$ est libre dans E^*. Vérifier que $F = \cap_{i=1}^r \operatorname{Ker} \ell_i$.
d) Montrer que $r = \operatorname{rg}(u)$ et en déduire que $\dim F = n - r$. (Rappel : on peut calculer le rang d'une matrice avec les lignes ou avec les colonnes.)
e) Interpréter.
f) Complément. Soit ℓ une forme linéaire dont le noyau contient $F = \operatorname{Ker} \varphi$. Montrer qu'il existe $\theta : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}$ tel que $\ell = \theta \circ \varphi$. En déduire que ℓ est une combinaison linéaire des $(\ell_i)_{i=1,\ldots,p}$.
g) Pratique. A l'aide de l'algorithme de Gauss, trouver une base du sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 = 0$, $2x_1 + 5x_2 - x_4 = 0$. Généraliser.

III Divers (un peu) plus concrets

1° Polynômes d'interpolation

Soit $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$ l'espace des polynômes de degré au plus $n-1$. On se donne n scalaires distincts $a_1, \ldots, a_n$.
a) Montrer que la famille formée des formes $\ell_i : P \mapsto P(a_i)$ est une base de E^*.
b) Ecrire une formule pour la base duale $(P_i)_{i=1,\ldots,n}$ dans E. Pour $P \in E$, quels sont les coordonnées de E dans cette base ?

On se donne à présent $n+1$ scalaires distincts $(a_1, \ldots, a_n)$ et $n+1$ entiers positifs $(r_1, \ldots, r_{n+1})$. On pose $N = \sum_{i=1}^n r_i + n$. On se donne enfin N scalaires $x_{1,0}, \ldots, x_{1,r_1}$, $x_{2,0}, \ldots, x_{2,r_2}$, $\ldots$, $x_{n,0}, \ldots, x_{n,r_n}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{N-1}[X]$ tel que pour $1 \leq i \leq n$ et $0 \leq k \leq r_i$ on ait : $P^{(k)}(a_i) = x_{i,k}$. (Rappel : un polynôme de degré au plus $N-1$ a au plus $N-1$ zéros comptés avec multiplicité.)

2° Dualité en dimension infinie

Donnons-nous deux indéterminées X et D. On note $E = \mathbb{K}[X]$ (les polynômes) et $F = \mathbb{K}[[D]]$ (les séries formelles, c'est-à-dire les sommes infinies de la forme $\sum_{n \geq 0} b_n D^n$, où $(b_n)_n$ est une suite quelconque de scalaires).
Pour $f = \sum_{n \geq 0} b_n D^n \in F$ et $P \in E$, on pose : $\Phi_f(P) = \sum_{n \geq 0} b_n \, P^{(n)}(0)$.
a) Donner un sens à cette somme "infinie"... Vérifier que Φ_f est une forme linéaire sur E.
b) Montrer que l'application $F \to E^*$, $f \mapsto \Phi_f$ est un isomorphisme.

Interprétation : $\mathbb{K}[X]$ est naturellement isomorphe à $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, et $\mathbb{K}[[D]]$ à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La dimension du premier est $\operatorname{card}(\mathbb{N})$, celle du second est $\operatorname{card}(\mathbb{R}) = 2^{\operatorname{card}(\mathbb{N})} > \operatorname{card}(\mathbb{N})$. Ainsi, en dimension infinie, le dual d'un espace est "strictement plus gros" que l'espace de départ.

Exercices 4
Algorithme de Gauss et avatars

I Interprétation matricielle de l'algorithme

1° Opérations élémentaires sur les rangées

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note I_p la matrice identité d'ordre p, $E_{i,j}^{(p)}$ la matrice $p \times p$ dont le coefficient d'indice (i,j) vaut 1 et les autres 0. On considère les matrices $p \times p$ suivantes (D pour dilatation, T pour transvection, P pour permutation) :

$$\begin{array}{cl}
\begin{array}{c} 1 \leq i \leq p, \\ \alpha \in \mathbb{K},\ \alpha \neq 0 \end{array} & D_{i,\alpha}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & \\ & \alpha & \\ & & I_{p-i-1} \end{pmatrix}, \\[2ex]
\begin{array}{c} 1 \leq i \neq j \leq p, \\ \beta \in \mathbb{K} \end{array} & T_{i,j;\beta}^{(p)} = I_p + \beta\, E_{i,j}^{(p)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & \beta & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \text{ en position } (i,j)) \\[2ex]
1 \leq i < j \leq p & P_{i,j}^{(p)} = P_{j,i}^{(p)} = \begin{pmatrix} I_{i-1} & & & & & \\ & 0 & \dots & 1 & & \\ & & I_{j-i-1} & & & \\ & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & I_{p-j-1} \end{pmatrix}.
\end{array}$$

On se donne aussi une matrice A de taille $m \times n$.

a) Calculer le produit $D_{i,\alpha}^{(m)} A$: vérifier qu'on l'obtient en multipliant la $i$ème ligne de A par α, ce que l'on notera : $L_i \leftarrow \alpha\, L_i$. Ceci donne la première colonne du tableau suivant, que l'on vérifiera :

opération	$D_{i,a}^{(m)}\, A$	$T_{i,j;\beta}^{(m)}\, A$	$P_{i,j}^{(m)}\, A$	$A\, D_{i,\alpha}^{(n)}$	$A\, T_{i,j;\beta}^{(n)}$	$A\, P_{i,j}^{(n)}$
résultat	$L_i \leftarrow \alpha\, L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta\, L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$	$C_i \leftarrow \alpha\, C_i$	$C_j \leftarrow C_j + \beta\, C_i$	$C_i \leftrightarrow C_j$

b) Calculer les inverses des matrices D, T, P. Avec la formule de changement de base, déduire :

En faisant des opérations élémentaires sur les rangées d'une matrice,
on ne change pas le rang d'une matrice.

