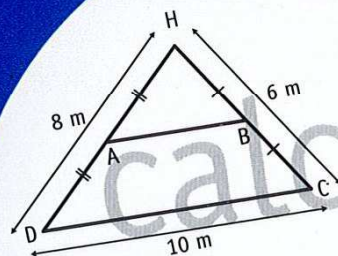


Le calcul mental au collège

Calculer le périmètre



$$54 \times 10^{-6} = ?$$

$$\sqrt{4} \times \sqrt{9} = ?$$

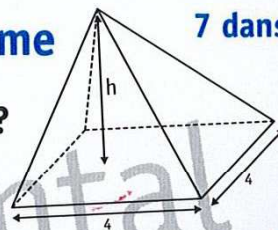
$$(a - 6)^2 = a^2 \dots 36 \dots$$

Calculer le volume

7 dans 56

Le double de 25 ?

$$2 \text{ h } 50 = ? \text{ min}$$



$$1 \rightarrow 6 ; 2 \rightarrow 9 ; 3 \rightarrow 12$$



Le calcul mental au collège

Collection « Repères pour agir. Disciplines et Compétences »

Coordination : Centre régional de documentation pédagogique de l'académie de Créteil.

Directrice de collection : Anne-Marie Hazard-Tourillon, IA-IPR d'histoire-géographie.

Responsable éditorial : Gilles Gony.

Le calcul mental au collège

Directeur de la publication : Jean-Pierre Batailler

Chef de projet et secrétaire de rédaction : Guy Prugnol

Infographiste : Magali Homps

Conception du site : Sophie Groleau.

Auteurs

Cette parution reprend et enrichit la brochure *Le calcul mental au collège : nostalgie ou innovation ?* éditée en 2008 par l'IREM de Lyon et aujourd'hui épuisée.

Les auteurs sont les membres du groupe collège de l'IREM de Lyon qui animent ou ont animé des stages de formation continue dans l'académie de Lyon.

Bernard Anselmo, professeur certifié de mathématiques, formateur à l'ESPE de Lyon au centre de Bourg-en-Bresse dans le département de l'Ain.

Stéphanie Evesque-Sagnard, professeure certifiée de mathématiques au collège des Servièrès à Meyzieu dans le département du Rhône.

Karine Fenoy, professeure certifiée de mathématiques au collège Marcel-Aymé à Dagneux dans le département de l'Ain.

Paul Planchette, professeur agrégé de mathématiques.

Hélène Zucchetta, professeure certifiée, formatrice à l'ESPE de Lyon.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier l'IREM de Lyon, ainsi que tous ceux qui ont contribué à la réflexion et aux expérimentations, et plus particulièrement les collègues avec lesquels ce projet a été initié :

Monique Bonnet, professeure au collège Picasso à Bron dans le département du Rhône.

Georges Combier, professeur de mathématiques, formateur à l'ESPE de Lyon au centre de Bourg-en-Bresse dans le département de l'Ain.

Le calcul mental au collège

**Ouvrage collectif sous la direction de
Bernard Anselmo et Hélène Zucchetta.**

**Préface de Janine Reynaud,
IA-IPR de mathématiques.**

Catalogage

Ouvrage collectif sous la direction de Bernard Anselmo et Hélène Zucchetta
« Repères pour agir. Disciplines et compétences », *Le calcul mental au collège*.
Centre de documentation pédagogique de l'académie de Lyon / IREM de
Lyon, 2013.

ISSN : 1625-3000

ISBN : 978-2-86625- 379-0

DEWEY : 513.9

MOTBIS : Apprentissage mathématique ; calcul mental ; collège ; démarche
pédagogique ; méthode de calcul.



Cet ouvrage a été imprimé sur un papier 100 % recyclé.

La totalité des adresses URL données dans l'ouvrage ont été vérifiées la veille du départ des fichiers chez l'imprimeur.

En vertu de l'article L 122-5 du Code de la propriété intellectuelle, ne sont autorisées, d'une part que « les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que « les analyses et courtes citations justifiées par le caractère critique, polémique, pédagogique, scientifique ou d'information de l'œuvre à laquelle elles sont incorporées ». C'est pourquoi, en vertu de l'article L 122-4 « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droits ou ayants cause est illicite ». Tout contrevenant s'exposerait donc à des poursuites judiciaires (article L 335-2 et L 335-3), toute reproduction ou représentation, par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie constituant une contrefaçon.

© SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Lyon – 2013

Sommaire

Préface	13
Introduction : pourquoi du calcul mental au collège ?	15
Partie I. Réflexions théoriques sur le calcul mental.....	17
Deux aspects complémentaires du calcul.....	19
Calcul mental et apprentissage	23
Le calcul mental et les résultats mémorisés	23
Le calcul mental et les procédures automatisées.....	25
Le calcul mental et l'oral.....	25
Le calcul mental et les formules	26
Le calcul mental et les problèmes	27
Le calcul mental et les nombres	29
Le calcul mental et les ordres de grandeurs	29
Quelles compétences développer au collège ?	31
Nos objectifs pour la classe de sixième	31
Domaine additif	32
Domaine multiplicatif.....	33
Nos objectifs pour la classe de cinquième.....	39
Domaine additif	39
Domaine multiplicatif.....	41
Nos objectifs pour la classe de quatrième	43
Domaine additif	44
Domaine multiplicatif.....	45
Nos objectifs pour la classe de troisième	48
Domaine additif	49
Domaine multiplicatif	49

Éléments d'aide pour une programmation	51
Compétences travaillées à l'école élémentaire (cycle 3) à con-	
solider au collège	52
Addition / Soustraction	52
Multiplication / Division.....	53
Compétences à construire au collège.....	54
Classe de 6 ^e	54
Classe de 5 ^e	56
Classe de 4 ^e	57
Classe de 3 ^e	59

Comment faire du calcul mental ?61

Les objectifs	61
Les différents types de séances	62
Les séances d'apprentissage.....	62
Les séances d'entraînement	62
Les séances d'évaluation	63

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 1. Les différents types de séances. *Racines carrées. Évaluation formative.*

DIAPORAMA 2. Les différents types de séances. *Proposition de progression sur les racines carrées.*

La gestion de la classe	63
Les consignes	63
Le matériel.....	64
Le vécu des élèves.....	64

Conséquences sur l'enseignement65

Installation d'un rituel.....	65
Un support privilégié : l'oral	65
Un gain de temps	66
Un nouveau contrat pour la classe	66
Rôle de l'élève	67
Rôle du professeur.....	67
Une modification des pratiques.....	67
Une autre conception de l'expertise	69
Effets sur les élèves.....	70

Partie II. Des activités pour la classe71

Mémoriser des résultats : les tables de multiplication73

Pourquoi mémoriser les tables ?73

Quel diagnostic ?74

Quels dispositifs de remédiation ?75

Activité 1. Les tables dans tous les sens76

Activité 2. Placement des nombres77

Activité 3. Furet multiplicatif.....78

Activité 4. Labynombre79

Activité 5. La table arithmétique naturelle80

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 1. Les tables de multiplication. *Comment savoir si l'on connaît ses tables ?*

DOCUMENT 2. Les tables de multiplication. *Les tables de Pythagore.*

DOCUMENT 3. Les tables de multiplication. *Labyrinthe 1.*

DOCUMENT 4. Les tables de multiplication. *Labyrinthe 2.*

DOCUMENT 5. Les tables de multiplication. *Grilles de labyrinthe.*

DOCUMENT 6. Les tables de multiplication. *Table arithmétique.*

DOCUMENT 7. Les tables de multiplication. *La table arithmétique naturelle.*

DOCUMENT 8. Les tables de multiplication. *Table arithmétique avec couleurs.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 3. Les tables de multiplications. *Un exercice de remédiation.*

DIAPORAMA 4. Les tables de multiplications. *Doubles, moitiés, etc.*

DIAPORAMA 5. Les tables de multiplication. *Entraînement.*

DIAPORAMA 6. Les tables de multiplication. *Multiplier par 12 et 15.*

Jeux pour mémoriser les tables81

Activité 6. Jeu avec des dominos à fabriquer.....82

Activité 7. Jeu avec des cartes à jouer83

Activité 8. Jeu avec des cartes à fabriquer83

Activité 9. Jeu avec des grilles pré-remplies.....84

Activité 10. Jeu avec des cartons de loto.....85

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 9. Jeux pour mémoriser les tables de multiplication. *Jeu de dominos multiplicatifs.*

DOCUMENT 10. Jeux pour mémoriser les tables de multiplication. *Loto.*

Mémoriser des propriétés.....	87
Critères de divisibilité	87
Activité 11. Le compte est bon	87

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 11. Critères de divisibilité. *Le compte est bon.*

Propriétés des opérations.....	90
Activité 12. Le plus court chemin	91
Propriétés des puissances.....	92
Activité 13. Transformation d'écriture de puissances.....	93

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 12. Propriétés des puissances. *Entraînement sur les puissances.*

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 7. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 1.*
- DIAPORAMA 8. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 2.*
- DIAPORAMA 9. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 3.*
- DIAPORAMA 10. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 4.*
- DIAPORAMA 11. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 5.*
- DIAPORAMA 12. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 6. Test 1.*
- DIAPORAMA 13. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 7.*
- DIAPORAMA 14. Propriétés des puissances. *Progression avec puissances de dix 8. Test 2.*

Propriétés de géométrie.....	95
Activité 14. Somme des angles d'un triangle	95
Activité 15. Exemples d'autres activités en géométrie.....	99

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

- DOCUMENT 13. Propriétés de géométrie. *Droite des milieux.*
- DOCUMENT 14. Propriétés de géométrie. *Le triangle existe-t-il ?*
- DOCUMENT 15. Propriétés de géométrie. *Somme des angles d'un triangle.*

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 15. Propriétés de géométrie. *Somme des angles.*
- DIAPORAMA 16. Propriétés de géométrie. *Triangle rectangle. Égalité de Pythagore.*
- DIAPORAMA 17. Propriétés de géométrie. *Droite des milieux.*

Automatiser des procédures	103
----------------------------------	-----

Multiplier par 10, 100... Diviser par 10, 100.....	103
--	-----

Activité 16. Multiplication. Un exemple de situation d'apprentissage ..	104
---	-----

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 16. Multiplier par 10, 100... *Graduations.*

DOCUMENT 17. Multiplier par 10, 100... *Fabrication d'un tableau de numération.*

DOCUMENT 18. Multiplier par 10, 100... Tableau de numération. *Illustration de $2,16 \times 1000$.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 18. Multiplier ou diviser par 10 ; 100 ; 1000... *Multiplier ou diviser par 10 ; 100 ; 1000...*

Changements d'unités.....	108
---------------------------	-----

Conversions simples	109
---------------------------	-----

Activité 17. Travail de mémorisation	109
--	-----

Unités d'aires.....	111
---------------------	-----

Activité 18. Comparaison de grandeurs.....	111
--	-----

Unités de volume.....	113
-----------------------	-----

Activité 19. Empilement de cubes.....	113
---------------------------------------	-----

Activité 20. Du cube aux pavés	116
--------------------------------------	-----

Activité 21. Détermination de volumes.....	119
--	-----

Activité 22. Volumes et capacités.....	120
--	-----

Heure décimale	122
----------------------	-----

Activité 23. Conversions d'écritures	122
--	-----

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 19. Changements d'unités. *Empilement de cubes.*

DOCUMENT 20. Changements d'unités. *Des cubes aux pavés.*

DOCUMENT 21. Changements d'unités. *Détermination de volumes.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 19. Changements d'unités. *Conversions simples.*

DIAPORAMA 20. Changements d'unités. *Volumes.*

DIAPORAMA 21. Changements d'unités. *Capacité / Volume.*

DIAPORAMA 22. Changements d'unités. *Heure décimale.*

Retenir des formules	123
----------------------------	-----

Activité 24. Formules d'aires.....	124
------------------------------------	-----

Activité 25. Identités remarquables	125
---	-----

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

- DOCUMENT 22. Retenir des formules. *Aires et périmètres.*
 DOCUMENT 23. Retenir des formules. *Aires et périmètres des triangles.*
 DOCUMENT 24. Retenir des formules. *Volumes.*
 DOCUMENT 25. Retenir des formules. *Rayon, diamètre et périmètre du disque.*
 DOCUMENT 26. Retenir des formules. *Aire et périmètre du disque.*
 DOCUMENT 27. Retenir des formules. *Volume des pavés.*

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 23. Retenir des formules. *Trigonométrie.*
 DIAPORAMA 24. Retenir des formules. *Aire et périmètre du disque 1.*
 DIAPORAMA 25. Retenir des formules. *Aire et périmètre du disque 2.*
 DIAPORAMA 26. Retenir des formules. *Aire et périmètre du rectangle.*
 DIAPORAMA 27. Retenir des formules. *Identités remarquables. Test.*

Opérations sur les fractions	127
Activité 26. Le compte est bon (avec des fractions)	127

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 28. Opérations sur les fractions. *Problèmes multiplicatifs avec fractions.*
 DIAPORAMA 29. Opérations sur les fractions. *Fractions égales.*

Estimer des ordres de grandeurs	129
Approcher des résultats	129
Activité 27. Approcher une somme	129
Activité 28. Contrôler la valeur d'un produit.....	131
Estimer des mesures	132
Activité 29. Estimation de longueurs.....	133
Vers l'écriture scientifique	134
Activité 30. Donner un ordre de grandeur à l'aide des puissances de 10.....	135

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 30. Vers l'écriture scientifique. *Estimer un ordre de grandeur avec puissances de dix.*

Autres activités	137
Chercher : trouver la règle	137

Activité 31. Recherche et utilisation d'une relation liant des nombres137

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 31. Trouver la règle. *Vers le calcul littéral.*

DIAPORAMA 32. Trouver la règle. *Initiation aux fonctions.*

Pour modifier des conceptions139

Activité 32. Racines carrées.....139

Activité 33. Pourcentages.....140

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENT IMPRIMABLE ET/OU PROJETABLE

DOCUMENT 28. Modifier des conceptions. *Pourcentages.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 33. Modifier des conceptions. *Yens et euros.*

DIAPORAMA 34. Modifier des conceptions. *Problèmes multiplicatifs avec pourcentage.*

DIAPORAMA 35. Modifier des conceptions. *Simplification de racines carrées.*

Pour enrichir des stratégies.....142

Activité 34. Pamplemousses et citrons142

Activité 35. La configuration de Thalès.....144

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENTS IMPRIMABLES ET/OU PROJETABLES

DOCUMENT 29. Enrichir des stratégies. *Proportionnalité.*

DOCUMENT 30. Enrichir des stratégies. *Proportionnalité. Cinq activités.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 36. Enrichir des stratégies. *Configuration de Thalès.*

DIAPORAMA 37. Enrichir des stratégies. *Statistiques.*

DIAPORAMA 38. Enrichir des stratégies. *Fonctions et thèmes de convergence.*

Pour créer des situations de référence145

Activité 36. Le sens de la multiplication.....146

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DOCUMENT IMPRIMABLE ET/OU PROJETABLE

DOCUMENT 31. Créer des situations de référence. *Petits problèmes de multiplication.*

DIAPORAMAS

DIAPORAMA 39. Créer des situations de référence. *Problèmes multiplicatifs.*

Pour raisonner	147
Activité 37. Avec le cercle en classe de sixième	147

COMPLÉMENTS NUMÉRIQUES (SITE)

DIAPORAMAS

- DIAPORAMA 40. Raisonner en géométrie. *Rayon et cercle 1.*
- DIAPORAMA 41. Raisonner en géométrie. *Rayon et cercle 2.*
- DIAPORAMA 42. Raisonner en géométrie. *Calcul d'angles.*
- DIAPORAMA 43. Raisonner en géométrie. *Points alignés.*
- DIAPORAMA 44. Raisonner en géométrie. *Calcul de longueurs 1.*
- DIAPORAMA 45. Raisonner en géométrie. *Calcul de longueurs 2.*

Conclusion	151
Annexe. Liens entre le livre et le site d'accompagnement	153
Tableau des activités (livre)	153
Tableau des documents imprimables et/ou projetables (site d'accompagnement)	156
Tableau des diaporamas (site d'accompagnement)	160
Bibliographie	167
Sitographie	169

SITE

URL : <http://www.crdp-lyon.fr/lecalculmentalaucollege>
ou [http://www.cndp.fr/collection/rpa/disciplines-competences/
calcul-mental-college/accueil.php](http://www.cndp.fr/collection/rpa/disciplines-competences/calcul-mental-college/accueil.php)

Code d'accès : 1%3-CM+

Préface

« Un enfant qui, ayant à calculer $9 + 7$, commence par ajouter 1 pour arriver à 10 puis ajoute 6 pour obtenir le résultat 16 recherche raisonne, comme raisonne celui qui, cherchant la valeur de 7×8 , se rappelle que $8 \times 8 = 64$ et enlève 8 à ce nombre. Ils mettent en jeu dans leur raisonnement des faits numériques déjà connus et, même si c'est de façon implicite, des propriétés essentielles de l'addition et de la multiplication. Lorsqu'ils auront mémorisé que $9 + 7 = 16$, que $7 \times 8 = 56$, de tels raisonnements deviendront inutiles, mais le raisonnement continuera à être nécessaire pour mener à bien des calculs plus complexes et pour mettre le calcul au service de la réalisation d'autres tâches, mathématiques ou non mathématiques¹. »

Le préambule des programmes de mathématiques du collège rappelle l'importance de la place des nombres dans l'activité mathématique, au début et au cœur de cette activité. En même temps, la pratique du calcul, sous ses différentes formes, mental, écrit ou instrumenté et automatisé ou réfléchi, constitue un moment privilégié pour enrichir les conceptions des élèves sur les nombres, conceptions en lien direct avec la numération décimale et les propriétés des opérations convoquées.