2° Théorème du rang (4)

L'algorithme de Gauss. On se donne une matrice $m \times n$ quelconque A et on lui applique l'algorithme suivant (A désigne la "matrice courante," i.e. change à chaque étape) :

action	effet
si $A=0$, ne fait rien	
sinon, choisit un coeff. $a_{i_0j_0}\neq 0$	
permute L_{i_0} et L_1, C_{j_0} et C_1, i.e. remplace A par $P^{(m)}_{i_0,1}\,A\,P^{(n)}_{j_0,1}$	le coeff. d'indice $(1,1)$ est non nul
multiplie C_1 par $\frac{1}{a_{11}}$, i.e. remplace A par $A\,D^{(n)}_{i,\frac{1}{a_{11}}}$	le coeff. d'indice $(1,1)$ est 1
remplace L_i par $L_i - a_{i1}\,L_1$ $(2\leq i\leq m)$, i.e. remplace A par $T^{(m)}_{i,1;-a_{i,1}}\,A$	fait apparaître des 0 sur la 1re ligne
remplace C_i par $C_i - a_{1j}\,C_1$ $(2\leq j\leq n)$, i.e. remplace A par $A\,T^{(n)}_{1,j;-a_{1,j}}$	fait apparaître des 0 sur la 1re colonne

A l'issue de cette procédure, on se retrouve avec une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{array}\right),$$

où A' est une matrice $(m-1)\times(n-1)$, à laquelle on rapplique cette procédure, et ainsi de suite.

a) Pourquoi ceci a-t-il un sens ?
b) Qu'obtient-on à la fin ?
c) Pourquoi toutes les matrices que l'on écrit sont-elles équivalentes ?
d) Comment peut-on donc interpréter le nombre de coefficients égaux à 1 dans la matrice finale ?
e) Qu'a-t-on démontré ?
f) Application numérique : $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

3° Décomposition de Bruhat

a) On se donne une matrice $n\times n$ *inversible*. Adapter l'algorithme précédent avec les restrictions suivantes : on n'a plus le droit de permuter deux rangées ; pour pouvoir faire une transformation $L_i\leftarrow L_i+\beta L_j$ ou $C_i\leftarrow C_i+\beta C_j$, il faut que l'on ait $j<i$.
b) Montrer qu'a la fin de l'algorithme, on peut obtenir une matrice qui n'a qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Une telle matrice est dite monômiale.
c) En déduire que toute matrice inversible peut s'écrire comme produit d'une matrice triangulaire inférieure, d'une matrice monômiale et d'une matrice triangulaire supérieure (dans cet ordre).
d) Application numérique : $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -6 & -2 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -5 & -3 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

II Systèmes et algorithme de Gauss

1° Discussion théorique

Soit $A=(a_{ij})_{i=1,\ldots,m,j=1,\ldots,n}$ une matrice $m\times n$ et $B\in\mathbb{K}^m$. Considérons le système de m équations à n inconnues $x_1,\ldots,x_n$:

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{llllll} a_{11}x_1 & +a_{12}\,x_2 & +\ldots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}\,x_2 & +\ldots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}\,x_2 & +\ldots & +a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}\right.$$

a) On note $X = (x_j)_{j=1,\dots,n}$. Vérifier que X est solution de (S) si et seulement si $AX = B$, c'est-à-dire si $\varphi_A(X) = B$, où $\varphi_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est la multiplication par A.
b) En déduire que l'ensemble des solutions est soit vide (si $B \notin \operatorname{Im}\varphi_A$), soit un espace affine de dimension $n-r$, où $r = \operatorname{rg} A$, porté par $\operatorname{Ker} A$ (si $B \in \operatorname{Im}\varphi_A$).[1]
C'est tout : décevant, non ?

2° Résolution "pratique"

a) Discuter les systèmes dont la matrice est de la forme suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc}
1 & * & \cdots & * & * & \cdots\cdots & * \\
0 & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & * & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots\cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0
\end{array}\right),$$

où le premier bloc est $r \times r$ avec $r = \operatorname{rg}(A)$ et les $*$ représentent des coefficients quelconques.
Dans un système de ce genre, on appellera les r premières inconnues "principales" et les $n-r$ dernières secondaires. Décrire les éléments caractéristiques : $\operatorname{rg}(A)$, $\operatorname{Im}\varphi_A$, $\operatorname{Ker}\varphi_A$.
b) Dans l'algorithme de Gauss, on se permet uniquement de permuter les colonnes et on manipule les lignes comme on veut. A quoi cela correspond-il matriciellement ?
c) En déduire que tout système est équivalent à un système dont la matrice est comme en a).
d) En déduire une (la ?) méthode de résolution des systèmes $n \times n$.
e) **Amélioration :** Remplacer les étoiles du bloc supérieur gquche de la matrice de a) par des 0.

3° Systèmes, bases et équations de sous-espaces

a) Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{K}^4$: $\mathcal{F} = (1,0,-1,2), (-1,1,1,3), (-1,2,1,8)$. On note A la matrice 4×3 dont les colonnes sont les vecteurs de $\mathcal{F}$.
Constater qu'un vecteur $B \in \mathbb{K}^4$ est dans l'espace engendré par cette famille (i.e. dans l'image de φ_A) si et seulement si le système $AX = B$ a une solution. En résolvant ce système, en déduire un système d'équations du sous-espace engendré par $\mathcal{F}$.
Généraliser : donner une méthode pour trouver des équations d'un sous-espace engendré par une famille dans $\mathbb{K}^m$.
b) Considérons le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x_1+5x_2-x_3-x_4 = 0$, $2x_1+5x_2-x_4 = 0$. Résoudre ce système ; écrire la solution générale comme une combinaison linéaire dont les coefficients sont les inconnues secondaires. En déduire une base de ce sous-espace. (Pourquoi est-ce une base ?)

[1] En d'autres termes, SGEASM = SPEASM + SGESSM !

Exercices 5
Déterminants

I Quelques calculs

1° Cas faciles

a) Sachant que 456, 247 et 703 sont divisibles par 19, montrer que $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 0 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ aussi.

b) Calculer, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \cos 2a & \cos 2b & \cos 2c \end{vmatrix}$

c) Calculer le déterminant d'une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un par ligne et par colonne qui vaut 1, en fonction de la permutation associée.

d) Calculer le déterminant d'une matrice élémentaire. En déduire l'effet d'une transformation élémentaire sur le déterminant.

e) (Plus dur.) Calculer le rang de la comatrice en fonction du rang de la matrice. (On distinguera trois cas : rang $= n$, $= n-1$, $\leq n-2$.)

2° Déterminant de Vandermonde (cf. problème de synthèse)

On se donne n scalaires distincts $a_1, \ldots, a_n$. On pose : $\Delta_n = \det(a_j^{i-1})_{i,j=1,\ldots,n}$.

a) Calculer Δ_n par récurrence : retrancher la dernière colonne de toutes les autres et factoriser ce que l'on peut ; avec des manipulations sur les lignes, faire apparaître Δ_{n-1}.

b) Vérifier que si on le considère comme un polynôme en a_n, Δ_n est de degré exactement $n-1$. Calculer son coefficient dominant et exhiber $n-1$ racines. En déduire une relation de récurrence puis la valeur de Δ_n.

3° Matrice compagnon (cf. problème de synthèse)

On donne $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Calculer :

$$\begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & -x & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & -x & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -x-a_{n-1} \end{vmatrix}$$

(Commencer avec $n=2$, $n=3$, puis le cas général.)

4° Une formule sommatoire

On considère le déterminant $(n+1) \times (n+1)$ suivant :

$$P_n(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & (x+1) \\ 1 & 2 & 0 & & & \vdots & (x+1)^2 \\ 1 & 3 & 3 & \ddots & & \vdots & (x+1)^3 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 1 & \mathrm{C}_{n-1}^1 & \mathrm{C}_{n-1}^2 & \cdots & \mathrm{C}_{n-1}^{n-2} & 0 & (x+1)^{n-1} \\ 1 & \mathrm{C}_n^1 & \mathrm{C}_n^2 & \cdots & \cdots & \mathrm{C}_n^{n-1} & (x+1)^n \\ 1 & \mathrm{C}_{n+1}^1 & \mathrm{C}_{n+1}^2 & \cdots & \cdots & \mathrm{C}_{n+1}^{n-1} & (x+1)^{n+1} \end{vmatrix}.$$

a) Calculer $P_n(x) - P_n(x-1)$.
b) Calculer $P_n(m)$ pour $m \in \mathbb{N}$.
c) En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{m} k^n$.
d) Application numérique : $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

5° Un exercice

On pose $D_1 = 1$ et pour $n \geq 2$ on considère le déterminant $(n-1) \times (n-1)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & n+1 \end{vmatrix}$$

a) Montrer que l'on a pour $n \geq 2$: $D_{n+1} = (2n+1)\, D_n - n^2\, D_{n-1}$.
b) En déduire que $\dfrac{D_{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{D_n}{n!} = \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{D_n}{n!} - \dfrac{D_{n-1}}{(n-1)!}\right)$.
c) En déduire que $D_n = n!\,(1 + \cdots + 1/n)$.

II Thème : déterminant de Cauchy

Soit $n \geq 1$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$. On suppose que les a_i sont distincts, que les b_i aussi, et que pour $i, j = 1$ à n, on a : $a_i + b_j \neq 0$. On veut calculer :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Pour cela, on introduit pour tout $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ la fraction rationnelle :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{X + b_i}$$

et le système linéaire d'inconnues $x_1, \ldots, x_n$:

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \dfrac{x_1}{a_1+b_1} & + \cdots & + \dfrac{x_n}{a_+ b_n} & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_1}{a_{n-1}+b_1} & + \cdots & + \dfrac{x_n}{a_{n-1}+b_n} & = & 0 \\ \dfrac{x_1}{a_n+b_1} & + \cdots & + \dfrac{x_n}{a_n+b_n} & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Constater que (S) équivaut à $F(a_n) = 1$ et $F(a_i) = 0$ $(i \leq n-1)$.
b) Montrer l'existence et l'unicité de $P(X)$ de degré $\leq n-1$ tel que :

$$F(X) = \frac{P(X)}{\prod_{i=1}^{n}(X + b_i)},$$

et que les relations de a) soient satisfaites. Donner une expression de $P(X)$.
c) En développant $F(X)$, montrer qu'il existe une unique solution de (S). Donner à l'aide du développement une expression de x_n.
d) Avec les formule de Cramer, vérifier que $x_n = \dfrac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$.
e) En déduire par récurrence que $\Delta_n = \dfrac{\displaystyle\prod_{i>j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\displaystyle\prod_{i,j=1}^{n}(a_i + b_j)}$.

Exercices 6
Réduction des endomorphismes

I Réduction de matrices particulières

1° Divers fastoches

a) Que représente géométriquement une application diagonalisable sur $\mathbb{R}^2$?
b) Quand une matrice de rang 1 est-elle diagonalisable ?
c) Diagonaliser les symétries ; les projecteurs. En particulier, montrer que le rang d'un projecteur vaut sa trace.
d) Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice dont tous les coefficients valent 1.
e) Trouver valeurs et vecteurs propres de la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux des deux diagonales, qui valent 1.
f) Supposons qu'une matrice soit diagonalisable et nilpotente. Qu'en dire ?
g) Supposons qu'une matrice n'ait qu'une valeur propre. Quand est-elle diagonalisable ?

h) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que l'ensemble des $\psi \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\psi \circ \varphi = 0$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
Application : on considère $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, $\psi \mapsto \varphi \circ \psi$. Montrer que φ et Φ ont les mêmes valeurs propres. Montrer de plus que Φ est diagonalisable si et seulement si φ l'est.
i) Supposons $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Donner un programme pour calculer A^k ($k \in \mathbb{N}$).
j) Quels sont les sous-espaces de $\mathbb{K}^n$ stables par une matrice diagonalisable ?
k) On fixe une norme raisonnable $||.||$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, par exemple $||A|| = \sup_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$.
Soit T une matrice triangulaire. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe D diagonalisable telle que $||T - D|| \leq \varepsilon$. (Modifier légèrement les coefficients diagonaux de T de manière à les rendre tous distincts.) En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (pour la topologie induite par la norme $||.||$).
l) Application : démontrer le théorème de Cayley-Hamilton sur $\mathbb{C}$. (Les coefficients de χ_A dépendent continûment des coefficients de A. Si une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers A, il en résulte que les coefficients de $(\chi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers ceux de χ_A, puis que la suite de matrices $(\chi_{A_n}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\chi_A(A)$. On approche A par des matrices A_n diagonalisables, pour lesquelles l'égalité $\chi_{A_n}(A_n) = 0$ est triviale, et elle donne à la limite $\chi_A(A) = 0$.)