Le rapport dialectique entre travail conceptuel autour de la construction du sens et des propriétés des nombres et travail technique autour de l'automatisation de résultats et de procédures de calcul visant à rendre le raisonnement de l'élève disponible pour d'autres tâches est au fondement de cet ouvrage.

Les auteurs de cette publication – professeurs en collège, intervenant en formation initiale ou continue auprès de professeurs des écoles et de professeurs du second degré – sont restés attentifs à produire des activités directement utilisables dans le cadre de la classe, inscrites dans une progression et une

1. Michèle Artigue, Université Paris Diderot, LDAR et IREM (Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques, mars 2012).

programmation des apprentissages conformes aux objectifs du socle commun de connaissances et de compétences et à ceux des programmes de mathématiques du collège, en même temps que motivées par une réflexion théorique mettant en avant les fonctions du calcul mental dans son rapport à la compréhension des nombres et au raisonnement.

Une première publication, éditée par l'IREM de Lyon sous le titre *Le calcul mental au collège : Nostalgie ou innovation ?*, a été publiée en septembre 2008. Cette nouvelle édition a été enrichie d'un site internet présentant des activités directement utilisables ou à adapter dans le cadre de la classe. Les diaporamas présentés complètent la brochure initiale et montrent, s'il en était besoin, la diversité des animations possibles d'une séance de calcul mental, la diversité des moments où une telle séance peut être mise en place (phase d'introduction d'une notion, phase d'entraînement, phase d'évaluation) ainsi que la richesse des activités à conduire dans d'autres domaines que le domaine numérique.

Les auteurs insistent sur le rôle essentiel qu'ils donnent au calcul mental dans la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. Ils illustrent, par le choix des activités proposées dans la deuxième partie de leur ouvrage, ce qui a présidé au fondement de leur réflexion présentée dans sa première partie. Ainsi le lecteur attentif pourra approcher de manière concrète et illustrée en quoi le calcul mental constitue un levier pour la mémorisation, l'automatisation de procédures, l'expression à l'oral d'une diversité de cheminements possibles menant à la solution, l'entrée dans l'élaboration et l'appropriation de formules mathématiques, l'estimation des ordres de grandeurs et la résolution de problèmes au travers de l'étude de « petits problèmes-types ».

Le calcul mental au collège a vocation à être un support utile à la réflexion et à la pratique des professeurs de mathématiques en collège autant qu'à contribuer à développer un rapport approprié au calcul, entre automatisation et raisonnement, pour soutenir et guider les apprentissages des élèves.

Janine Reynaud
IA-IPR de mathématiques

Introduction

Pourquoi du calcul mental au collège ?

Dans la vie quotidienne où il est fait une large utilisation des calculatrices, comme dans la vie professionnelle avec l'emploi de tableurs et autres logiciels de calcul, le calcul instrumenté a largement remplacé le calcul écrit. Cette évolution des pratiques a conduit à interroger la place et le rôle respectifs des différentes formes de calcul dans la scolarité.

Les rédacteurs des programmes qui ont eu à traiter de cette question ont considéré :

- que la prise en compte de l'évolution des moyens de calcul nécessite que soit conduit un travail spécifique en classe sur l'utilisation de la calculatrice ;
- que le travail sur les techniques opératoires devait être repensé en orientant résolument l'étude des techniques de calcul posé vers la compréhension et la justification de leur fonctionnement. En cela, le travail des techniques opératoires qui sollicite la numération décimale contribue à en renforcer la compréhension et à en développer la maîtrise ;
- qu'une bonne maîtrise du calcul mental est indispensable, que ce soit par exemple pour conduire à bien une opération posée ou estimer l'ordre de grandeur du résultat d'une opération ou encore exercer un contrôle sur le résultat fourni par une calculatrice.

Depuis 2002, les programmes pour l'école primaire accordent une place prépondérante au calcul mental, place qui a été réaffirmée depuis dans les programmes pour le collège. A la suite de l'école primaire, le collège doit en particulier permettre aux élèves d'entretenir et de développer leurs compétences en calcul mental en étendant la pratique de celui-ci au calcul sur les nombres en écriture fractionnaire, les nombres relatifs et les racines carrées.

Plusieurs raisons plaident en faveur de cette place particulière faite au calcul mental :

- le calcul mental est un calcul d'usage, utile au quotidien. Même si l'usage de la calculatrice est de plus en plus répandu, il demeure indispensable de

savoir calculer sans elle pour obtenir rapidement un résultat exact dans des cas simples ou un résultat approché dans d'autres cas. Le fait de pouvoir effectuer « à la main » des opérations sur des nombres de taille raisonnable est utile à l'élève dans son rapport à l'instrument. Il est en effet rassurant de savoir qu'on peut obtenir par soi-même un résultat donné par la machine ;

- aucun calcul écrit ne peut être effectué sans une disponibilité suffisante de résultats mémorisés (tables d'addition, tables de multiplication, carrés des premiers naturels et de quelques autres nombres usuels...) ou obtenus mentalement ;

- le calcul mental permet de contrôler un résultat obtenu par un autre moyen de calcul ;

- le calcul mental réfléchi nécessite l'élaboration de stratégies de calcul personnelles. Il met donc en jeu l'initiative, le raisonnement et des connaissances (explicites ou non) sur la numération et les propriétés des opérations ;

- un déficit de compétences en calcul mental constitue un handicap majeur pour de nombreux élèves en collège. Par exemple, la perception rapide de rapports entre les nombres dans le cas de la proportionnalité permet de faire le choix de la procédure la mieux appropriée ;

- l'habileté en calcul mental est une aide à la conceptualisation. En travaillant dans un domaine où les calculs peuvent être réalisés mentalement et rapidement, les élèves peuvent s'approprier plus aisément de nouveaux savoirs et apprendre à les utiliser, en centrant leur attention sur ce qui est nouveau ;

- le calcul mental apporte souvent une aide à la résolution de problèmes, notamment lorsque l'élève ramène le problème à un champ numérique dans lequel les calculs deviennent plus familiers : essayer avec des nombres plus petits permet, par exemple, d'avoir une intuition d'un mode de traitement possible.

Omniprésent dans l'activité mathématique, le calcul mental est incontournable. Un déficit de maîtrise en calcul mental hypothèque la compréhension initiale de nombre de notions enseignées à l'école et au collège. Pour toutes ces raisons, le calcul mental constitue une priorité de l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité obligatoire.

Loin d'être une perte de temps, si une pratique régulière et organisée du calcul mental se révèle être bénéfique à la construction et à l'appropriation de connaissances dans le domaine numérique, elle concourt également au développement de l'autonomie et de l'esprit d'initiative de l'élève, compétences qui dépassent le seul champ des mathématiques.

Partie I

Réflexions théoriques sur le calcul mental

Deux aspects complémentaires du calcul

La classification « calcul écrit, mental ou instrumenté » n'est pas complètement satisfaisante pour rendre compte de la diversité des procédures de calculs. Elle ne met notamment pas en évidence le fait que certaines activités de calcul écrit (pose d'une division par exemple) ou instrumenté (programmation d'un calcul complexe) nécessitent une activité mentale. Telle quelle, cette classification ne suffit pas toujours à l'élaboration de séquences d'apprentissage du calcul.

Pour cette raison, on la complète parfois par une classification plus opératoire qui croise la première en distinguant les aspects automatisé et réfléchi de chaque type de calcul.

	CALCUL AUTOMATISÉ	CALCUL RÉFLÉCHI OU RAISONNÉ
Calcul mental	• Résultats mémorisés. • Procédures automatisées.	• Procédures construites ou reconstruites. • Choix des arrondis.
Calcul écrit *	• Techniques opératoires (calcul posé).	• Procédures construites ou reconstruites. • Choix des arrondis.
Calcul instrumenté	• Calculs usuels (quatre opérations). • Racines carrées. • Calculs trigonométriques. • Fonctions statistiques. • Utilisation des fonctions simples d'un tableur.	• Programmation d'un calcul complexe. • Adaptation de la procédure aux possibilités de la machine.

* papier-crayon

En regardant le calcul mental suivant cette classification, le *calcul mental automatisé* peut être rapidement défini comme le calcul où les résultats sont produits immédiatement, de façon spontanée, sans conscience du chemin suivi. Exemple : lorsqu'on produit un résultat pris dans les tables de multiplication on

fait appel à un *résultat mémorisé* ; lorsqu'on applique une technique comme la multiplication par 10, 100 ou 1000 on utilise une *procédure automatisée*.

Dans le *calcul mental réfléchi*, les résultats sont obtenus par une construction ou reconstruction personnelle. Ainsi nous ne donnons pas directement le produit de 12 par 15. Son calcul nécessite un temps d'analyse, de réflexion qui va nous permettre de refaire la multiplication même si nous l'avons déjà rencontrée plusieurs fois.

Pour définir une stratégie de calcul, la réflexion s'appuie sur certaines propriétés des opérations, implicitement ou explicitement connues (commutativité, distributivité, associativité), et sur la connaissance des relations entre les nombres (multiplicatives ou additives). Les étapes de résolution peuvent être nombreuses, nécessitant parfois l'écriture de résultats intermédiaires. Pour un même calcul, les procédures varient souvent selon les individus, le moment et le contexte où ce calcul est proposé. Ainsi le résultat de 12×15 peut être obtenu par l'une ou l'autre des opérations :

- $4 \times 15 \times 3$;
- $10 \times 12 + 5 \times 12$;
- $((15 + 15) + (15 + 15)) \times 3$;
- $12 \times 10 = 120$, puis $120 \div 2 = 60$, enfin $120 + 60$;
- la moitié de $12 \times$ le double de 15 ;
- 12 quarts d'heures égalent 3 heures, ce qui fait 180 minutes ;
- etc.

Les procédures dépendent des conceptions de certaines notions. Ainsi $2 + \frac{12}{13}$ peut être traité :

- avec une « technique » de réduction au même dénominateur :

$$\frac{2}{1} + \frac{12}{13} = \frac{2 \times 13}{1 \times 13} + \frac{12}{13}$$

- en utilisant la fraction partage : 2, c'est 2 unités et, dans une unité, il y a 13 treizièmes donc :

$$2 = \frac{26}{13} \text{ et } \frac{26}{13} + \frac{12}{13} = \frac{38}{13}$$

- en évoquant l'image mentale de la droite graduée :

$$\frac{12}{13} \text{ c'est } 1 - \frac{1}{13} ; \text{ donc } 2 + \frac{12}{13} \text{ c'est aussi } 3 - \frac{1}{13} ; \text{ donc } \frac{39}{13} - \frac{1}{13} \text{ soit } \frac{38}{13}$$

Enfin les procédures peuvent utiliser des relations arithmétiques déjà mémorisées entre les nombres. Ainsi, pour multiplier 16 par 1,25 par exemple, on peut procéder de diverses façons :

- $16 + 16 \div 4$ (0,25, c'est un quart) ;
- $2 \times 8 \times 125 \div 100$ ($8 \times 125 = 1000$, résultat mémorisé) ;
- $160 \div 8$ (1,25, c'est $10 \div 8$) ;
- $3 \times 2 \times 1,25 + 10 \times 1,25$;
- etc.

Le calcul automatisé demande peu d'effort car il s'appuie sur des résultats complètement mémorisés et disponibles instantanément. En revanche, du fait de l'enchaînement des procédures, le calcul réfléchi peut rapidement conduire à une saturation de la « mémoire de travail » qui ne peut contenir qu'un nombre limité d'informations. Pour soulager cette mémoire, il est donc utile d'automatiser certaines techniques.

En permettant à des élèves de réussir un calcul par des procédures personnelles avant de s'approprier une procédure automatisée, le calcul réfléchi est un moyen de gérer l'hétérogénéité. Au lieu d'enseigner des « recettes », le professeur peut s'appuyer sur la diversité des procédures dans la classe pour permettre à chacun d'enrichir les siennes. Le débat autour des procédures permet de travailler le raisonnement, de construire du sens à propos des propriétés utilisées et de développer les connaissances arithmétiques. L'entraînement qui suit permet aux élèves de quitter une procédure pour en essayer une autre qu'ils jugent plus pertinente et à leur portée.

Selon le moment de l'apprentissage ou selon l'individu, le résultat d'un même calcul peut relever d'un calcul réfléchi ou automatisé. Ces deux formes de calculs évoluent, cohabitent. Le calcul réfléchi se nourrit du calcul automatisé et sa pratique fait qu'on mémorise, par souci d'économie, toujours plus de résultats : on devient ainsi de plus en plus performant en calcul mental.

Calcul mental et apprentissage

Dans les apprentissages mathématiques, le calcul mental peut occuper une place importante dans la compréhension et la maîtrise des notions enseignées. Le travail peut être organisé selon plusieurs axes.

Le calcul mental et les résultats mémorisés

À l'entrée au collège, les élèves ne disposent pas tous des mêmes résultats directement mobilisables pour effectuer des calculs : certains ont une bonne maîtrise des tables de multiplication alors que d'autres ont encore des difficultés à se les rappeler sans erreur. Si un simple entretien de ces connaissances est nécessaire pour les premiers, pour les seconds une reconstruction des résultats multiplicatifs est parfois à entreprendre.

Cette maîtrise des tables de multiplication doit constituer pour nous un objectif prioritaire tout au long des années passées au collège, mais il est intéressant également que d'autres résultats soient obtenus rapidement :

- calculer 13×14 en utilisant la procédure $13^2 + 13$ montre l'avantage de connaître les carrés ;
- la simplification de la fraction $\frac{72}{60}$ est plus aisée si l'on connaît la table de 12 ; il en est de même avec $\frac{75}{60}$ et la table de 15 ;
- la connaissance de résultats comme $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ peut faciliter la multiplication par 0,25.

Le calcul sur les nombres relatifs, les fractions, les puissances ou le calcul algébrique et, plus généralement, les activités dans le domaine numérique sollicitent largement l'utilisation de résultats mémorisés.

Au collège, ce sont essentiellement des résultats déjà travaillés à l'école primaire qu'il faut entraîner, voire reconstruire si nécessaire. Le but est de renforcer leur mémorisation et de les rendre facilement mobilisables dans des exer-

cices comme des simplifications de fractions ou des transformations d'écritures numériques ou algébriques.

Si le travail de vérification des connaissances est classiquement fait en classe à travers des exercices rituels écrits ou oraux, le travail de mémorisation se limite trop souvent à un entraînement laissé à la responsabilité de l'élève, avec l'aide – ou non – de sa famille.

Il nous semble donc important, non seulement de vérifier et d'entraîner ce qui doit être su, mais aussi de concevoir et conduire des activités qui permettent une « bonne » mémorisation des résultats pour tous les élèves.

En effet, tous ne procèdent pas de la même façon. Par exemple, pour retrouver 7×8 , certains élèves partent d'un résultat connu comme $7 \times 5 = 35$ et ajoutent 7, puis 7, puis 7, alors que d'autres retiennent 56 sans chercher à comprendre comment est construit le résultat. Les premiers ont compris et retenu une procédure qui permet de reconstruire le résultat et n'éprouvent pas le besoin de le retenir : ils utilisent plutôt leur *mémoire procédurale* (savoir retrouver grâce à une procédure). Les seconds préfèrent apprendre par cœur (c'est parfois se donner une chance de comprendre plus tard) : ils développent ainsi leur *mémoire déclarative* (savoir par cœur : vocabulaire, tables, etc.).

L'intérêt de mobiliser le résultat d'un calcul va grandir si la fréquence d'utilisation augmente. Plus un savoir est utilisé et plus il a de chance d'être mémorisé car on en tire un bénéfice évident au niveau de la mémoire de travail. Ainsi, de nombreuses séances de calcul sollicitent la mémoire et incitent à la mémorisation des résultats.