2° Déterminant circulant

Soit $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. On cherche à calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$A(a_0,\ldots,a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \ddots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

a) Constater que $A(a_0,\ldots,a_{n-1})$ est un polynôme en $A = A(0,1,\ldots,0)$. Comment interprète-t-on "géométriquement" A ?
b) Calculer A^n. En déduire que A est diagonalisable, puis les valeurs propres et les vecteurs propres de A. En particulier, on écrira la matrice de passage vers une base propre de A. Que reconnaît-on ? (Voir problème de synthèse.)

c) Lorsque A est une matrice quelconque et P un polynôme quelconque, donner une formule pour $\det(P(A))$ en fonction des valeurs propres de A. (Commencer par une matrice diagonale, puis triangulaire, puis quelconque.)
d) Appliquer à notre matrice circulante A.

II Compléments

1° Applications du lemme des noyaux

On cherche l'ensemble F des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $\in \mathbb{R}$ on ait : $f(t+2) - 5f(t+1) + 6f(t) = 0$. Pour cela, on considère l'espace réel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'opérateur $D : E \to E$ défini par : $(Df)(t) = f(t+1)$.
a) Qui sont les éléments de $\mathrm{Ker}(D - \mathrm{Id})$?
b) Pour $\lambda > 0$, déterminer un élément simple de $\mathrm{Ker}(D - \lambda\mathrm{Id})$. Avec l'idée de la méthode de variation de la constante, déterminer alors la forme générale des éléments de $\mathrm{Ker}(D - \lambda\mathrm{Id})$.
c) Vérifier que $F = \mathrm{Ker}(D^2 - 5D + 6\mathrm{Id})$ et appliquer le lemme des noyaux pour conclure.

2° Polynôme caractéristique d'un produit

On suppose $\mathbb{K}$ infini.
a) Soit A et B deux matrices carrées. Montrer que si A est inversible, alors $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. (Constater que AB et BA sont semblables.)
b) Pour $t \in \mathbb{K}$, calculer $\chi_{A+t\mathrm{Id}}(X)$ en fonction de t et $\chi_A(X)$. Constater que pour presque tout $t \in \mathbb{K}$, $A + t\mathrm{Id}$ est inversible. En déduire que pour A quelconque, on a : $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
c) Extension. on prend $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n\times m}(\mathbb{R})$. On considère alors les matrices $(m+n) \times (m+n)$ suivantes (préciser les formats) :

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \tilde{B} = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

En appliquant le résultat précédent à $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, trouver une relation entre χ_{AB} et χ_{BA}.
d) Peut-on supprimer l'hypothèse sur $\mathbb{K}$?

3° Diagonalisation simultanée

Soit E de dimension n et $\varphi, \psi \in \mathcal{L}(E)$.
a) On suppose que φ et ψ sont diagonalisables dans la même base. Montrer que φ et ψ commutent.
b) Soit F un sous-espace de E stable par φ. Montrer que si φ est diagonalisable, alors la restriction de φ à F est diagonalisable. (Par le cours, φ annule un polynôme scindé à racines simples ; il en est alors de même de sa restriction à F.)
c) Supposons que φ et ψ commutent. Montrer que tout espace propre de ψ est stable par φ. En déduire que si φ diagonalisable, alors sa restriction à tout espace propre de ψ est diagonalisable.
d) Montrer enfin que si φ et ψ sont diagonalisables et commutent, alors elles sont diagonalisables dans la même base.
e) Généralisation. Dans un espace de dimension finie n, on se donne une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ (I pas forcément fini) d'endomorphismes diagonalisables qui commutent deux à deux. Montrer qu'ils possèdent une base commune de vecteurs propres.
(On raisonnera par récurrence sur n. Pour $n = 1$, c'est clair. Si tous les φ_i sont des homothéties, c'est clair. Sinon, l'un des φ_i a au moins deux valeurs propres. On applique l'hypohèse de récurrence à ses espaces propres avec b).)

4° Polynôme minimal

Soit E un espace de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{eval}_\varphi : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & P & \longmapsto & P(\varphi). \end{array}$$

a) Vérifier à nouveau que eval_φ est un morphisme d'algèbres. Est-il surjectif en général ?

b) Est-ce que eval_φ peut être injectif ? En déduire l'existence d'un polynôme μ_φ de degré minimal et de coefficient dominant 1 appartenant au noyau de eval_φ.
c) Montrer l'unicité de μ_φ. On appelle μ_φ le polynôme minimal de φ. (Si μ_1 et μ_2 conviennent, constater que $\mu_1 - \mu_2$ est de degré strictement plus petit.)
d) Montrer que si $P \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{eval}_\varphi$, alors μ_φ divise P. (Effectuer la division euclidienne de P par μ_φ.)
e) Montrer que μ_φ divise χ_φ.
f) Inversement, montrer que toute racine de μ_φ est une racine de χ_φ. (Rappel : $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})^k$ pour tous λ, k.)

5° Petit challenge

Soit A, B deux matrices carrées complexes de même taille. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- il existe une matrice X non nulle telle que $AX = XB$;
- A et B ont une valeur propre commune.

(Indicaton : pour le sens "du bas vers le haut", prendre X de la forme $U\,{}^tV$, où U est un vecteur propre de A et V un vecteur propre de ${}^tB$ pour la même valeur propre.
Dans l'autre sens, on commence par supposer que B est diagonale. Ecrire les colonnes de AX et de XB en fonction des colonnes de X et conclure dans ce cas. Etendre l'argument au cas où B est triangulaire (une tout petite précaution supplémentaire suffit). Conclure dans le cas général en trigonalisant !)