Pour conduire un travail de mémorisation, mieux vaut s'appuyer sur quelques idées fortes :

- On mémorise mieux :
 - à travers l'action ;
 - ce que l'on a compris ;
 - ce qui répond à une question qu'on se pose ;
 - s'il y a un enjeu à mémoriser.
- Pour mémoriser, on peut utiliser tous ses sens.
- La verbalisation pour soi et pour les autres aide à la mémorisation.

Pour l'essentiel, la pratique du calcul réfléchi répond à ces fonctions, à condition de veiller à favoriser les échanges et à structurer les résultats à automatiser, en les affichant par exemple pendant la durée de l'apprentissage.

Disposer de résultats mémorisés permet de libérer de la mémoire de travail et d'améliorer les performances en calcul. Mais la conduite d'un calcul néces-

site également l'utilisation de propriétés et de procédures de référence. Certaines d'entre elles sont mises en œuvre inconsciemment et instantanément : on peut dire alors qu'elles sont *automatisées*.

Le calcul mental et les procédures automatisées

Pour calculer mentalement, l'expert mobilise de façon automatique ses connaissances sur la numération, sur les techniques de calcul telles que celles du produit par des puissances de 10, ou par 0,5, etc. Il fait également appel aux propriétés des opérations : commutativité, associativité, distributivité. Elles sont efficaces, d'une part dans la construction des résultats à mémoriser, d'autre part dans tout calcul réfléchi. Par exemple, pour reconstruire 6×7 certains élèves retiennent 3×7 et doublent 21, tandis que d'autres font $5 \times 7 + 7$ ou $7 \times 7 - 7$.

Au collège, procédures de calcul et propriétés sont des objets d'enseignement. Le calcul réfléchi est une bonne occasion de faire fonctionner, en acte, les propriétés des opérations. Les échanges et débats argumentés qui lui font suite permettent de mettre en évidence certaines procédures, d'en assurer une première compréhension et de constater leur efficacité.

Le calcul mental et l'oral

Les activités orales permettent à l'élève de mettre en œuvre des procédures qu'il ne saurait pas forcément formaliser à l'écrit.

Prenons l'exemple de la recherche de problèmes du type : *Un soir, le thermomètre indique 3°C. Le matin suivant, il indique -6°C. De combien de degrés la température est-elle descendue ?* De nombreux élèves utilisent l'image mentale de la droite graduée et additionnent des distances à zéro. Leur réponse orale est juste, même s'ils ne savent pas forcément relier ce calcul à l'écriture : $3 - (-6)$. L'expression de ces procédures personnelles peut être un préalable à l'utilisation de l'écriture symbolique et constituer plus tard une aide à sa compréhension.

Le calcul mental est une activité qui n'utilise pas nécessairement l'oral seul : il est parfois utile d'autoriser l'écriture de résultats intermédiaires (par exemple lors d'un calcul un peu complexe) ou d'écrire l'énoncé d'un calcul (par exemple $\sqrt{144 + 25}$). Cependant, le fait de donner des consignes orales ou écrites peut modifier l'éventail des procédures mises en œuvre par les élèves. Ainsi, le résultat de l'opération « $173 - 46$ » a de bonnes chances d'être obtenu par l'algorithme de soustraction si l'énoncé est écrit. Si l'énoncé est donné oralement, les

élèves utilisent des procédures plus personnelles, par exemple : $4 + 23 + 100$ (somme des compléments, de 46 à 50, de 50 à 73, de 73 à 173).

La verbalisation de ces procédures aide à la prise de conscience de la spécificité du calcul oral et à l'appropriation des techniques correspondantes.

Certains calculs mathématiques comme $3x$ plus $7x$, ou 2 neuvièmes plus 5 neuvièmes, sont plus facilement réussis si on les propose oralement plutôt qu'écrits. On réduit le nombre de réponses du genre $10x^2$ ou 7 dix-huitièmes par exemple. La confrontation de résultats oraux et écrits peut être l'occasion de réfléchir sur ces erreurs et d'y remédier.

Dans la gestion de la classe, une place plus importante faite à l'oral (présentation des énoncés, verbalisation des conjectures, des procédures, des arguments) a l'avantage, d'une part de faire gagner du temps (on peut proposer beaucoup d'exercices en un minimum de temps et vérifier que tous les élèves ont cherché), d'autre part de permettre à certains élèves de s'affranchir des difficultés du passage à l'écrit.

Le calcul mental et les formules

Le calcul littéral est travaillé tout au long du collège. Pour un grand nombre d'élèves, il est difficile de donner du sens à une formule et de considérer les lettres comme des variables. La mémorisation des formules de calculs de grandeurs est souvent peu satisfaisante et les échecs lors de la résolution de « problèmes-réciproques » sont fréquents.

Les formules apparaissent au collège avec les calculs de mesures de grandeurs. Par exemple, dans le cas du disque, les formules $P = 2\pi R = \pi D$ et $A = \pi \times R \times R = \pi R^2$ qui permettent de calculer le périmètre et l'aire sont à mémoriser sous une forme ou une autre. La tâche est difficile car toutes les lettres n'ont pas le même statut. Certaines sont des variables et π est une constante que l'on approche par des valeurs variées (3 ; 3,1 ; 3,14...). Le calcul mental réfléchi fournit alors une aide précieuse : d'une part il sollicite une attention particulière favorisant une bonne mémorisation, d'autre part il autorise un grand nombre d'exercices et permet de jouer à la fois sur les questions et sur les données. On peut ainsi travailler :

- sur les opérations inverses (double/moitié ; multiplication/division ; carré/racine carrée) en calculant par exemple :
 - le périmètre d'un disque de 16 cm de rayon ;
 - l'aire d'un disque de 16 cm de diamètre ;
 - le rayon d'un disque dont le périmètre est 16π cm ;

- le diamètre d'un disque dont l'aire est $16\pi \text{ cm}^2$.
- sur la notion de valeur approchée, en calculant par exemple :
- le périmètre au dixième près d'un disque de 6 cm de diamètre ;
- un ordre de grandeur de l'aire d'un disque de 6 m de rayon.

Dans ces activités, le calcul mental n'est pas étudié pour lui-même, il est un outil de résolution. Dans les programmes, la résolution de problèmes est essentielle, elle peut s'articuler avec la pratique du calcul mental.

Le calcul mental et les problèmes

Le calcul mental d'une expression numérique un peu complexe telle que 16×26 peut s'apparenter à la résolution d'un problème de recherche : il est possible de repérer certaines relations arithmétiques des nombres ($16 = 4 \times 4$; $26 = 25 + 1$), d'utiliser en acte les propriétés des opérations (associativité, commutativité, distributivité), de faire appel à des résultats mémorisés ($4 \times 25 = 100$), tout cela pour imaginer une procédure possible ($4 \times (4 \times 25 + 4)$) et la mettre en œuvre ($4 \times 104 = 416$). Lors de telles séances de calcul mental réfléchi, l'élève a l'occasion d'élaborer des procédures originales, éventuellement différentes de celles de ses camarades. Cette pratique peut l'aider à prendre confiance en ses possibilités et contribuer à l'entraînement de ses capacités de raisonnement.

D'autres activités permettent de placer les élèves en situation d'émettre des conjectures et de les tester. Par exemple, dès la sixième, on peut demander de trouver la règle qui permet de fabriquer un nombre à partir d'un autre ($1 \rightarrow 2$; $2 \rightarrow 8$; $3 \rightarrow 18$; $4 \rightarrow 32$; etc.) avant de l'utiliser pour trouver d'autres nombres ($8 \rightarrow \dots$; $20 \rightarrow \dots$; $\dots \rightarrow 200$; $\dots \rightarrow 50$; etc.).

En ce qui concerne les problèmes concrets, la résolution mentale de petits problèmes-types suivie d'échanges argumentés peut aider à travailler sur le sens des opérations et à constituer une culture du problème. En effet, pour résoudre ces problèmes, l'élève élabore une stratégie et choisit des procédures en fonction de son vécu social et scolaire. Les performances des élèves dépendent alors en partie des problèmes de référence qu'ils ont mémorisés. Or les séances de calcul mental permettent de créer les conditions d'une bonne mémorisation. Ainsi, par exemple, des échanges autour d'un exercice recherché mentalement comme *Léa dispose de 3 jupes et de 2 tee-shirts, combien de tenues différentes peut-elle constituer ?* peuvent ancrer chez un élève de sixième une situation de référence qui lui permettra d'associer plus tard des problèmes du même type au domaine multiplicatif.

Par ailleurs, face à un problème, l'élève qui maîtrise bien le calcul mental peut revenir à un champ numérique dans lequel les opérations sont plus accessibles, suggérant l'idée du bon traitement ou permettant de se prononcer sur la validité d'une stratégie déjà amorcée. Il a aussi la possibilité d'essayer rapidement différentes stratégies, utilisant si nécessaire des valeurs approchées. Il dispose ainsi d'un bon outil de recherche et de contrôle (vérification, validation). Par exemple, dans le problème *2,5 kg de viande coûtent 18 €, quel est le prix d'un kg ?* il peut déterminer, en approchant 2,5 à l'unité par 2 ou par 3, que la solution est comprise entre 6 € et 9 € et que la division est une procédure appropriée de résolution.

En géométrie également, des problèmes plus ou moins complexes peuvent être traités mentalement : calcul d'angles, de longueurs, d'aires ou de volumes. Ces calculs peuvent nécessiter l'emploi de formules mais aussi de propriétés : propriétés des angles d'un triangle, théorème de Pythagore, de Thalès, etc.

Les supports proposés pendant les séances (dessins projetés, figures à main levée, texte écrit, etc.) obligent à raisonner avant de mettre en œuvre des procédures de calcul. Les propriétés sont alors utiles et utilisées en acte par les élèves. L'attention nécessaire à la résolution mentale de tels exercices ainsi que leur répétition contribuent à l'élaboration d'images mentales associant propriétés et configurations correspondantes. Dans la mémoire de l'élève se créent ainsi des situations de référence qu'il pourra ensuite évoquer pour résoudre d'autres problèmes.

En classe, la résolution mentale de petits problèmes rencontre un certain succès, probablement parce que la présentation des énoncés associant la dictée du problème et l'écriture des données contourne les difficultés de lecture et engendre plus d'attention de la part des élèves. Des énoncés nécessairement courts permettent aux élèves de se concentrer sur les procédures de résolution. La présentation des problèmes est conçue pour éviter l'écueil de la modélisation : les énoncés d'une même série de problèmes sont par exemple tous présentés dans un même contexte, si possible familier pour l'élève. Par exemple, dans un contexte de distribution de cartes à jouer, un élève pourra résoudre des problèmes multiplicatifs faisant intervenir soit une multiplication soit une division avec des nombres entiers.

Ce succès est aussi dû en partie au fait que la correction suit immédiatement la production des réponses. Il y a un véritable enjeu à savoir si « c'est juste » ou si « c'est faux » et pourquoi. En ce qui concerne le calcul réfléchi, les mises en commun permettent très rapidement à chacun de vérifier son résultat, de prendre conscience de ses erreurs, de découvrir la puissance et l'originalité

de la procédure des autres. Pour certains, cette recherche d'originalité dans la solution devient un but en soi.

Ces séances favorisent souvent la réussite de certains élèves en difficulté parce qu'ils peuvent résoudre des problèmes en s'affranchissant d'une production écrite justifiant la solution. Le recours possible à des procédures personnelles permet à d'autres d'oser et de réussir.

Le calcul mental et les nombres

L'ensemble de toutes les connaissances et des relations entre les nombres constitue le socle d'une culture du nombre indispensable à l'activité mathématique. Le choix des variables numériques en calcul mental revêt une importance particulière :

- pour atteindre un objectif spécifique : par exemple dans le problème *Je peux couvrir 7 m^2 avec 3 pots de peinture, combien (en m^2), dans les mêmes conditions, puis-je peindre avec 36 pots ?* le choix du nombre 36 vise à faire apparaître des procédures liées à la linéarité dans une situation de proportionnalité, le passage à l'unité étant rendu difficile par le choix des nombres 7 et 3 ;
- pour poursuivre le travail de mémorisation des relations additives ou multiplicatives qui existent entre certains nombres repères : par exemple entre 60 et ses diviseurs ou entre 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1.

Afin de faciliter la mémorisation de ces nombres et de ces relations, il est bon de les proposer très souvent et dans les problèmes et dans les calculs réfléchis. Pour les enseignants, le réinvestissement des résultats que la classe a jugés intéressants dans d'autres activités doit être en effet un souci constant.

Le calcul mental et les ordres de grandeurs

De nos jours, l'utilisation des machines (calculatrices, ordinateurs, caisses enregistreuses, balances électroniques, etc.) est généralisée. De ce fait le calcul mental prend une importance primordiale pour *vérifier* les résultats donnés par ces « boîtes noires ».

Au collège, le nécessaire travail autour du contrôle de résultats nécessite un apprentissage spécifique et ne peut se limiter à des exercices d'entraînement. Il n'est pas rare en effet de voir des élèves chercher un ordre de grandeur du type « $3,4 \times 125$ » en tentant d'abord de calculer mentalement le produit exact, puis en l'arrondissant.

Cet apprentissage peut s'organiser en valorisant parmi les procédures des élèves celles qui permettent de déterminer le bon résultat de la façon la plus économique, par exemple grâce à des exercices du type : *Parmi les nombres suivants, 2 ; 30 ; 300 ; 2000, quel est le quotient de 27 675 444 par 92 251,48 ?*

Quelles compétences développer au collège ?

La réflexion conduite par les auteurs des textes officiels pour l'école primaire¹ mène à se poser des questions à propos des compétences qui pourraient être développées tout au long des années que les élèves passent au collège. Ce chapitre vise à fournir une base de travail, un repère pour les enseignants de collège.

Parallèlement, ce travail de réflexion a été mené également par les auteurs du document « Le calcul numérique au collège. Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège² », auteurs qui ont dégagé « des éléments d'aide à une programmation en calcul mental en collège », lesquels sont présentés à la fin de ce chapitre.

Nous tenons à faire ici deux remarques préliminaires importantes :

- le document proposé ici n'a pas la prétention d'être complet ;*
- il n'engage que ses auteurs et ne constitue pas le programme de calcul mental pour le collège.*

Nos objectifs pour la classe de sixième

Le calcul est au service de la résolution de problèmes.

Dans des contextes nouveaux et avec de nouveaux problèmes, la classe de sixième fournit de nombreuses occasions de faire du calcul mental qui enrichissent et entraînent les compétences déjà travaillées à l'école primaire.

Donnons quelques exemples :

- faire prendre conscience du rôle des valeurs approchées et des valeurs exactes :
 - pour prendre des arrondis à l'unité, au dixième ;
 - pour communiquer le résultat d'une division ;
 - dans les problèmes de calcul de périmètre du disque.

1. Les programmes pour l'école primaire sont téléchargeables sur Eduscol.

2. « Le calcul numérique au collège. Ressource pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège », Ministère de l'Éducation nationale, 2007.

- initier aux équations :
 - par la résolution d'opérations à trous ;
 - dans des problèmes additifs ou multiplicatifs.

Remarque : un exercice de calcul mental fait travailler plusieurs compétences simultanément ; il s'agit de considérer ces compétences comme un ensemble complexe et imbriqué ; ainsi, à chaque compétence ne correspond pas un exercice.

Domaine additif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Calculer avec des nombres en écriture fractionnaire des sommes, des différences ou compléments du type : $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$; $\frac{9}{5} - \frac{6}{5}$; combien pour aller de $\frac{3}{5}$ à $\frac{9}{5}$?	Le recours à l'oral facilite le calcul : 3 cinquièmes + 6 cinquièmes peut être compris comme trois parts identiques auxquelles on ajoute 6 autres parts. L'écriture $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$ induit davantage l'interprétation erronée suivante : 3 parts sur 5 parts et 6 parts sur 5 parts font 9 parts sur 10 parts.
	Connaître certaines relations additives entre des fractions inférieures à 1.	Il s'agit par exemple de savoir que $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ ou que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
	Calculer les compléments à l'unité supérieure de nombres décimaux ayant deux chiffres multiples de 25 comme partie décimale.	Des résultats comme $2,75 + 0,25 = 3$ doivent être produits très rapidement en fin de sixième.
CALCUL RÉFLÉCHI	Calculer des sommes et des différences de nombres entiers ou décimaux de 2 à 3 chiffres.	En début de sixième, les élèves devraient pouvoir effectuer très rapidement des sommes comme $14 + 3,7$; $2,6 + 0,4$; $3,7 + 0,6$.
		Les calculs du même type relatifs à la soustraction (comme $4,3 - 0,6$) doivent encore être travaillés en début de collège.

		COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)			Pour les décimaux les calculs doivent rester simples et permettre aux élèves de se concentrer sur la compréhension de la valeur des chiffres en fonction de leur position. <i>Exemple</i> $5,3 + 2,8$ calculé mentalement nécessite d'interpréter chaque nombre à l'aide d'une écriture fractionnaire. Certains les considèrent comme 5 unités 3 dixièmes et 2 unités 8 dixièmes, ce qui fait au total 7 unités et 11 dixièmes, donc 7 unités et une unité et un dixième, donc 8,1. D'autres préfèrent les interpréter comme 53 dixièmes et 28 dixièmes donc 81 dixièmes qu'ils décomposent ensuite en 8 unités et un dixième.
		Ajouter ou retrancher à un entier une fraction inférieure à 1.	Ce travail, qui a déjà été amorcé en cycle 3 à l'école primaire, a pour objectif de permettre la compréhension de l'écriture fractionnaire des nombres supérieurs à 1, et, plus particulièrement, d'aider les élèves à comprendre l'écriture décimale du type : $1,32 = 1 + \frac{32}{100} = \frac{132}{100}$
		Calculer des sommes de plusieurs décimaux en regroupant les termes qui vont bien ensemble.	Par exemple $2,3 + 5 + 0,7 = (2,3 + 0,7) + 5$. Cette compétence doit être régulièrement entraînée.

Domaine multiplicatif

		COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ		Connaître et utiliser des relations entre des nombres repères tels que 10 ; 12 ; 15 ; 25 et leurs premiers multiples.	Ces relations sont liées à l'utilisation des expressions « moitié », « double », « quart », « quadruple », « tiers », « triple ». L'objectif est que les élèves mémorisent le fait que 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75... En fin de sixième on pourrait exiger la connaissance des doubles des entiers jusqu'à 20 et mémoriser par exemple que : $60 = 6 \times 10 = 5 \times 12 = 4 \times 15 = 2 \times 30.$

CALCUL AUTOMATISÉ (suite)	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
	Reconnaître des entiers parmi des écritures fractionnaires simples.	Des procédures différentes pourront se construire avant d'automatiser la reconnaissance. Par exemple : $\frac{15}{3} = \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3} + \frac{3}{3}$ $= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 ;$ $\frac{15}{3} = 5 \text{ fois } \frac{3}{3} = 5 \text{ fois } 1 = 5 ;$ $\frac{15}{3} = 15 \div 3 = 5 ;$ $\frac{15}{3} = \text{le tiers de } 15 = 5.$
	Reconnaître deux fractions égales.	Dans les cas simples, par exemple : $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} \text{ ou } \frac{1}{5} = \frac{10}{50}$
	Multiplier une fraction par un entier dans des cas simples.	Il s'agit d'automatiser la procédure : $n \times \frac{a}{b} = \frac{n \times a}{b} ; 2 \times \frac{2}{3} \text{ peut être d'abord présenté comme } \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \text{ avant d'être associé à } \frac{2}{3} \text{ de } 2.$ Il arrive parfois qu'il soit « entendu » comme (2 fois 2) tiers.
	Donner une écriture fractionnaire d'un quotient exact.	En fin de sixième, il s'agit de dire que le résultat de l'opération $2 \div 3$ est $\frac{2}{3}$ mais aussi que le nombre qui, multiplié par 3, donne 2 est $\frac{2}{3}$
	Connaître et utiliser la règle : « Le produit d'un nombre par un nombre plus petit que 1 est inférieur à ce nombre. »	Pour beaucoup d'élèves de primaire, toute multiplication a pour effet « d'agrandir ». En sixième il est nécessaire de modifier cette conception en proposant aux élèves des produits par un facteur inférieur à 1. Le recours automatique à la règle est un bon moyen de contrôle, par exemple dans la recherche de l'écriture fractionnaire du nombre par lequel multiplier 7 pour obtenir 5.

CALCUL AUTOMATISÉ (suite)	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
	Multiplier et diviser un décimal par 10 ; 100 ; 1000.	Ce travail permet d'amener les élèves à prendre conscience que multiplier 3,5 par 100 consiste à changer les unités en centaines, les dixièmes en dizaines et les centièmes en unités. La réponse 350 ne correspond pas seulement au résultat de l'application d'une règle. Elle doit être liée à une compréhension enrichissant la connaissance des écritures à virgule.
	Connaître et utiliser les relations entre des nombres repères : $\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$; $\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$; $\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$; $\frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$; $\frac{1}{100} = 0,01 = 1\%$.	
	Connaître et utiliser les relations entre des unités repères : • 1 km = 1000 m ; 1 m = 100 cm = 1000 mm ; 1 cm = 10 mm. • 1 kg = 1000 g ; 1 g = 100 cg = 1000 mg ; 1 cg = 10 mg. • 1 L = 100 cL = 1000 mL ; 1 cL = 10 mL. • $\frac{1}{2}$ h = 0,5 h = 30 min ; $\frac{1}{4}$ h = 0,25 h = 15 min ; $\frac{3}{4}$ h = 0,75 h = 45 min ; $\frac{1}{10}$ h = 6 min. • 1 m² = 100 dm² ; 1 dm² = 100 cm² ; 1 cm² = 100 mm². • 1 m³ = 1000 dm³ ; 1 dm³ = 1000 cm³ ; 1 cm³ = 1000 mm³.	

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI	Calculer des doubles, des moitiés, des tiers, des triples, des quadruples, des quarts et éventuellement des cinquièmes et des quintuples.	Les élèves doivent être capables de trouver des moitiés, des tiers, des quarts de nombres pairs ou impairs, voire de décimaux. Par exemple calculer le tiers de 7,5.
	Calculer des produits de plusieurs entiers en regroupant les facteurs qui vont bien ensemble.	C'est l'associativité de la multiplication qui est utilisée ici. Cette propriété est souvent à construire en classe de sixième : rares sont les problèmes de cycle 3 utilisant des produits de plus de deux nombres. En sixième, on rencontre de tels produits dans des problèmes de combinatoire, de calculs de volume ou de périmètre du disque ($2\pi R$).
	Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2 ; 5 ; 10.	La reconnaissance des diviseurs d'un entier sera très utile pour simplifier des écritures fractionnaires ou rechercher un facteur commun.
	Multiplier et diviser un nombre entier par 5, par 20, par 50, et, quand l'entier en est un multiple, par 25, par 15.	Pour plusieurs de ces calculs, considérer 5 comme la moitié de 10 ou 50 comme la moitié de 100 par exemple, sans pour autant imposer des règles systématiques de calcul, se révèle souvent intéressant.
	Produire des écritures fractionnaires de nombres entiers, décimaux ou d'autres fractions.	Pour ne pas recourir toujours systématiquement à des questions écrites, on peut poser des questions du type : combien y a-t-il de cinquièmes dans 7 unités ? de dixièmes dans 2,3 ? de sixièmes dans $\frac{2}{3}$?
	Dans des cas simples (un chiffre au dénominateur), encadrer un nombre en écriture fractionnaire par deux entiers consécutifs.	On peut envisager de faire rapidement retrouver des encadrements de fractions dont le numérateur est supérieur à 10 fois le dénominateur.
	Donner mentalement le quotient exact sous forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 dans des cas simples de division d'un nombre entier par un entier.	Lors de problèmes de partage, les élèves peuvent être amenés à exprimer le résultat sous cette forme. Par exemple dans le partage équitable de 24 tartes identiques entre 5 personnes, chacun aura 5 tartes + $\frac{4}{5}$ de tarte.

COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
Calculer le produit d'un entier ou d'un décimal simple par un nombre en écriture fractionnaire.	Le sens de la multiplication abordée ici est nouveau en sixième lors du calcul de $\frac{2}{3} \times 1,5$. L'élève ne peut plus s'appuyer sur l'aspect additif de la multiplication. Il lui faut mettre en place d'autres procédures : en fin de sixième, certains calculeront deux fois le tiers de 1,5, d'autres le tiers de $2 \times 1,5$, d'autres préféreront peut-être ajouter à $\frac{2}{3}$ la moitié de $\frac{2}{3}$, etc.
Calculer mentalement le quotient décimal exact dans des cas simples de division d'un nombre entier par un entier.	Parmi les procédures possibles on peut envisager d'exprimer ce quotient par son écriture fractionnaire et éventuellement d'en déduire son écriture décimale. Par exemple : $9 \div 5 = \frac{9}{5} = \frac{18}{10} = 1,8.$
Calculer le produit d'un décimal par un décimal dont l'écriture ne comporte qu'un seul chiffre différent de 0, par exemple $2,1 \times 0,04$ ou dans des cas particuliers comme $0,4 \times 0,25$.	La multiplication de deux décimaux est une nouveauté en sixième. Elle ne se résume pas à une question de virgule. Pour donner du sens à ce calcul, des procédures liées à la proportionnalité sont souvent proposées par les élèves. Par exemple dans le calcul de $2,1 \times 0,04$, certains vont calculer 2 fois 0,04 et ajouter $\frac{1}{10}$ de 0,04, alors que d'autres préféreront prendre les $\frac{4}{100}$ de 2,1, etc.
Calculer des produits de plusieurs décimaux en regroupant les facteurs qui vont bien ensemble.	Comme pour les entiers, l'associativité de la multiplication est une propriété en acte à mettre en place au collège. Elle pourra être travaillée, avec la commutativité, dans des calculs comme $0,5 \times 13 \times 0,2$.

CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
	Évaluer l'ordre de grandeur d'un produit de décimaux, ou du quotient d'un décimal par un entier, par un calcul approché.	Exemples. • <i>La multiplication :</i> Parmi les nombres suivants, 25 ; 7 ; 3,5 ; 0, quel est le nombre le plus proche de $7,25 \times 0,4$? • <i>La division :</i> Parmi les nombres suivants, 6 ; 0,6 ; 90 ; 0,8, quel est le nombre le plus proche du quotient de 18,5 par 29 ?
	Appliquer un pourcentage.	À l'école élémentaire, ce type de calcul se fait par des procédures personnelles. Par exemple, pour calculer 25% de 350, on peut compter 25 pour 100, 50 pour 200, 75 pour 300 et 12,5 pour 50 donc 87,5. En sixième, il s'agit d'évoluer vers des procédures plus expertes comme le calcul des : $\frac{25}{100}$ de 350 en tant que $\frac{25}{100} \times 350 ; 0,25 \times 350.$ Certaines procédures, comme prendre 25% c'est diviser par 4 ou prendre 10% c'est diviser par 10, pourront être automatisées en fin d'année.
	Changer d'unité dans des problèmes de mesure.	Les exercices de transformation de mesures occupent une place réduite à l'école élémentaire. Les conversions trop lointaines (comme 3 km en mm) sont bannies. En sixième on pourra commencer à proposer des conversions plus complexes comme convertir 3,5 cm³ en cL, ou 2,6 h en min. Pour les conversions de longueur, de masse ou de capacité, il est préférable de s'appuyer sur la signification des préfixes usuels tels que kilo, hecto... Pour les unités d'aire et de volume, les conversions sont à relier à la multiplication et à la division par 100 ou 1000.

Nos objectifs pour la classe de cinquième

Le calcul est au service de la résolution de problèmes.

Dans des contextes nouveaux, avec de nouveaux problèmes, la classe de cinquième fournit de nombreuses occasions de faire du calcul mental en enrichissant et en entraînant les compétences déjà travaillées dans les classes antérieures. Par exemple, on peut :

- mettre en œuvre la proportionnalité pour :
 - résoudre dans des cas simples des problèmes utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs ;
 - calculer et utiliser l'échelle d'un plan, d'une carte ;
 - procéder à des changements d'unités de volume ;
- calculer des aires et des volumes ;
- travailler le raisonnement déductif :
 - en utilisant la propriété de la somme des angles d'un triangle aussi bien dans des problèmes où il faut déterminer la valeur de la mesure d'un angle que dans ceux où il s'agit de savoir si des points sont alignés dans une figure composée de triangles ;
 - en utilisant l'inégalité triangulaire.

Remarque : en classe de cinquième, certaines compétences relèvent à la fois du domaine additif et du domaine multiplicatif. Nous les écrivons en gras.

Domaine additif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Maîtriser le répertoire additif avec des entiers relatifs positifs.	
	Calculer des sommes avec des nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur.	L'utilisation de l'oral peut aider à la compréhension donc à l'automatisation de la procédure. On pourra d'abord proposer aux élèves de calculer 2 tiers + 5 tiers avant $\frac{2}{3} + \frac{5}{3}$
	Calculer des sommes avec des décimaux relatifs positifs simples (avec un chiffre après la virgule).	

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI	Calculer dans des cas simples des sommes ou des différences de deux fractions dont les dénominateurs sont multiples l'un de l'autre.	Ce travail gagne à être d'abord mené en donnant des calculs oralement, sans les écrire. Ainsi les élèves doivent réfléchir sur le sens de la démarche avant de recourir trop rapidement à des techniques.
	Calculer des sommes d'entiers relatifs.	Des représentations, avec un appui sur la droite numérique, permettent de donner du sens à la notion de distance à 0. Elles peuvent servir de supports à l'explicitation des procédures, aider à les comprendre et en favoriser l'appropriation.
	Calculer des différences d'entiers relatifs.	
	Calculer la distance entre deux points repérés par leur abscisse.	
	Calculer des sommes algébriques d'entiers relatifs en regroupant les termes qui vont bien ensemble.	Ce travail peut être mené avec des écritures « allégées » ou non. On pourra l'enrichir avec des écritures décimales ou fractionnaire « raisonnables ».
	Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des sommes ou des différences.	Les élèves sont capables de réussir des calculs complexes pour peu qu'ils soient écrits, mais on se limitera à des calculs raisonnables : en début de cinquième $10 - 2 + 7$ ou $(10 - 4) - (3 + 2)$.
	Résoudre des équations du type $x + b = a$ ou $x - b = a$.	En cours d'année on devra passer de la résolution de $x + 9 = 12$ à celle de $x + 12 = 9$. Avant d'écrire l'équation, on pourra utiliser des formulations du type : « Combien faut-il ajouter à 12 pour trouver 9 ? »
	Utiliser la distributivité pour calculer des sommes ou des différences de produits de deux entiers ayant un facteur commun.	Par exemple, calculer $2 \times 8,5 + 8 \times 8,5$ ou $27 \times 121 - 21 \times 27$. Il est utile de présenter aux élèves d'autres expressions où le recours à la distributivité n'est pas pertinent, comme $45 \times 10 + 45 \times 100$.
	Réduire dans des cas simples des expressions littérales de sommes.	$3x + 2x = 5x$. Là aussi, l'utilisation de la formulation uniquement orale peut aider à la compréhension ou l'automatisation de la procédure. Mais elle ne suffit pas pour donner du sens à l'utilisation des lettres.

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	Calculer le complément à 180, à 90.	Cette compétence est à mettre en œuvre dans le cadre de problèmes de calculs d'angles. Elle n'est pas à travailler pour elle-même.
	Évaluer un ordre de grandeur en utilisant le calcul approché d'une somme ou d'une différence de nombres relatifs.	Par exemple, la somme $(-32 - 3,59 + 51,67)$ est-elle positive ?

Domaine multiplicatif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Multiplier par 0,1 ; 0,01 ; 0,001 des nombres en écriture décimale.	Avant de devenir une technique, la procédure doit être comprise. On pourra s'appuyer sur les écritures fractionnaires de 0,1 ; 0,01 ; 0,001 pour donner du sens.
	Utiliser la connaissance des tables pour déterminer les diviseurs des nombres inférieurs à 40.	Être capable de produire les décompositions. Par exemple : $40 = 4 \times 10 = 8 \times 5 = 2 \times 20$.
	Connaître les carrés des entiers jusqu'à 10 et les cubes des entiers jusqu'à 5.	Ces connaissances sont utiles pour résoudre des problèmes d'aire ou de volume.
CALCUL RÉFLÉCHI	Arrondir à l'entier inférieur ou supérieur un nombre simple donné en écriture fractionnaire.	Il s'agit de s'appuyer sur la connaissance des tables pour déterminer rapidement un arrondi du quotient. Par exemple : $\frac{25}{3} \approx 8$.
	Multiplier et diviser un nombre entier par 0,5 ; 0,25.	On pourra s'appuyer sur les égalités : $0,5 = \frac{1}{2}$; $0,25 = \frac{1}{4}$
	Comparer deux nombres donnés en écriture fractionnaire dans des cas simples.	Différentes procédures sont possibles (calcul du quotient, réduction au même dénominateur, recherche d'un opérateur, etc.). Elles ont chacune leur domaine de validité et aucune ne doit être privilégiée.

		COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLEXI (suite)		Utiliser la connaissance des tables pour déterminer des diviseurs communs à deux nombres inférieurs à 100.	Cette compétence est utile pour simplifier une fraction. La connaissance des critères de divisibilité peut constituer une aide utile. Plus tard, la même compétence sera mobilisée dans certaines factorisations.
		Calculer, dans des cas simples, le quotient d'un décimal par un décimal.	
		Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des expressions numériques comportant des produits.	Il s'agit de mettre en œuvre la priorité de la multiplication sur l'addition dans des calculs du type $3 + 10 \times 5$. Mais on pensera à proposer des calculs de produits tels que $4 \times (3 + 4) \times 5$ qui sollicitent l'associativité de la multiplication.
		Calculer des produits de plusieurs nombres en écriture fractionnaire ou décimale en regroupant les facteurs qui vont bien ensemble.	En particulier dans le cas où une simplification est apparente.
		Utiliser la distributivité pour calculer des produits d'une somme ou d'une différence par un entier.	Par exemple multiplier par 9, par 11 ou encore 99, 101, etc. Il ne s'agit pas d'enseigner une technique mais de montrer que cette procédure peut être avantageuse dans certains cas.
		Réduire des expressions littérales de produits dans des cas simples.	On pourra profiter du travail sur l'aire et le périmètre du disque pour réduire des produits utilisant le symbole π .
		Résoudre des équations du type $ax = b$.	Il s'agit d'entretenir et d'entraîner la connaissance du nombre solution comme étant le quotient de b par a . On pourra par exemple demander aux élèves : « Par quoi multiplier 7 pour obtenir 2 ? »
		Calculer une quatrième proportionnelle dans des cas simples.	L'utilisation du produit en croix ne constitue pas un objectif de la classe de cinquième. On s'appuiera donc sur les solutions personnelles des élèves. Cependant on pourra commencer à travailler dans un cadre purement numérique en proposant des exercices du type : 8 est à 6 ce que 4 est à 3 et ce que 12 est à ... ? Puis ce que 10 est à ... ?

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	Calculer un pourcentage dans des cas simples.	Par exemple calculer des fréquences.
	Procéder à des changements d'unités.	Le but est d'enrichir les connaissances des élèves, en particulier en travaillant le passage de la mesure décimale à la mesure sexagésimale.
	Évaluer un ordre de grandeur en utilisant le calcul approché d'un produit de nombres en écriture fractionnaire ou décimale ou d'un quotient de décimaux.	Il s'agit notamment de contrôler l'effet réducteur de la multiplication par un nombre inférieur à 1. En géométrie l'expression à l'aide de π de la valeur exacte du périmètre ou de l'aire d'un disque peut être prétexte à la recherche de valeurs approchées.

Nos objectifs pour la classe de quatrième

Le calcul est au service de la résolution de problèmes.

Dans des contextes nouveaux et avec de nouveaux problèmes, la classe de quatrième fournit de nombreuses occasions de faire du calcul mental en enrichissant et en entraînant les compétences déjà travaillées dans les classes antérieures. Par exemple, on peut :

- mettre en œuvre la proportionnalité pour :
 - trouver une des dimensions de deux triangles déterminés par deux droites parallèles ;
 - résoudre dans des cas simples des problèmes utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs ;
 - calculer une vitesse moyenne ;
 - procéder à des changements d'unités (km/h en km/min ou m/s) ;
- calculer des effectifs cumulés, une moyenne à partir d'une série statistique ;
- calculer des volumes de cônes et de pyramides en utilisant les connaissances sur les aires ;
- transformer les écritures algébriques et, plus particulièrement, vérifier l'exactitude d'une transformation d'écriture en calculant la valeur de chacune des expressions littérales après avoir attribué aux variables des valeurs numériques simples ;
- utiliser le travail autour du théorème de Pythagore pour :
 - déterminer, dans des cas simples, la longueur de l'un des côtés d'un triangle rectangle lorsque les deux autres longueurs sont données ;

– répondre à la question « le triangle est-il rectangle ? » lorsqu'on fournit les dimensions du triangle.

Remarque : en classe de quatrième, certaines compétences relèvent à la fois du domaine additif et du domaine multiplicatif ; elles sont écrites en gras dans le tableau ci-dessous.

Domaine additif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Calculer une somme d'entiers relatifs simples.	Il s'agit d'entretenir et d'améliorer les performances de la classe de cinquième pour viser l'automatisation. Le calcul de la somme peut être donné de façon explicite, $(+2) + (-5) + (-4)$, ou sous forme allégée $2 - 5 - 4$.
	Réduire des expressions formées de monômes dont la partie littérale est la même.	Plus particulièrement réduire des expressions du type $2x + 3x - 4x$. L'utilisation de l'oral facilite l'automatisation de la procédure : on pourra dicter les calculs avant de les écrire.
CALCUL RÉFLÉCHI	Calculer, dans des cas simples, des sommes ou des différences de deux nombres donnés en écriture fractionnaire.	Par exemple : $\frac{5}{30} + \frac{4}{12}$ Il s'agit à la fois d'automatiser la nécessité d'un passage par la recherche d'un dénominateur commun et d'élaborer des solutions personnelles pour le déterminer (simplification, recherche d'un multiple commun, etc.). Bien que la somme d'un entier et d'une fraction ait déjà été abordée en classe de cinquième, il peut être intéressant de traiter les deux exercices simultanément.
	Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des sommes ou des différences.	Les élèves sont capables de réussir des calculs complexes pour peu qu'ils soient écrits mais on se limitera à des calculs raisonnables : $12 - (7 - 8)$; $2 - 3^2 + 5$; etc.

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	Réduire des expressions littérales de sommes.	Par exemple : $2x^2 - 3 + 5x - 4x^2 + 7$.
	Connaître et utiliser les effets de l'addition sur l'ordre pour résoudre des équations ou des inéquations du type $ax + b = cx + d$ ou $ax + b < cx + d$.	On peut se limiter au domaine additif en donnant à résoudre des équations ou des inéquations du type $x + 3 = 2x$ ou $5x - 7 < 4x + 3$.
	Évaluer un ordre de grandeur en utilisant le calcul approché d'une somme ou d'une différence de rationnels.	On pourra en particulier s'entraîner à déterminer des ordres de grandeurs dans des calculs mobilisant de très grands ou de très petits nombres.

Domaine multiplicatif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Connaître les carrés des entiers jusqu'à 15. Et savoir que 100, 10 000, 1 000 000 sont les carrés de 10, 100 et 1000, et inversement.	
	Connaître et utiliser les diviseurs des nombres inférieurs à 60.	Par exemple si $48 = 6 \times 8$ c'est aussi 2×24 , mais aussi 3×16 ou encore 4×12 .
	Utiliser les règles de signes et la connaissance des tables pour calculer le produit ou le quotient de deux entiers relatifs dans des cas simples.	La connaissance des tables s'enrichit de la connaissance des règles de signes. Elles sont à automatiser en quatrième.
	Produire l'inverse d'une fraction, d'un entier et savoir en particulier que l'inverse de 0,5 est 2 ; l'inverse de 0,25 est 4 ; l'inverse de 0,1 est 10 ; l'inverse de 0,01 est 100 ; l'inverse de 0,2 est 5, etc.	Pour l'inverse d'une fraction il s'agit d'une procédure à automatiser, alors que pour les inverses des décimaux cités il s'agit de résultats à mémoriser.
	Savoir passer de l'écriture décimale à 10^n et réciproquement pour des puissances de 10 d'exposants raisonnables.	$1000 = 10^3$; $0,0001 = 10^{-4}$.

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI	Connaître et utiliser les relations : $10^9 = 1$ milliard $10^6 = 1$ million $10^3 =$ mille $\rightarrow$ kilo $10^2 =$ cent $\rightarrow$ hecto $10^1 =$ dix $\rightarrow$ déca $10^{-1} = 1$ dixième $\rightarrow$ déci $10^{-2} = 1$ centième $\rightarrow$ centi $10^{-3} = 1$ millièème $\rightarrow$ milli $10^{-6} = 1$ millionième $10^{-9} = 1$ milliardième	Il s'agit d'établir des liens entre écrit et oral.
	Réduire des produits de monômes d'exposant inférieur à 3.	Par exemple $2x^2 \times 3x$. Il s'agit de rendre les élèves plus rapides lors d'un développement en leur évitant d'écrire trop de calculs intermédiaires.
	Utiliser la distributivité pour développer des produits ou des doubles produits dans des cas simples.	Par exemple $(a + 2)(a - 3)$. Il s'agit d'automatiser la technique de développement. Veiller cependant à proposer des cas où la propriété ne s'applique pas comme $(a + 2) + (a - 3)$.
	Calculer des produits de plusieurs nombres en écriture fractionnaire ou décimale en regroupant les signes et les facteurs qui vont bien ensemble.	Il s'agit d'une part d'élaborer une stratégie efficace (en utilisant l'associativité et en repérant les simplifications possibles) et d'autre part d'utiliser la règle des signes dans un produit de plus de deux facteurs.
	Effectuer le quotient de deux fractions dans des cas simples.	C'est l'occasion de retravailler la multiplication de deux fractions.
	Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des expressions numériques comportant des produits de nombres en écriture fractionnaire ou décimale.	Il s'agit de mettre en œuvre la priorité de la multiplication sur l'addition dans des calculs du type $\frac{-2}{3} + \frac{1}{6} \times 2$.
	Exprimer sous forme de puissance des produits et des quotients de puissances d'un même nombre ou des puissances de puissances d'un nombre dans des cas simples.	On peut mettre ces formules à profit pour simplifier des expressions comportant des puissances de 10 du type $I = \frac{10^2 \times 10^{-6} \times 10}{10^3}$ ou $J = \frac{12 \times 10^{-6}}{8 \times 10^{-4}}$

CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
	Calculer un produit ou un quotient d'un décimal par une puissance de 10.	On peut s'appuyer sur le lien écrit et oral et proposer d'écrire rapidement en chiffres trois cent mille milliards ou de calculer 3,7 fois un millièrre.
	Exprimer une écriture décimale sous la forme du produit d'un entier par une puissance de 10.	
	Exprimer une écriture décimale en écriture scientifique et réciproquement.	
	Utiliser la distributivité pour développer des produits ou des doubles produits.	Par exemple écrire directement l'expression développée avec produits réduits de $(3a + 2)(4 - a^2)$.
	Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des expressions numériques telles que des puissances (d'un nombre, d'une somme, d'un produit) ou des produits de puissances.	Par exemple le résultat de calculs comme $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; $\frac{-2^2}{3}$; 2×3^2 ; -2×3^2 ; $(-2 \times 3)^2$; $2 + 3^2$; $(2 + 3)^2$.
	Résoudre des équations du type $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$	On peut justifier ainsi l'utilisation du produit en croix dans le calcul d'une quatrième proportionnelle et l'utiliser dans des problèmes simples.
	Connaître et utiliser les effets de la multiplication par un entier positif sur l'ordre pour résoudre des équations ou des inéquations du type : $ax + b = cx + d$ ou $ax + b < cx + d$.	On peut se limiter au domaine multiplicatif en donnant à résoudre des équations ou des inéquations du type : $3x = 2$ ou $\frac{2}{5} < 7x$.
	Calculer une quatrième proportionnelle dans des cas simples.	Le recours au produit en croix est autorisé mais n'est pas systématisé. Les autres procédures sont également acceptées, en particulier celles qui reposent sur l'augmentation ou la diminution d'une fraction du nombre et qui sont rarement institutionnalisées.
	Calculer un nombre avant augmentation ou diminution d'un pourcentage donné.	En établissant des liens entre les différentes procédures possibles, on peut mettre en évidence le coefficient multiplicateur et l'utiliser dans des problèmes comportant des nombres faciles à calculer.

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)	Évaluer un ordre de grandeur en utilisant le calcul approché d'un quotient ou d'un produit de nombres en écriture fractionnaire, ou en utilisant les puissances de 10 ou les connaissances des carrés.	Par exemple on pourra s'entraîner à déterminer des ordres de grandeurs dans des calculs mobilisant de très grands ou de très petits nombres, ou chercher des valeurs approchées à l'unité près d'un côté d'un triangle rectangle à partir de la donnée des deux autres.
	Procéder à des changements d'unités.	On peut s'appuyer sur les connaissances mises en place à propos des puissances pour commencer à installer des procédures telles que $1 \text{ km}^3 = 1 \times 1 \text{ km}^3 = 1 \times (1000 \text{ m})^3 = 1 \times (10^3 \text{ m})^3 = 10^9 \text{ m}^3$. Il s'agit également de travailler sur les grandeurs produits et quotients en donnant par exemple à convertir $2 \text{ m} \cdot \text{min}^{-1}$ en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pour donner du sens, préférer d'abord l'utilisation de l'oral : « Convertir deux mètres par minute en kilomètres par heure. »

Nos objectifs pour la classe de troisième

Le calcul est au service de la résolution de problèmes.

Dans des contextes nouveaux et avec de nouveaux problèmes, la classe de troisième fournit de nombreuses occasions de faire du calcul mental en enrichissant et en entraînant les compétences déjà travaillées dans les classes antérieures. Par exemple, on peut :

- mettre en œuvre la proportionnalité pour :
 - trouver une des dimensions de deux triangles déterminés par deux droites parallèles (en particulier la configuration en papillon du théorème de Thalès) ;
 - répondre à la question « les droites sont-elles parallèles ? », ceci dans la configuration de Thalès ;
 - trouver une des dimensions d'un triangle rectangle à partir de la donnée d'un de ses côtés et du cosinus, du sinus ou de la tangente de l'angle associé, dans des cas très particuliers ;
 - agrandir ou réduire les dimensions, l'aire ou le volume d'un solide ;
 - effectuer des calculs d'images et d'antécédents dans le cadre de l'étude des fonctions ;

- calculer des médianes, des étendues de séries statistiques ;
- calculer des volumes et des aires latérales de sphères ;
- calculer des angles en utilisant les propriétés des angles inscrits ;
- transformer des écritures algébriques ;
- vérifier l'exactitude d'une transformation d'écriture ou tester des solutions d'équations en calculant la valeur de chacune des expressions littérales après avoir attribué aux variables des valeurs numériques ;
- utiliser des connaissances arithmétiques (multiples et diviseurs) pour déterminer un PGCD par des procédures personnelles.

Remarque : en classe de troisième, certaines compétences relèvent à la fois du domaine additif et du domaine multiplicatif ; elles sont écrites en gras.

Domaine additif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Réduire des sommes simples ayant une racine carrée pour facteur commun.	Par exemple : $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 7\sqrt{2}$. Pour les racines carrées, il s'agit de prendre appui sur le travail conduit à propos des expressions littérales simples.
CALCUL RÉFLÉCHI	Réduire des sommes comportant des racines carrées.	Par exemple : $3\sqrt{2} + 5 - 4\sqrt{2}$; $-\sqrt{3} + \sqrt{12}$.
	Évaluer un ordre de grandeur en utilisant le calcul approché d'une somme comportant des racines carrées.	

Domaine multiplicatif

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ	Connaître les nombres premiers compris entre 1 et 30.	Cette connaissance des nombres « qui ne se divisent pas » est utile pour déterminer si une fraction est irréductible ou non.

	COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL AUTOMATISÉ (suite)	Connaître et utiliser la connaissance des tables pour déterminer si des nombres sont premiers entre eux.	En particulier, dans des cas simples (numérateur et dénominateur inférieurs à 60), pour déterminer si des fractions sont irréductibles.
	Connaître et utiliser les identités remarquables dans des cas simples.	Il s'agit d'automatiser les procédures de développement. Veiller cependant à proposer des cas où elles ne s'appliquent pas, par exemple $(a + 2) + (a - 2)$.
	Utiliser la connaissance des tables pour calculer le produit ou le quotient de deux racines carrées.	Par exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ou $\frac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$
	Connaître et utiliser les relations : – augmenter de 100% = multiplier par 2 ; – diminuer de 50% = diviser par 2 ; – ajouter 50% = multiplier par 1,5 ; – diminuer de 25% = multiplier par $\frac{3}{4}$; – augmenter de 25% = multiplier par 1,25.	Il s'agit d'automatiser le fait que l'on peut effectuer une multiplication pour appliquer une augmentation ou une baisse.
	Utiliser la connaissance des tables pour, dans des cas simples, rendre une fraction irréductible ou déterminer le PGCD de deux nombres.	Les élèves produisent des solutions personnelles pour rendre une fraction irréductible. L'utilisation du PGCD n'est pas la seule procédure possible.
	Calculer des produits ou des quotients de plusieurs nombres dont des racines carrées.	Il s'agit d'une part d'élaborer une stratégie efficace (en utilisant l'associativité et en repérant les simplifications possibles) et d'autre part d'utiliser les propriétés des racines carrées.
CALCUL RÉFLÉCHI	Réduire des sommes comportant des racines dans le cas où il est possible de factoriser une même racine carrée .	Il s'agit de « transformer » des racines carrées comme $\sqrt{8}$ et $\sqrt{50}$ avant de réduire. On peut se limiter à des nombres qui sont des doubles, des triples, des multiples de 5 de carrés parfaits simples.
	Connaître et utiliser les règles de priorité pour calculer des expressions numériques comportant des produits de nombres avec des racines carrées.	Il s'agit de mettre en œuvre la priorité de la multiplication sur l'addition dans des calculs du type $\sqrt{3} + \sqrt{3} \times 5$.