6° Anecdote

Une dépêche Reuters du 19/3/2002 rapportait que "la péninsule Antarctique a chauffé de 36 degrés Fahrenheit dans les cinquante dernières années, bien plus vite que n'importe où dans le continent glacé ou dans le monde entier."
Or, l'article de synthèse de "British Antarctic Survey" d'où était tirée l'information précisait que "dans les cinquante dernières années, la péninsule Antarctique s'est réchauffée de 2,5 degrés Celsius."
Rappelons que la température en Fahrenheit $°F$ s'obtient de la température en Celsius $°C$ par la formule $°F = \frac{9}{5}°C + 32$. Et on a bien : $36 = \frac{9}{5}2,5 + 32$.
Qu'en pensez-vous ? (Oui, bon, ça n'est pas palpitant, mais ça meuble dans une page un peu vide.)

Exercices 7
Algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Sauf mention du contraire, on munit $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ de leurs structures euclidiennes standard : on note alors $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire.

I Du concret, du palpable

1° Reconnaissance de matrices

Programme indicatif de reconnaissance :

- la matrice est-elle symétrique ?
- la matrice est-elle orthogonale ? unitaire ?
- quelles sont ses valeurs propres ?
- quelle est sa nature géométrique ? (rotation, projecteur, symétrie, affinité, transvection, etc.)
- quels sont ses éléments caractéristiques ? (i.e., axe et angle d'une rotation, espaces propres pour une symétrie ou un projecteur, etc.)

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 36 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 37 & 9 \\ -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

2° Sous-espaces stables

Quels sont les sous-espaces stables par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}?$$

On remarquera qu'une droite stable est nécessairement portée par un vecteur propre de A et qu'un plan stable est l'orthogonal d'un vecteur propre de ${}^tA$.

3° Produit vectoriel

On se donne $\omega = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on considère $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \omega \wedge v$.

a) Vérifier que φ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique ; dans une base orthonormée dont ω est le premier vecteur.

b) Géométriquement, que fait φ ? Noyau, image de φ ?

c) On donne de plus $u \in \mathbb{R}^3$. Discuter l'équation $\omega \wedge v = u$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^3$.

d) On suppose pour simplifier que $||\omega|| = 1$. Ecrire une formule pour la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de ω.

e) Vérifier les assertions du cours concernant l'aire du parallélogramme et le volume du parallélépipède.

II Du plus théorique

1° Projections orthogonales

a) Soit E un espace euclidien de dimension finie et $\pi \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur : $\pi^2 = \pi$. Montrer que π est égal à son adjoint si et seulement si son image et son noyau sont orthogonaux.

b) Soit $\Pi \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $\Pi^2 = \Pi$. Montrer que ${}^t\Pi = \Pi$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\Pi \perp \mathrm{Im}\,\Pi$.

2° Des remarques utiles

a) Soit ρ une rotation d'angle θ autour de ω et g une isométrie quelconque. Montrer que $g\rho g^{-1}$ est la rotation d'angle θ autour de $g(\omega)$.
b) (Variante.) Soit σ une réflexion par rapport à l'hyperplan H et g une isométrie quelconque. Montrer que $g\sigma g^{-1}$ est une réflexion par rapport à $g(H)$.
c) Pour une application linéaire φ de $\mathbb{R}^n$ euclidien, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, \quad \langle\varphi(v), \varphi(v')\rangle = \langle v, v'\rangle$;
- $\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad ||\varphi(v)|| = ||v||$;
- la matrice A de φ dans une base orthonormée est orthogonale : ${}^tA\,A = \mathrm{Id}$.

d) Si F est un sous-espace stable par une isométrie, il en est de même de son orthogonal. Ceci est intéressant en particulier pour les espaces propres.
e) Quelles peuvent être les valeurs propres réelles d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$?

3° Engendrement de O_3 par les réflexions

a) Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation. Comment trouver l'axe et l'angle ?
Application numérique. On considère la composée des réflexions de plans $2x + y - z = 0$ et $x - y - 2z = 0$. Déterminer la matrice des reflexions, de leurs composée (dans l'ordre que l'on voudra), l'axe et l'angle de la composée.
b) Montrer que toute rotation peut s'écrire comme le produit de deux réflexions. En déduire que toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme le produit d'au plus trois réflexions.
Si on écrit une isométrie de $\mathbb{R}^3$ comme produit de réflexions, que peut-on dire de la parité du nombre de réflexions ?
Application numérique. Trouver une décomposition explicite pour

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

4° Engendrement de SO_3 par les demi-tours

a) Déterminer la composée de deux demi-tours d'axes orthogonaux.
b) En déduire que SO_3 est engendré par les demi-tours.

5° Simplicité de SO_3

On suppose que $G \subset \mathrm{SO}_3$ est un sous-groupe non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ et distingué, i.e. tel que pour tout $\varphi \in G$ et tout $g \in G$, on ait $g\varphi g^{-1} \in G$.
a) Pour $\varphi \in \mathrm{SO}_3$ on pose : $\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\varphi - 1)$. Pourquoi ?
b) Montrer qu'il existe $\varphi \in G$ tel que $\cos\varphi < 0$. (Prendre des puissances d'un élément non trivial.)
c) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle\varphi(v), v\rangle = 0$. (Faire un dessin.)
d) On note D la droite engendrée par v, D' la droite engendrée par $\varphi(v)$ et ρ le retournement autour de D. Se rappeler que $\varphi\rho\varphi^{-1}$ est le retournement autour de D'. En déduire que $\psi = \rho\varphi\rho\varphi^{-1}$ est un retournement.
e) Vérifier que G contient le retournement ψ. En déduire que G contient tous les retournements, puis que $G = \mathrm{SO}_3$.

Exercices 8
Un zeste de géométrie affine
(et un peu euclidienne)

1° Deux applications affines dans $\mathbb{R}^2$

Considérons les applications suivantes :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} -x-1 \\ -y-1 \end{pmatrix} \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ 2x-y-1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

a) Quels sont les points fixes de f ? de g ? de f et g ?
b) Effectuer une translation de repère qui vous parait appropriée compte-tenu de a).
c) Caractériser f et g : nature, éléments “caractéristiques”,...
d) Que pensez-vous du groupe engendré par f et g (dans les bijections de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$) ?