		COMPÉTENCES	COMMENTAIRES
CALCUL RÉFLÉCHI (suite)		Utiliser les identités remarquables pour développer des produits.	Par exemple $(3x + \sqrt{5})^2$. Il s'agit d'utiliser, dans des cas un peu plus complexes, les connaissances sur les carrés, les doubles et les identités remarquables, ce qui favorisera leur mémorisation.
		Résoudre une équation écrite sous la forme d'un produit de deux équations simples comportant des nombres relatifs (que la solution soit un nombre positif, négatif ou une fraction).	Il s'agit d'opérer dans des cas simples.
		Résoudre des équations du type $x^2 = a$.	
		Connaître et utiliser les effets de la multiplication par un entier négatif sur l'ordre pour résoudre des inéquations.	
		Calculer une quatrième proportionnelle dans des cas simples.	Le travail engagé dans les classes précédentes se poursuit en classe de troisième. En restant dans des cas simples, on prendra en compte les solutions personnelles des élèves sans systématiser le passage par l'écriture de l'égalité des rapports et le recours au produit en croix. On veillera également à établir des liens entre les procédures utilisées dans différents contextes (géométrie, pourcentages, etc.).
		Procéder à des changements d'unités.	Il s'agit d'étendre le travail entamé en quatrième à des grandeurs produits ou quotients, comme la masse volumique ou la puissance électrique. Par exemple : convertir 2 g par cm^3 en kg par m^3 ou 3 kW.h en kW.min.

Éléments d'aide pour une programmation

Nous donnons ici de larges extraits d'un document élaboré en 2007 par le ministère de l'Éducation nationale : « Le calcul numérique au collège. Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » © Ministère de l'Éducation nationale. Ils constituent de bons points de repère.

Compétences travaillées à l'école élémentaire (cycle 3) à consolider au collège

Addition / Soustraction

Calcul automatisé
Maîtriser le répertoire additif (tables d'addition), compléments, différences et décompositions associées.
Calculer les compléments à la centaine supérieure pour des nombres entiers dont le chiffre des unités est 0 <i>comme par exemple les compléments de 430 à 500, de 2430 à 2500.</i>
Connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou entre multiples de 250 inférieurs à 1000. <i>Il s'agit par exemple de savoir que $75 = 50 + 25$ ou que $1\ 000 - 750 = 250$...</i>
Calculer certaines sommes de deux nombres décimaux (avec un chiffre après la virgule <i>comme par exemple $2,5 + 0,5$ ou $3,7 + 0,6$</i>).
Décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur <i>comme par exemple $37,05 = 37 + 0,05$ ou $37,05 = 37 + \frac{5}{100}$</i>
Calculer les compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule.
Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux. <i>Des résultats comme $2,5 + 2,5 = 5$; $1,5 + 1,5 = 3$; $7,5 + 7,5 = 15$ doivent être produits très rapidement.</i>
Calcul réfléchi
Ajouter ou soustraire des nombres entiers proches de nombres « ronds » tels que 9, 19, 11, 21, 8, 18, 12, 22, 99, 101, 198...
Calculer des sommes et différences de nombres entiers de 2 chiffres (ou dont le calcul peut s'y ramener) comme $48 + 53$; $50 - 13$; $31 - 18$; $450 - 180$; $453 + 28$; $3\ 600 + 1\ 400$; $46\ 000\ 000 - 18\ 000\ 000$...
Calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes « qui vont bien ensemble ». <i>Exemple : le calcul de $43 + 280 + 60 + 57 + 20$ peut être facilité par le « rapprochement » de 43 et 57 et de 280 et 20.</i>
Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples comme $5,7 + 2,4$. <i>Des nombres à un chiffre après la virgule ou du type 7,25 ; 8,15 ; 0,75 peuvent être utilisés avec intérêt.</i> <i>Pour un calcul comme $7,2 - 2,5$, différentes stratégies sont possibles en fin de cycle 3 :</i> – transformer 7,2 en 6 unités et 12 dixièmes pour rendre le calcul possible ; – chercher l'écart entre 2,5 et 7,2 en allant d'abord de 2,5 à 3 ou à 5, puis à 7, puis à 7,2 ; – calculer $72 - 25$, puis diviser le résultat par 10...

Calculer le complément au nombre entier immédiatement supérieur d'un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule.

Évaluer un ordre de grandeur en utilisant un calcul approché : sommes de deux ou plusieurs nombres entiers ou décimaux, différences de deux nombres entiers ou décimaux. *Le placement approché de nombres sur la droite numérique repérée par des « nombres ronds » constitue une aide pour apprécier l'ordre de grandeur des nombres et choisir les arrondis appropriés dans un calcul.*

Multiplication / Division

Calcul automatisé

Maîtriser le répertoire multiplicatif (tables de multiplication) : produits de deux nombres entiers inférieurs à 10, recherche d'un facteur, quotients et décompositions associés. *Il faut souligner que la récitation mécanique des tables constitue un obstacle à la mobilisation rapide d'un résultat quelconque. Connaître $8 \times 6 = 48$, c'est tout autant pouvoir donner rapidement ce résultat que répondre à « Combien de fois 8 dans 48 ? », à « Diviser 48 par 6 », décomposer 48 sous forme de produits de deux nombres inférieurs à dix, savoir que 48 est dans la table de 6 (et celle de 8).*

Utiliser la connaissance des tables pour répondre à des questions du type « Combien de fois 8 dans 50 ? » ou « Diviser 50 par 8 ».

Situer un nombre entier entre deux résultats d'une table de multiplication. *Par exemple, encadrer 29 entre deux multiples de 7.*

Calculer des produits du type 30×4 ; 400×8 ; 20×30 et les quotients correspondants.

Connaître et utiliser les relations entre des nombres « repères », 100, 1000 et 60, et leurs diviseurs. *Ces relations sont liées à l'utilisation des expressions « moitié », « double », « quart », « quadruple », « tiers », « triple ». L'objectif est que les élèves aient mémorisé le fait que 25 est le quart de 100, la moitié de 50, le tiers de 75... Le calcul sur les durées est également aidé par la connaissance des relations entre 60 et les nombres 5, 10, 15, 20, 30.*

Multiplier et diviser par 10, 100... dans l'ensemble des nombres décimaux. *Il est important de profiter de ce travail pour faire prendre conscience aux élèves que multiplier 3,5 par 100 revient à transformer les unités en centaines, les dixièmes en dizaines, les centièmes en unités : la réponse 350 n'est pas seulement le résultat de l'application d'une règle mais doit être liée à une compréhension qui enrichit la connaissance des écritures à virgule.*

Connaître les relations entre certains nombres décimaux, comme 0,25 ; 0,5 ; 0,75 et 1 ou 2,5 ; 5 ; 7,5 et 10.

Calcul réfléchi

Calculer les doubles et moitiés, quadruples (doubles des doubles) et quarts (moitiés des moitiés) des nombres entiers inférieurs à 100 ou de nombres plus grands, lorsque le calcul reste simple.

À la fin du cycle 3, cette compétence est étendue au calcul des moitiés de nombres impairs (la moitié de 19 est 9,5, celle de 73 est 36,5...) et à celui des doubles de nombres comme 7,5 ; 45,5...

Multiplier et diviser un nombre entier par 5, par 20, par 50.

Multiplier un nombre entier par des nombres comme 11, 12, 9, 19, 21, 15, 25...

Il est important d'insister sur la variété des procédures qui peuvent être utilisées et qui, généralement, s'appuient sur une décomposition des nombres.

Décomposer un nombre entier sous forme de produits de deux ou plusieurs facteurs.

Calculer mentalement le quotient et le reste entiers dans des cas simples de division d'un nombre entier par un nombre entier.

Les élèves doivent, par exemple, être capables d'effectuer mentalement la division de 230 par 7, en décomposant 230 en $210 + 20$ ou en $140 + 70 + 14 + 6$.

Évaluer l'ordre de grandeur d'un produit ou d'un quotient (de nombres entiers) par un calcul approché. *Si on souhaite une valeur approchée du résultat de 123×12 , on peut se limiter au calcul de 100×10 qui fournit un ordre de grandeur acceptable (et obtenu rapidement) ou calculer 120×12 si on cherche une meilleure approximation. Le calcul de 100×15 aurait pu concilier les deux impératifs.*

Utiliser la connaissance des tables pour calculer des produits simples d'un nombre décimal par un nombre entier. *Au cycle 3, le travail se limite à des questions du type : $0,8 \times 7$; $0,6 \times 5$... ou du type $1,2 \times 3$ et $1,2 \times 6$ en mettant en évidence les connaissances sur les écritures à virgule nécessaires pour traiter ce type de calculs : $1,2 \times 6$, c'est 6 unités et 12 dixièmes ; or 10 dixièmes, c'est 1 unité ; le résultat est donc 7 unités et 2 dixièmes (7,2).*

Compétences à construire au collège

Classe de 6^e

Calcul automatisé

Connaître les équivalences d'écriture : $0,1 = \frac{1}{10}$; $0,01 = \frac{1}{100}$; $0,001 = \frac{1}{1000}$; $0,5 = \frac{1}{2}$;
 $0,25 = \frac{1}{4}$; $0,75 = \frac{3}{4}$; $1,5 = 1 + \frac{1}{2}$

Connaître les relations entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{100}$ et $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{4}$ (0,25) et $\frac{1}{2}$ (0,5).

Donner ou reconnaître une écriture fractionnaire d'un entier simple.

Écrire une fraction simple sous la forme de la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. Par exemple $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$

Comparer un nombre en écriture fractionnaire à 1.

Comparer deux nombres en écriture fractionnaire de même dénominateur ou de même numérateur.

Multiplier, diviser un nombre entier ou décimal par 10 ; 100 ; 1000...

Multiplier un nombre entier ou décimal par 0,1 ; 0,01 ; 0,001.

Donner la valeur approchée décimale (par excès ou par défaut) d'un décimal à l'unité, au dixième, au centième près.

Reconnaître si un nombre entier est divisible par 2, 3, 4, 5 et 9 en utilisant les critères de divisibilité.

Multiplier et diviser un nombre entier par 5.

Connaître les écritures, décimale et fractionnaire, des pourcentages suivants : 5%, 10%, 25%, 50%, 75%.

Connaître les équivalences de proche en proche entre deux unités pour les mesures de longueur, de masse, de contenance, d'aire et de volume.

Connaître quelques équivalences : 1 m = 100 cm ; 1 km = 1000 m ; 1 m = 1000 mm ; 1 kg = 1000 g...

Connaître les équivalences : $\frac{1}{2}$ h = 0,5 h = 30 min ; $\frac{1}{4}$ h = 0,25 h = 15 min ; $\frac{3}{4}$ h = 0,75 h = 45 min ; $\frac{1}{2}$ L = 50 cL ; $\frac{1}{4}$ L = 25 cL ; $\frac{1}{10}$ L = 10 cL.

Calcul réfléchi

Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires sont celles d'un même nombre. Par exemple $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{12}$; $\frac{2}{7}$ et $\frac{6}{21}$

Multiplier un nombre entier ou décimal simple par un nombre en écriture fractionnaire.

Par exemple : $\frac{3}{4} \times 100$; $\frac{5}{3} \times 90$; $3,5 \times \frac{2}{5}$

Prendre une fraction simple d'une quantité. Par exemple : $\frac{2}{5}$ de 125 g ; $\frac{5}{3}$ de 15 L.

Entretenir et développer les compétences travaillées à l'école primaire et relatives au calcul, exact ou approché, d'une somme, d'une différence de nombres entiers ou décimaux, du produit d'un décimal par un entier, d'un quotient de deux entiers.

Multiplier un nombre par 11, 12, 15.

Repérer une relation arithmétique simple (additive ou multiplicative) entre des nombres, comme par exemple $6,3 = 2,4 + 3,9$ ou 42 est le triple de 14, pour résoudre un problème de proportionnalité.

Appliquer un taux de pourcentage sur des nombres simples. Par exemple 12% de 350 ou 25% de 120.

Plusieurs démarches sont possibles :

– en décomposant 350 en 300 + 50 et en utilisant le fait que 300 est le triple de 100 et 50 la moitié de 100 ;

– en multipliant 350 par 12, en recourant à la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, et en divisant le résultat par 100 ;

– en multipliant 3,5 par 12 et en utilisant pour cela le fait que $3,5 \times 2 = 7$ et que $12 = 2 \times 6$: $3,5 \times 12 = 3,5 \times 2 \times 6 = 7 \times 6$.

Pour 25% de 120, il est intéressant de savoir que 25% c'est un quart.

Utiliser les équivalences entre unités de longueur, de masse, de contenance, d'aire pour effectuer des changements d'unités de mesure.

Passer, dans des cas simples, d'une écriture décimale d'une durée exprimée en h à une écriture fractionnaire également exprimée en h ou à une écriture en min, et inversement.

Par exemple :

$$1,25 \text{ h} = 1 \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h} = 75 \text{ min} ; \frac{1}{10} \text{ h} = 6 \text{ min} ; \frac{1}{12} \text{ h} = 5 \text{ min} ; \frac{5}{6} \text{ h} = 50 \text{ min} ; \frac{1}{3} \text{ h} = 20 \text{ min}.$$

Classe de 5^e

Calcul automatisé

Additionner ou soustraire deux nombres simples en écriture fractionnaire de même dénominateur. L'oral joue un rôle déterminant dans l'automatisation de la procédure : « 3 septièmes + 5 septièmes = 8 septièmes. »

Savoir que $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$; $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Produire ou reconnaître dans des cas simples une écriture fractionnaire d'un même nombre, lui-même en écriture fractionnaire.

Effectuer le produit de deux nombres simples en écriture fractionnaire. Par exemple $\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}$

Comparer deux nombres relatifs.

Effectuer la somme de deux entiers relatifs.

Connaître les équivalences de proche en proche entre deux unités de mesure de volume et l'équivalence $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$.

Calcul réfléchi

Effectuer un calcul du type : $3 + 4 \times 2,5$; $3 \times 4 \times 2,5$; $3 + \frac{2,5}{5}$; $\frac{3}{4 + 5}$

Multiplier un nombre positif par 0,25, par 0,5 en s'appuyant sur les égalités $0,25 = \frac{1}{4}$;
 $0,5 = \frac{1}{2}$

Développer une expression simple où les coefficients sont entiers comme $5(x + 1)$;
 $5(3x + 4)$.

Factoriser une expression simple où les coefficients sont entiers comme $2x + 2y$; $6x + 12$.

Effectuer la somme de deux nombres simples en écriture fractionnaire dont le dénominateur de l'un est multiple de l'autre. Par exemple : $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; $\frac{2}{7} + \frac{3}{14}$

Réduire au même dénominateur deux nombres simples en écriture fractionnaire.

Utiliser les expressions fractionnaires correspondantes pour calculer 10 %, 25 %, 50 % d'une quantité.

Calculer un pourcentage dans des cas où les nombres sont des entiers ou des décimaux simples, et où le rapport entre les nombres est simple.

Effectuer la somme de deux décimaux relatifs simples (avec un chiffre à la partie décimale).

Effectuer la différence de deux nombres relatifs simples.

Calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs.

Calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs ou des décimaux relatifs simples en rapprochant des termes « qui vont bien ensemble » comme par exemple : $8,7 - 5,9 + 2,3 + 1,9 = 8,7 + 2,3 - 5,9 + 1,9 = 11 - 4$.

Utiliser les correspondances entre unités de longueur pour traduire l'information donnée par une échelle sous forme facilement exploitable. Par exemple, pour une échelle $\frac{1}{200000}$, 1 cm représente 2 km, et inversement.

Utiliser les équivalences entre unités de volume pour effectuer des changements d'unités de mesure.

Utiliser l'équivalence $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ et la connaissance des correspondances entre unités de volume d'une part et de contenance d'autre part pour effectuer des changements d'unités de mesure.