2° Affinités du plan complexe

a) Si $z_0 \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^+$, quelle est l'expression de l'affinité de centre z_0, d'angle θ et de rapport r ?
b) Pour quelles valeurs de $a, b, c, d, u, v \in \mathbb{R}$ l'application suivante est-elle une affinité :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} ax+by+u \\ cx+dy+v \end{pmatrix} \end{array}?$$

Donner, lorsque c'est le cas, les éléments caractéristiques en fonction de $a, b, \ldots$ (centre, angle, rapport).

3° Changement affine en statistiques

On se donne une série statistique, i.e. une famille finie de réels $x_1, \ldots, x_n$. On effectue un changement de variable affine, c'est-à-dire qu'on pose

$$x'_i = ax_i + b$$

pour $i = 1, \ldots, n$ et pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.
Quels sont la moyenne et l'écart-type de la nouvelle série ?

4° Suites “affines”

Soit $a, b \in \mathbb{C}$. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_{a,b}$ des suites récurrentes qui vérifient :

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a\,u_n + b.$$

a) Vérifier que $\mathcal{E}_{a,b}$ est un sous-espace affine de l'espace des suites. Quid de $\mathcal{E}_{a,0}$?
b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour quelles valeurs de a, b peut-on trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}_0$ avec $v_n = u_n + c$?
c) En discutant selon les cas de k), décrire toutes les suites de $\mathcal{E}_{a,b}$.
d) Mêmes questions avec

$$(**) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + b.$$

e) Etudier le cas général : si $a_0, \ldots, a_{k-1}, b \in \mathbb{C}$, que dire des suites qui vérifient

$$(\S) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+k} = a_{k-1}u_{n+k-1} + \cdots + a_0 u_n + b?$$

On ira voir le problème de synthèse et on discutera selon les racines de $P(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Le cas le plus facile est le cas où P est scindé à racines simples et $P(1) \neq 0$.

5° Un critère pour les applications affines

On se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^n$ que l'on munit d'une norme quelconque. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application *continue* qui préserve le milieu : si I est le milieu d'un segment $[AB]$ alors $\varphi(I)$ est le milieu du segment $[\varphi(A)\varphi(B)]$. On veut montrer que φ conserve le barycentre.
a) Pourquoi suffit-il de montrer la conservation du barycentre de deux points A_0 et A_1 ?
Fixons donc 2 points A_0 et A_1, leurs images A'_0 et A'_1. On prend les repères $(A_0, \vec{A_0A_1})$ et $(A'_0, \vec{A'_0A'_1})$ des droites (A_0A_1) et $(A'_0A'_1)$, de sorte que les points A_0 et A'_0 (resp. A_1 et A'_1) ont pour abscisse 0 (resp. 1).
b) Vérifier que la conservation de tout barycentre de A_0 et A_1 équivaut aux deux propriétés suivantes :

- l'image de la droite (A_0A_1) est la droite $(A'_0A'_1)$;
- l'abscisse de $M \in (A_0A_1)$ dans le repère $(A_0, \vec{A_0A_1})$ est égale à l'abscisse de $M' = \varphi(M) \in (A'_0A'_1)$ dans le repère $(A'_0, \vec{A'_0A'_1})$.

c) Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on note A_ℓ le point d'abscisse ℓ et $A'_\ell = \varphi(A_\ell)$. Montrer que l'abscisse de A'_k est k.
d) Soit $p \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le point d'abscisse $p/2^k$ de (A_0A_1) est envoyé sur le point d'abscisse $p/2^k$ de $(A'_0A'_1)$. (On vient de faire le cas $k = 0$! Faire une récurrence sur k.)
e) Rappelons la densité de l'ensemble des nombre dyadiques $\{p/2^k \mid p \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$ (existence d'un développement dyadique, analogue au développement décimal mais en base 2 !). En utilisant une suite de points de (A_0A_1) qui ont une abscisse dyadique qui tend (la suite !) vers un point donné de cette droite, conclure.
f) Que se passe-t-il si on ne suppose plus φ continue ?

6° Les isométries sont affines.

Soit φ une isométrie de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^n$.
a) Vérifier que φ est continue.
b) Vérifier que le milieu d'un segment $[AB]$ est l'unique point I de $\mathbb{R}^n$ tel que $AI = IB = AB/2$. En déduire qu'une isométrie préserve le milieu.
c) Conclure.

7° Un problème curieux

Considérons, dans le plan affine, un nombre fini de points distincts tels que sur toute droite passant par deux d'entre eux, il y en ait un troisième. Montrer qu'ils sont tous alignés.
(Indication : Le problème est purement affine, et pourtant... Choisissons un produit scalaire (coup marqué de deux points d'exclamation dans les manuels d'échecs !). Choisissons (si les points ne sont pas tous alignés) la hauteur la plus courte d'un triangle dont les sommets appartiennent à notre ensemble. En utilisant le troisième point du côté opposé à cette hauteur, trouver un triangle avec une hauteur encore plus courte.)

Problème de synthèse : Suites récurrentes, matrices compagnon, matrice de Vandermonde

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une indéterminée λ.
Afin de ne pas perdre le fil, on aura sans doute intérêt à traiter un cas particulier. Par exemple : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $n = 2$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $f(\lambda_0) = f(\lambda_1) = -1$, soit $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$.

I Matrice et déterminant de Vandermonde

On se donne n scalaire distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. On pose :

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}, \quad \Delta_n = \det V = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

1° Interprétation de V

Pour $i = 1, \ldots, n$, notons ℓ_i l'évaluation en λ_i sur l'espace $\mathbb{K}_{n-1}[\lambda]$ des polynômes de degré $\leq n-1$, i.e. $\ell_i(g) = g(\lambda_i)$.
a) Montrer que l'application $\mathbb{K}_{n-1}[\lambda] \to \mathbb{K}^n$, $g \mapsto (g(\lambda_i))_{i=1,\ldots,n}$ est linéaire et injective.
b) En déduire que $(\ell_i)_{i=1,\ldots,n}$ est une base du dual de $\mathbb{K}_{n-1}[\lambda]$.
c) Donner une formule pour la base duale $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ dans $\mathbb{K}_{n-1}[\lambda]$.
d) Montrer enfin que V est la matrice de passage de la base $(L_i)_{i=1,\ldots,n}$ à la base $(\lambda^{j-1})_{j=1,\ldots,n}$. En particulier, on a $\Delta_n \neq 0$.
e) Remarquer que ce qui précède peut s'interpréter de la façon suivante : pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polunôme g de degré au plus $n-1$ tel que $g(\lambda_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.
f) Extension (inutile dans la suite) : si on se donne n entiers $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ et $N = \sum_{i=1}^n r_i - n$ scalaires $(y_{1,0}, \ldots, y_{1,r_1-1}, y_{2,0}, \ldots, y_{2,r_2-1}, \ldots, y_{n,0}, \ldots, y_{n,r_n-1})$, il existe un unique polynôme g de degré au plus $N-1$ tel que $g^{(k)}(\lambda_i) = y_{i,k}$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $k = 0, \ldots, r_i$.

2° Trois méthodes de calcul de Δ_n

a) Calculer Δ_n par récurrence : retrancher la dernière colonne de toutes les autres et factoriser ce que l'on peut ; avec des manipulations sur les lignes, faire apparaître Δ_{n-1}.
b) Vérifier que si on le considère comme un polynôme en λ_n, Δ_n est de degré exactement $n-1$. Calculer son coefficient dominant et exhiber $n-1$ racines. En déduire une relation de récurrence puis la valeur de Δ_n.
c) Soit $L_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i\, \lambda^{i-1}$ un polynôme de degré $\leq n-1$. Montrer que les relations

$$\forall i \leq n-1,\ L_n(\lambda_i) = 0 \text{ et } L_n(\lambda_n) = 1$$

sont satisfaites si et seulement si $X = (x_1, \ldots, x_n)$ est solution du système $V\,X = (0, \ldots, 0, 1)$. En déduire que ce système possède une unique solution et calculer x_n. Appliquer alors les formules de Cramer pour obtenir une relation de récurrence sur Δ_n.
d) Pourquoi la formule précédente reste-t-elle valable lorsque deux des λ_i sont égaux ?
e) Formule pour l'inverse (inutile dans la suite) : On revient au cas où tous les λ_i sont distincts. D'après ce qui précède, pour tout $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique polynôme $P(\lambda) = \sum_{i=1}^n x_i\, \lambda^{i-1}$ tel que $P(\lambda_i) = y_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. On a en fait : $P(\lambda) = \sum_{i=1}^n y_i\, L_i(\lambda)$. En remarquant que la résolution du système $V\,X = Y$ revient à calculer les coefficients de P, vérifier

que l'inverse de V a pour coefficient d'indice (i, j) :

$$(-1)^{n-i} \frac{\sigma_{n-i}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, \ldots, \lambda_n)}{\prod_{\ell \neq j}(\lambda_j - \lambda_\ell)},$$

où σ_{i-1} désigne la fonction symétrique élémentaire de degré $i-1$; par exemple, $\sigma_0((x_k)_k) = 1$, $\sigma_1((x_k)_k) = \sum_k x_k$, $\sigma_2((x_k)_k) = \sum_{k<\ell} x_k\, x_\ell$, etc.

II Matrice compagnon

On se donne un polynôme quelconque $f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \lambda^i$, où $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. On pose

$$C = C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \qquad {}^tC = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

1° Polynômes caractéristique et minimal

a) Montrer que le polynôme caractéristique de C est : $\det(\lambda\,\mathrm{Id} - C) = f(\lambda)$. (Commencer avec $n = 2$, $n = 3$, puis le cas général.)
b) Soit $e_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$. Constater que pour $i \leq n$, ${}^tC^{i-1}e_1$ est le $i$ème vecteur de la base canonique et calculer ${}^tC^n e_1$.
c) On note $\mathcal{P}({}^tC) = \{g({}^tC),\ g \in \mathbb{K}[\lambda]\}$ l'algèbre des polynômes en ${}^tC$. Montrer que l'application $\mathcal{P}({}^tC) \to \mathbb{K}^n$, $B \mapsto Be_1$ est linéaire et injective.
d) Soit $g \in \mathbb{K}[\lambda]$ un polynôme de degré $\leq n-1$. Montrer que $g({}^tC) \neq 0$. (Appliquer à $(1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^n$.) En déduire que le polynôme minimal[2] de ${}^tC$ est f.
e) En déduire que ${}^tC$ est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si f est scindé à racines simples dans $\mathbb{K}$. Retrouver ainsi (sans calcul) le résultat de a).
f) Pourquoi ces résultats restent-ils vrais pour C ?

2° Matrices compagnon et de Vandermonde

On suppose désormais que $f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$, où les λ_i sont n éléments distincts de $\mathbb{K}$.
a) Vérifier que pour $i = 1, \ldots, n$, $(1, \lambda_i, \ldots, \lambda_i^{n-1})$ est un vecteur propre de C.
b) En déduire la formule : $C = {}^tV\, D\, {}^tV^{-1}$, où V est la matrice de Vandermonde de la partie I et D est la matrice diagonale dont les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
c) En déduire une façon commode pour calculer C^k ($k \in \mathbb{N}$) en connaissant V^{-1} par I.

III Suites linéaires récurrentes

Soit E l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. Dans cette partie, on se donne $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$, avec $a_0 \neq 0$ et on pose $f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \lambda^i$. On veut étudier l'ensemble E_f des suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in E$ telles que l'on ait :

$$(\nabla) \qquad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+n} + a_{n-1}\, u_{k+n-1} + \cdots + a_0\, u_k = 0.$$

1° Définition et structure générale

On note D l'endomorphisme (décalage) de E qui à la suite $(u_0, u_1, \ldots)$ associe la suite $(u_1, u_2, \ldots)$.
a) Déterminer les espaces propres de D.
b) Vérifier que $E_f = \operatorname{Ker} f(D)$.
c) Vérifier par récurrence que la donnée de $U_0 = (u_0, \ldots, u_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ détermine les n premiers termes d'un unique élément $u = \varphi(U_0)$ de E_f.