Exemple : exprimer en cm^3 une mesure donnée en cL.

Classe de 4^e

Calcul automatisé

Connaître les carrés des nombres entiers jusqu'à 12.

Traduire 1000 en 10^3 ; $\frac{1}{100}$ en 10^{-2} , etc., et inversement.

Utiliser les propriétés relatives aux puissances de 10 dans des calculs simples.

Réduire une expression littérale à une variable. Par exemple $3,5x - 4x + 2x$.

Calculer des sommes algébriques simples où interviennent des entiers relatifs.

Calculer le produit de nombres entiers relatifs simples.

Effectuer le produit de deux nombres simples en écriture fractionnaire où numérateurs et dénominateurs sont des entiers relatifs.

Déterminer l'inverse d'un nombre entier ou en écriture fractionnaire.

Calcul réfléchi

Retrouver le carré de nombres comme 13, 15, 25, 31...

Retrouver les cubes des nombres entiers jusqu'à 5.

Effectuer des calculs du type : -3×2 ; -3^2 ; $(-3)^2$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; $\frac{2^2}{3}$; 2×3^2 ; $(2 \times 3)^2$; $2 + 3^2$; $(2 + 3)^2$; 3^{-2} .

Passer d'une écriture décimale d'un nombre à son écriture scientifique et inversement.

Déterminer une valeur approchée entière d'un quotient de deux nombres décimaux (positifs ou négatifs).

Calculer la valeur prise par une expression littérale à une variable pour des valeurs très simples de cette variable. Par exemple $2x - 3$; $5 - 2x$ ou $2(x + 1)$ pour $x = 0$; $x = 1,5$; $x = 3$.
Les données doivent être écrites.

Réduire une expression littérale à une variable. Par exemple $3,5x - 3 + 2,5x$; $2x^2 - 3x + x^2$; $2x^2 \times 3x$.

Effectuer un calcul simple du type $12 - (7 - 8)$; $2 - 3^2 + 5$; $3 + 7 \times (-2)$; $2 \times (-3) + 3 \times 5$.

Comparer deux nombres en écriture fractionnaire comme $\frac{3}{7}$ et $\frac{10}{21}$; $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{12}$ et $\frac{6}{8}$

Effectuer la somme de deux nombres en écriture fractionnaire de dénominateurs différents dans des cas simples comme $\frac{3}{7}$ et $\frac{10}{21}$; $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{6}$; $\frac{9}{12}$ et $\frac{6}{8}$

Effectuer des calculs du type $\frac{-2}{3} + \frac{1}{6} \times 2$.

Déterminer l'inverse de 0,1 ; 0,001 ; 0,5 ; 0,25 ; 0,2...

Diviser un nombre entier ou décimal par 0,5 ; 0,25.

Donner une écriture fractionnaire d'un quotient de deux nombres en écriture fractionnaire simple.

Par exemple : $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} ; \frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} ; \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}$

Déterminer une quatrième proportionnelle dans des cas simples.

Différentes stratégies sont possibles :

- identifier et utiliser le coefficient multiplicateur existant entre les numérateurs ou les dénominateurs ;
- identifier et utiliser le coefficient multiplicateur entre le numérateur et le dénominateur d'un des quotients ;
- utiliser le produit en croix.

Utiliser les équivalences entre unités de longueur et entre unités de durée d'une part, entre unités de volume et entre unités de masse d'autre part, pour effectuer dans des cas simples des changements d'unités de mesure de vitesse, de densité.

Classe de 3^e

Calcul automatisé

Déterminer le coefficient d'une fonction linéaire connaissant un nombre et son image dans des cas simples comme par exemple (14 ; -42) ; (3 ; 7) ; (2,5 ; 12,5).

Déterminer le pourcentage de l'ancien prix que représente le nouveau prix après une augmentation ou une diminution de a %.

Savoir que :

- augmenter de 100 %, c'est multiplier par 2 ;
- augmenter de 50 %, c'est augmenter de moitié, c'est multiplier par 1,5 ;
- diminuer de 50 %, c'est diminuer de moitié, c'est diviser par 2 ;
- diminuer de 25 %, c'est diminuer d'un quart, c'est multiplier par $\frac{3}{4}$

Décomposer un nombre inférieur à 100 en un produit de plusieurs facteurs, les plus petits possibles.

Réduire des expressions de la forme : $3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$.

Utiliser les tables de multiplication pour transformer l'écriture d'un produit, d'un quotient

de deux racines carrées comme $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ ou $\frac{\sqrt{56}}{\sqrt{8}}$

Calcul réfléchi

Déterminer dans des cas simples l'image ou l'antécédent d'un nombre par une fonction linéaire ou affine.

Décomposer, quand cela est possible et dans des cas simples, un nombre entier sous la forme d'un produit d'un entier par un carré d'un entier. Par exemple $162 = 2 \times 9^2$; $80 = 4^2 \times 5$; $250 = 5^2 \times 10$.

Déterminer si deux entiers inférieurs à 100 sont premiers entre eux.

Rendre irréductible une fraction dont numérateur et dénominateur sont inférieurs à 100.

Écrire dans des cas simples et quand cela est possible une racine carrée sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers.

Réduire des expressions comme $3\sqrt{2} + 5 - 4\sqrt{2} + 5\sqrt{12}$.

Effectuer un calcul simple faisant intervenir les propriétés relatives aux puissances d'un nombre, les exposants étant positifs. Par exemple $2^7 \times 2^5$; $3^4 (-3)^5$; $\frac{7^3}{7^8}$; $(3^2)^4$

Développer dans des cas simples des expressions de la forme $(ax + b)^2$; $(ax - b)^2$; $(ax + b)(ax - b)$; $(x + a)(x + b)$; $(x + a)(x - b)$; $(x - a)(x - b)$ où a et b sont des entiers inférieurs à 5.

Factoriser des expressions de la forme $x^2 + 2ax + a^2$; $x^2 - 2ax + a^2$; $a^2 x^2 - b^2$ où a et b sont des entiers inférieurs à 10.

Comment faire du calcul mental ?

Si le professeur de collège a souvent le sentiment de l'utilité du calcul mental, il n'arrive pas toujours à trouver le temps d'en faire. Généralement l'expression « calcul mental » évoque des moments placés à la fin d'une séance au cours desquels il s'agit d'utiliser une méthode tirée de la leçon qui vient d'être faite, l'objectif étant de donner un peu plus de sens à la notion qui vient d'être abordée. Qui n'a pas proposé le calcul du produit 48×52 à la suite de la leçon sur les identités remarquables ? Mais ces exercices sont presque exclusivement des calculs effectués pour eux-mêmes et ne sont plus réinvestis par la suite. De plus la méthode enseignée ne correspond pas toujours à celle que l'enseignant aurait utilisée si le calcul avait dû être effectué dans un autre contexte.

La pratique régulière du calcul mental nous a conduits à approfondir notre réflexion à propos :

- des objectifs des séances ;*
- de leur fréquence et de leur durée ;*
- de la gestion de la classe et du matériel.*

Les objectifs

Les objectifs mathématiques visés peuvent être de plusieurs ordres :

- reconstruire des résultats et entretenir leur mémorisation (en particulier les tables de multiplication) ;
- assurer une maîtrise, une automatisation et un entretien de certaines techniques (compléments à 100, distributivité, doubles, moitiés, quarts, tiers, triples, multiplication par 25, critères de divisibilité, etc.) ;
- acquérir des techniques nouvelles construites dans le cadre du programme de la classe ;
- travailler la résolution de problèmes numériques (sens et propriétés des opérations, raisonnement, déduction, stratégie, etc.) ;
- développer des moyens de contrôle (ordre de grandeur).

Pour que l'élève automatise certaines procédures en calcul mental, franchisse des étapes nouvelles, acquière une certaine dextérité, remarquons que l'entretien des connaissances déjà acquises et la construction de nouvelles compétences nécessitent une progression structurée et une pratique quasi quotidienne.

Les différents types de séances

Dans le but de solliciter l'attention de la classe, mais aussi d'en tirer profit, il est préférable de pratiquer le calcul mental plutôt en début de cours. En fonction de l'objectif visé, nous consacrons plus ou moins de temps à une séance de calcul mental. C'est pourquoi nous en distinguons trois catégories.

Les séances d'apprentissage

Elles sont de deux types :

- des séances où il s'agit d'introduire de nouveaux résultats à mémoriser ou une nouvelle procédure de calcul mental ; dans ce cas, comme dans toute autre situation d'apprentissage on favorisera la recherche et le débat ; la validation ne se fait pas par la situation elle-même, mais par échanges d'arguments jusqu'à approbation par la classe ; la synthèse doit conduire à privilégier une procédure plutôt qu'une autre ;
- des séances où il s'agit de travailler sur la diversité des procédures ; les échanges se limitent à la présentation des procédures, à la reconnaissance de celles qui permettent d'aboutir, au rejet des autres ; il n'est pas question de valoriser une procédure par rapport à d'autres.

Dans un cas comme dans l'autre, pour favoriser la verbalisation des procédures, ces séances nécessitent du temps : ce sont des *séances longues*. Comme tout apprentissage, elles nécessitent préparation et ne peuvent être improvisées.

Les séances d'entraînement

Les occasions sont nombreuses d'entraîner les élèves soit sur des connaissances antérieures (entretien) soit à propos d'une connaissance récente (réinvestissement de la dernière notion abordée). Ces activités exercent les élèves à la rapidité, la concentration, la mémorisation. Le cas échéant, l'accent peut être mis sur les procédures qui ont conduit à l'erreur.

L'entraînement peut porter sur une technique particulière dans le but de la maîtriser pour qu'elle devienne disponible au même titre que d'autres. Dans ces activités c'est le grand nombre d'essais qui compte.

En complément, la mise en œuvre de séances ludiques utilisant des jeux de société ou des situations de compétition conduit à une certaine émulation. Le fait qu'il y ait un enjeu constitue une aide précieuse à la motivation tout en rendant nécessaire la maîtrise de savoirs performants.

Les séances d'évaluation

Au cours de ces séances, le professeur évalue essentiellement la capacité à produire rapidement un résultat juste indépendamment de la procédure utilisée.

Les séances d'entraînement et d'évaluation sont des *séances courtes*. Le temps consacré à chacune d'elles est restreint (5 à 10 minutes) car elles demandent de la concentration et sollicitent la mémoire.

La gestion de la classe

Les consignes

L'énoncé peut être écrit ou oral :

- si l'énoncé est écrit, on libère en partie la mémoire de travail chez l'élève mais on risque d'induire des techniques opératoires écrites ;
- si l'énoncé est oral, on favorise l'attention, les procédures mentales et les procédures personnelles mais on risque de saturer la mémoire de travail.

Le professeur peut faire varier les consignes de travail pour :

- alléger la mémoire de travail en limitant la mémorisation des nombres ;
- favoriser la concentration des élèves.

Il est important de veiller à ne pas trop stresser les élèves : le travail mental est déjà suffisamment contraignant. Il faut donc éviter d'ajouter des contraintes jugées inutiles, du type : « Réfléchissez » ou « Écrivez à mon signal. » Toujours dans le souci de libérer la mémoire de travail, il est possible d'autoriser parfois les élèves à écrire certains résultats intermédiaires mais pas à poser le calcul.

Tout au long du collège, le programme en calcul (priorités opératoires, multiples, critères de divisibilité, fractions, puissances, proportionnalité, etc.), en algèbre (développement, factorisation, etc.), grandeurs et mesures (calculs sur les angles, calculs d'aire ou de volume, etc.) et géométrie (théorème de Pythagore, théorème de Thalès et leurs réciproques, etc.) fournit de nombreux sujets permettant d'entraîner les élèves à la fois au calcul et à la résolution de problèmes.

Le matériel

L'ardoise est toujours d'actualité. Elle permet de visualiser rapidement les résultats produits par la classe et sert de support aux échanges. Il est intéressant de l'utiliser surtout pour les séances d'apprentissage.

Pour les séances d'entraînement, le travail peut se faire de manière uniquement orale, par exemple dans des jeux de furet où les élèves doivent calculer à partir des résultats d'autres élèves. Il peut se faire également au brouillon ou sur des « fiches-réponses » préparées à l'avance. Celles-ci permettent aux élèves de garder une trace des exercices effectués et de s'entraîner à la maison. Dans ce but, sur ces fiches, un espace pour noter ou pour coller après coup les énoncés doit être prévu.

Il est possible d'utiliser également les TICE :

- le rétroprojecteur permet de faire défiler des énoncés écrits sur transparents ou de présenter des figures à partir desquelles les élèves ont des calculs à effectuer ;
- la projection d'un diaporama à défilement automatique permet de rythmer la séance et autorise l'enseignant à circuler dans la classe : elle est très utile pour les séances d'évaluation.

Le vécu des élèves

Notre expérience montre à l'évidence que, de la sixième à la troisième, les élèves trouvent du plaisir à pratiquer le calcul mental. Il est encourageant de constater que l'intérêt suscité est vif et qu'ils en redemandent. Ils sont séduits par l'aspect défi et le côté ludique. Ils apprécient de ne pas écrire, le rythme des activités et le fait de savoir très vite si « c'est juste ou faux ».

Les exercices pratiqués sont ressentis comme une aide à l'apprentissage. Pendant ces séances, on peut noter chez eux une grande concentration, une demande de silence et la participation de tous. Il n'est pas rare de constater que par le biais du calcul mental, un élève qui travaille peu ou pas à la maison effectue plusieurs exercices en quelques minutes et progresse notablement dans son apprentissage, tout simplement parce qu'il s'est réellement entraîné...

Conséquences sur l'enseignement

Installation d'un rituel

Tout au long de la journée, les élèves passent d'une matière à la suivante. Le déplacement d'une classe à une autre est souvent un moment d'excitation. De plus, se rendre disponible pour une activité intellectuelle nouvelle à chaque heure suppose un grand effort d'attention de leur part. À cet égard, l'installation d'un rituel en début d'heure d'enseignement est un bon moyen de marquer la transition et de mettre les élèves dans une situation mentale propice au travail. Il est permis de considérer que le calcul mental peut jouer ce rôle, sa mise en place étant rapide du fait qu'il nécessite peu de matériel. L'activité de calcul mental étant souvent ludique, le cours débute ainsi par un exercice apprécié des élèves et dans lequel ils s'investissent.

Un support privilégié : l'oral

La pratique du calcul mental proposée ici s'appuie sur les procédures personnelles des élèves. Ainsi, chacun d'entre eux peut entrer dans l'activité de recherche avec ses propres connaissances. L'activité de calcul mental se termine souvent par un débat ou une correction collective orale. Ce temps permet aux élèves de verbaliser leurs procédures et leurs savoirs sans être contraints par les codes de l'écriture mathématique. Il leur faut cependant réfléchir sur leur démarche afin de pouvoir la formuler pour le reste de la classe. Si un bilan ou une méthode à écrire ressort du débat, l'un ou l'autre est alors formulé par les élèves.

A l'oral, le langage employé est spontané mais se veut accessible à tous. En effet, en cas d'incompréhension, la classe réagit rapidement. L'immédiateté des répliques rend la classe vivante et motive les élèves. Ces réactions permettent souvent de faire préciser le discours, de le réajuster. C'est dans ces moments de formulation et sous le contrôle des autres que l'élève prend conscience de sa démarche, découvre ses éventuelles erreurs ou vérifie la qualité de son raisonnement.

Il semble que ces échanges verbaux permettent une appropriation effective des notions mises en jeu. Ils aident ainsi les élèves à les comprendre et à les mémoriser.

Un gain de temps

Il n'est pas toujours facile de gérer les révisions et les rappels, de recueillir les connaissances des élèves sur un thème ou de construire une progression spiralée.

On sait que si une connaissance ou un savoir n'est pas rappelé souvent, il est vite oublié car la mémoire à long terme se réorganise. À cet égard, le calcul mental est intéressant car il permet de rafraîchir la mémoire des élèves et d'entretenir leurs connaissances antérieures à faible coût.

Le calcul mental peut être utilisé aussi pour vérifier les connaissances des élèves sur un thème traité plus tôt dans leur scolarité. Il devient le support d'une évaluation rapide et permet par exemple de vérifier l'état des prérequis avant d'aborder une notion nouvelle. C'est ainsi qu'on peut constater parfois que certains élèves n'ayant pas ressenti l'utilité de nouveaux outils mathématiques utilisent toujours les procédures des classes antérieures : ceci doit être pris en compte pour élaborer la leçon suivante.

C'est pourquoi les séances de calcul mental gagnent souvent à être éloignées du chapitre en cours et à suivre une progression qui leur est propre. Il arrive toutefois qu'elles fassent partie intégrante du chapitre et, dans ce cas, en proposant une situation prétexte à débat (un « vrai-faux » par exemple), elles permettent d'introduire certaines notions (par exemple la division par les puissances de 10 en sixième).