---

[2] C'est le polynôme unitaire de degré minimal qui annule ${}^tC$.

d) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{K}^n \to E_f$ est un isomorphisme linéaire.
e) Dans la suite, on notera $(u^{(i)})_{i=1,\ldots,n}$ l'image de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par φ. Quelle est la matrice de D dans cette base ?

2° Suites récurrentes et matrice compagnon

Etant donnée une suite $u \in E$ on associe la suite $U = (U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ définie par : $U_k = (u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{k+n-1})$.
a) Montrer que $u \in E_f$ si et seulement si $U_{k+1} = C\,U_k$, où C est la matrice compagnon de f de la partie II.
b) Pour $u \in E_f$, donner une expression de U_k en fonction de k, C et U_0.
c) Expliquer l'intérêt qu'il y a à supposer f scindé à racines simples.

3° Cas d'un polynôme scindé à racines simples

On suppose désormais que $f(\lambda) = \prod_{i=1}^n (\lambda - \lambda_i)$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont distincts dans $\mathbb{K}$ et non nuls.
a) Avec le lemme des noyaux, montrer que $E_f = \bigoplus_{i=1}^n \operatorname{Ker}(D - \lambda_i \operatorname{Id})$.
b) Montrer que les n suites géométriques de premier terme 1 et de raison $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ forment une base de E_f.
c) Quelle est la matrice de passage de la base $(u^{(i)})_{i=1,\ldots,n}$ à la base $((\lambda_j^k)_{k\in\mathbb{N}})_{j=1,\ldots,n}$?

4° Approche par séries génératrices

On reprend les notations précédentes. A toute suite $u \in E$, on associe la série formelle[3] $\sum_{k\geq 0} u_k\, \lambda^k$.
a) Soit $u \in E_f$. En multipliant (∇) par λ^{n+k}, montrer que l'on a

$$\sum_{k\geq 0} u_k\, \lambda^k = \frac{g(\lambda)}{h(\lambda)}$$

où $h(\lambda) = 1 + a_{n-1}\,\lambda + \cdots + a_0\,\lambda^n$ et $g(\lambda)$ est un polynôme de degré $\leq n-1$.
b) Vérifier que l'on a $g(\lambda) = \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{k=0}^{\ell} a_{k+\ell}\, u_k \right) \lambda^\ell$ (ou corriger la formule).
c) On remarque que le dénominateur est : $h(\lambda) = \lambda^n f(\lambda^{-1})$. Quel est consécutivement le lien entre les racines de f et les racines de h ?
d) On suppose désormais que f est scindé à racines simples. Montrer que $h(\lambda) = \prod_{i=1}^n (1 - \lambda\,\lambda_i)$.
e) En décomposant la fraction $g(\lambda)/h(\lambda)$ en éléments simples, puis en développant en série entière, montrer l'existence de $c_1, \ldots, c_n$ tels que

$$\sum_{k\geq 0} u_k\, \lambda^k = \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{i=1}^n c_i \lambda_i^k \right) \lambda^k.$$

f) On retrouve ainsi la forme des solutions. Comment calculer les c_i, étant donnés $U_0 = (u_0, \ldots, u_{n-1})$? (On remarquera que cela revient, via φ, à se poser le problème de 3°c).
g) Que se passe-t-il si f a des racines multiples ?

IV Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Dans cette partie, on note E l'ensemble des fonctions dérivables n fois, $D : E \to E$, $y \mapsto y'$ la dérivation et $y^{(i)} = D^i(y)$. On se donne de nouveau un polynôme $f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, \lambda^i \in \mathbb{K}[\lambda]$ et on appelle E_f l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$(\nabla) \qquad y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, y^{(i)} = 0.$$

1° Approche "manuelle"

a) Avec le théorème des accroissements finis, déterminer le noyau de D et le noyau de D^k (proprement).

[3] Plus précisément, on met sur E la structure d'algèbre qui permet de l'identifier aux séries formelles.

b) A l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminer le noyau de $D - \lambda \mathrm{Id}$ et de $(D - \lambda \mathrm{Id})^k$. On précisera en particulier leur dimension.
c) Vérifier que $E_f = \mathrm{Ker}\, f(D)$.
d) Avec le lemme des noyaux, décrire la forme de la solution générale de l'équation (∇). En déduire en particulier la dimension de E_f.
e) On suppose que f est scindé et a n racines simples $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Préciser la réponse de la question précédente avec une base de E_f.

2° Retour de la matrice compagnon

On présente une autre méthode pour trouver les résultats précédents.
A toute fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ on associe la fonction $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ définie par : $Y(t) = (y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))$.
a) Montrer que l'équation différentielle (∇) équivaut à l'équation différentielle : $Y'(t) = C\,Y(t)$, où C est la matrice compagnon du polynôme f de la partie II.
b) On suppose C diagonalisable, i.e. f scindé à racines simples. Expliquer comment la question a) permet de ramener l'équation d'ordre n en n équations d'ordre 1 que l'on sait résoudre.
c) Dans le cas général, mettre C sous forme de Jordan et résoudre le problème.

3° Problème de Cauchy et retour de la matrice de Vandermonde

On se donne ici $t_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{C}$. Etudier le problème de Cauchy, c'est étudier l'existence et l'unicité d'une solution de (∇) telle que $y^{(i)}(t_0) = b_i$ $(i = 0, \ldots, n-1)$.
a) Résoudre le problème à l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz.
On veut une méthode self-contained.
b) On suppose que f possède n racines simples. Montrer que l'application $E_f \to \mathbb{C}^n$, $y \mapsto (y(t_0), \ldots, y^{(n-1)}(t_0))$ est surjective. (La matrice de cette application dans une base raisonnable de E_f et sur la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est une matrice de Vandermonde V ou peut-être sa transposée.)
c) Montrer alors que le problème de Cauchy a une unique solution.
d) Que se passe-t-il si f a des racines multiples ?

Remarque : Avec un minimum de bricolage sur les séries entières, on se convainc de l'existence de $\exp(t\,C)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que pour $Y_0 = (y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, la fonction qui à t associe la première coordonnée de $\exp((t - t_0)C)Y_0$ est l'unique solution du problème de Cauchy défini par les données initiales (t_0, Y_0).