La légèreté du dispositif, la brièveté des consignes, l'attention et la réactivité des élèves pendant ces séances sont autant d'éléments qui permettent d'aller plus vite dans l'apprentissage.

Un nouveau contrat pour la classe

La mise en place de séances de calcul mental est susceptible de modifier le comportement des classes aussi bien dans le déroulement de la recherche que dans l'exploitation des résultats. Un contrat qui détermine les rôles respectifs de l'élève et du professeur doit être établi selon des règles plus ou moins explicites que l'on peut énoncer comme ci-dessous.

Rôle de l'élève

- Être attentif, se taire pendant qu'un autre parle.
- Poser sa voix.
- Écouter une question ou une démarche, et à son tour en formuler une.
- Trouver les arguments pertinents qui valoriseront sa propre démarche.
- Demander des explications aux autres.
- Défendre ses idées.
- Être critique, dire ce qu'on pense même si les autres pensent autrement.
- Assumer seul la responsabilité des solutions et des preuves.

Rôle du professeur

- Faire lever le doigt.
- Permettre aux élèves réservés ou aux élèves en difficulté de participer.
- Recentrer le débat, organiser la réflexion par un questionnement approprié tout en étant discret.
- Gérer le temps.
- Ne pas donner d'indication ou de validation pendant le débat, mais attester de la justesse des éléments dégagés par la classe à la fin de celui-ci.
- Veiller à la qualité du débat (expressions et vocabulaire employés) tout en ne l'étouffant pas.

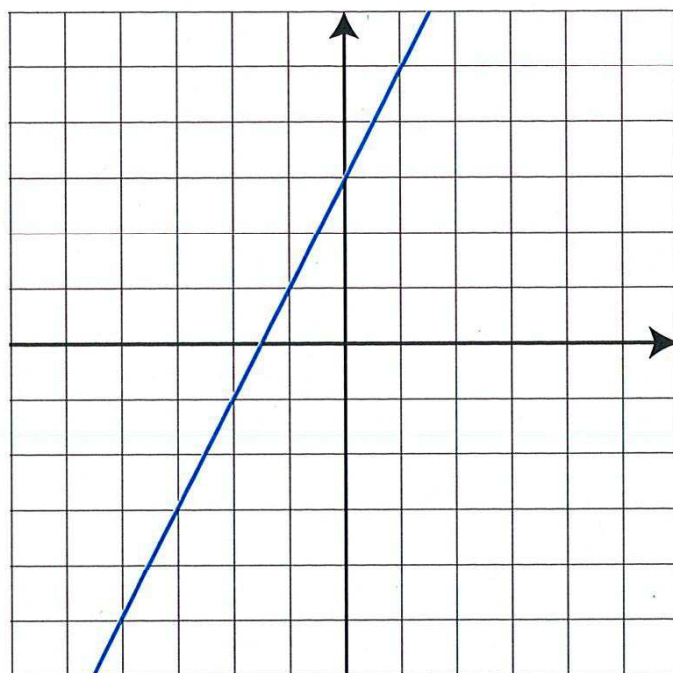
Une modification des pratiques

La pratique du calcul mental influe aussi sur la pratique de l'enseignant dans d'autres domaines dans lesquels on applique le même dispositif : exercice court à résoudre de tête (pour lequel on doit produire uniquement un résultat) puis débat autour des propositions de la classe.

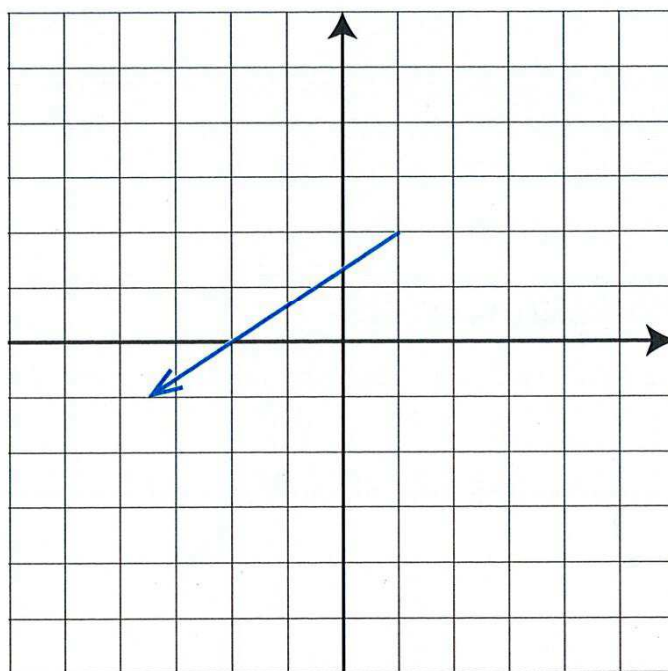
Par exemple, le professeur projette un repère et superpose une droite à l'aide d'un autre transparent (voir page suivante). Les élèves doivent produire la formule de la fonction représentée.

En quelques minutes, en déplaçant la droite il peut proposer une dizaine d'exercices.

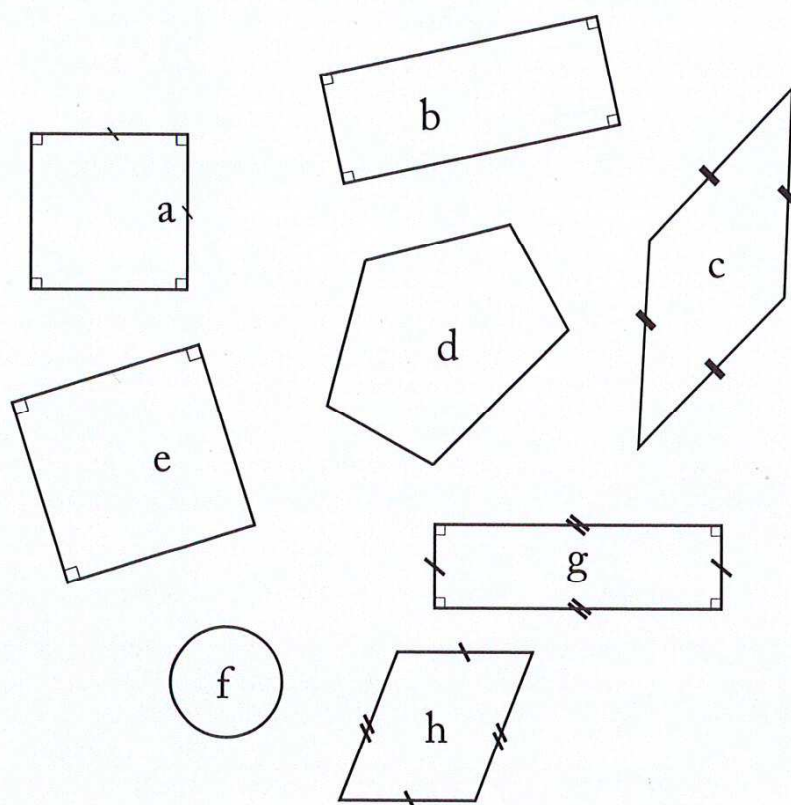
Ici, ce ne sont pas les compétences de calcul qui sont mises en jeu mais les connaissances sur les paramètres des formules des fonctions affines et certaines compétences de lecture de graphique.



Le même dispositif peut être utilisé pour la lecture des coordonnées de vecteurs.



Voici un autre exemple d'exercice qui peut être proposé suivant le même principe : le professeur projette des figures et demande aux élèves de chercher le nombre de quadrilatères, de losanges, de rectangles ou de carrés. Il recueille les propositions avant d'engager le débat.



Pour de jeunes collègues, ce mode de fonctionnement est une entrée facile à mettre en œuvre vers une pratique de classe qui privilégie la mise en commun et les échanges. Il permet d'installer ce type de contrat avec la classe et d'envisager d'autres activités plus difficiles à mettre en place, celles qui nécessitent par exemple plus de temps ou dont l'organisation est différente (travail de groupes, etc.).

Une autre conception de l'expertise

Le calcul mental permet de mettre en mémoire des résultats, des procédures, des situations de référence. Dans notre conception, il vise aussi à enrichir la panoplie d'outils dont l'élève peut disposer pour aborder des problèmes. Car l'expert ne doit pas être celui qui connaît et utilise « la solution experte » comme unique recette pour un type de problème, mais celui qui sait choisir parmi les références qu'il a en mémoire et fournir une solution adaptée au problème posé.

Pour l'expert, la solution doit bien sûr être juste mais, de plus, elle doit être obtenue de façon rapide : par exemple, il effectuera de tête, directement, la transformation de $(2x - 7y)^2$ en $4x^2 + 49y^2 - 28xy$. L'élève qui atteint ce niveau de performance en fin d'apprentissage a non seulement compris, mais il a aussi automatisé la procédure de développement.

Les échanges doivent être encouragés car nous pensons que le processus d'automatisation est aidé par la verbalisation (pour les autres, puis pour soi), qui est elle-même facilitée par les activités. Attention toutefois quand cette automatisation est effective : si elle réduit les étapes, elle peut s'accompagner d'une perte de sens. Par exemple, l'élève sait faire mais n'a plus nécessairement conscience qu'il a calculé $(2x)^2 + (7y)^2 - 2 \times (2x \times 7y)$, ou que, comme dans une chaîne de multiplications, l'ordre et la façon de regrouper les facteurs ne modifient pas le résultat, le double produit pouvant être effectué sous la forme $2 \times (2 \times 7) \times (x \times y)$. Pourtant, pour lui, la rédaction détaillée de la démarche est devenue une perte de temps. Elle est souvent source d'erreurs (comme l'oubli des parenthèses) et vécue comme une contrainte inutile.

Dans le travail à l'oral il est donc nécessaire de distinguer :

- des moments de production d'un résultat ;
- des moments d'explication informelle ou de justification ;
- des moments de formulation d'un discours clair et complet.

Il est important également de mettre en parallèle cette distinction avec celle que l'on peut faire entre différents types d'écrits :

- ceux pour soi (pour chercher)¹ ;
- ceux destinés à un pair (pour convaincre) et ceux destinés aux autres (pour communiquer à la classe ou pour permettre au professeur d'évaluer des connaissances).

Effets sur les élèves

Il n'en reste pas moins que les effets chez les élèves d'une mise en œuvre quotidienne et variée de la conception du calcul mental présentée ici sont réels : intérêt, meilleure attention, capacités de calcul accrues... Ils rejaillissent sur les autres activités et facilitent la pratique mathématique tout entière.

Toutefois, lors du passage à l'écrit certains d'entre eux éprouvent des difficultés à organiser et à présenter les solutions qu'ils savent produire mentalement, d'autres contestent la nécessité même d'une rédaction écrite (si tout un calcul peut se faire mentalement, où est l'utilité d'écrire des détails ?). Ce passage de l'oral à l'écrit, qui relève en partie d'un changement de contrat, reste un point délicat à négocier avec les élèves.

1. Sur ce point, vous pouvez consulter l'ouvrage suivant : *Apprendre en écrivant*, Gérard Diet (dir.), « Guide pour », SCÉRÉN/CRDP de l'académie de Lyon, 2002, 253 pages.

Partie II

Des activités pour la classe

Mémoriser des résultats : les tables de multiplication

Pourquoi mémoriser les tables ?

À l'entrée en sixième, nombreux sont encore les élèves qui ne connaissent pas les tables parfaitement. Pour eux, ce travail de mémorisation est lourd et fastidieux. On peut donc s'interroger sur les raisons qui poussent à leur imposer un tel effort.

Les élèves ont déjà eu besoin de retrouver rapidement des résultats lors de l'apprentissage des tables d'addition en début de primaire. Dans des problèmes additifs ou soustractifs, ils ont eu à produire rapidement des solutions. Au cours de sa scolarité chaque élève a donc déjà pu mettre en œuvre des stratégies différentes – surcomptage, décomptage, utilisation de résultats mémorisés ou reconstruction de résultats – et mesurer leur efficacité. Mémoriser un résultat n'est pas toujours nécessaire. Il est possible parfois de le reconstruire efficacement (pourquoi mémoriser $7 + 8$ quand on sait faire $2 \times 7 + 1$?).

Certains élèves jugent plus économique de mémoriser quelques résultats de base et de reconstruire les autres. Ce principe est tout à fait valide pour les tables d'addition et certains élèves le transfèrent aux tables de multiplication.

Pourtant, s'il est assez simple de reconstruire 8 fois 9 à partir de $8 \times 10 = 80$ ou de $8 \times 8 = 64$, il est plus difficile de reconstruire le résultat inverse : « Combien de fois 9 en 72 ? » Ce type de questions se pose dans tout problème faisant appel à une division. L'appel à un résultat mémorisé (de la forme $72 = 8 \times 9$) s'avère alors performant et justifie la nécessité d'apprendre par cœur.

Avoir à sa disposition des résultats mémorisés permet d'améliorer les performances non seulement dans la résolution de problèmes de division, mais aussi dans d'autres types de problèmes, notamment et en particulier en calcul réfléchi (calcul mental de 7×86 , simplification de 72 quarante-huitièmes).

Quel diagnostic ?

Pour évaluer le niveau de mémorisation, on peut proposer au moins trois types d'exercices.

Type 1			
x	8	9	6
3			
7			
5			

Type 2			
x	6	5	9
		35	
			81
	48		

Type 3			
x			
	36		24
		49	
	45		

• **Type 1** : la connaissance des tables est testée dans le sens classique $7 \times 9 = ?$. La reconstruction des résultats est possible dans un temps « raisonnable ». Les quelques élèves qui ne réussissent pas ce type d'exercice en début de sixième nécessitent un traitement particulier (nouvelle construction des tables, repérage des régularités) qui relève de l'aide individualisée.

• **Type 2** : la connaissance des tables est testée dans le sens inverse $48 = 6 \times ?$. La reconstruction des résultats est possible mais fastidieuse. Disposer de résultats mémorisés permet de répondre plus rapidement. Pour ce type d'exercice les erreurs sont plus fréquentes. Le dispositif de remédiation s'adresse à la classe entière.

• **Type 3** : la connaissance des tables est testée grâce à un exercice complexe. Il faut faire le lien entre les résultats communs à différentes tables pour pouvoir compléter le tableau.

Une fois la stratégie mise à jour, la réussite rapide à ce genre d'exercice témoigne de la capacité à utiliser les résultats mémorisés et donc de leur disponibilité. Il est permis de considérer qu'un élève sait ses tables quand il sait résoudre ce type d'exercice.

Quels dispositifs de remédiation ?

Reconstruction ou construction de tables.

Ce travail s'adresse aux élèves qui ne réussissent pas les exercices du type 1. Pour eux la logique même de construction des tables nous semble nécessaire à remettre en place. (Voir activité 5 page 80.)

Travail sur la mémorisation.

Ce travail est souvent laissé à la charge de l'enfant seul ou de la famille. Pourquoi ne pas le prendre en charge dans les cours, au moins en partie, en s'appuyant sur quelques idées fortes.

- On mémorise mieux :
 - à travers l'action : proposer des activités dans lesquelles il faut aller chercher des résultats rapidement (dans une table référence ou dans sa mémoire) ;
 - ce qu'on a compris : reconstruire les tables si nécessaire ;
 - ce qui répond à une question qu'on se pose : proposer l'apprentissage des tables dans le sens « combien de fois dans ? » ; proposer des moyens de contrôle ; proposer des moyens mnémotechniques ;
 - s'il y a un enjeu à mémoriser : proposer des exercices où disposer de résultats immédiats est une procédure économique ;
- Pour mémoriser, on peut utiliser tous ses sens ; il ne faut donc pas enlever trop tôt les supports visuels ;
- La verbalisation pour soi et pour les autres aide à la mémorisation : il faut donc favoriser les échanges dans la classe (débat, jeux, etc.).

Dans ce but, il est possible de proposer plusieurs types d'activités. Pour entretenir les connaissances et les utiliser tout au long du collège, il est intéressant de réutiliser ou d'adapter les exercices proposés en alternant simple restitution de résultats, adaptation à de nouveaux nombres ou de nouveaux contextes, calcul réfléchi. (Voir activités pages 76 à 79.)

Divers jeux et concours sont également proposés pour allier utilement entraînement et motivation. (Voir pages 81 à 85.)

Activité 1. Les tables dans tous les sens

Objectif

Faire utiliser les tables dans les deux sens. Montrer la nécessité de mémoriser des résultats.

A	6×8	F	7 dans 56
B	5×9	G	4 dans 24
C	8×3	H	8 dans 40
D	8×7	I	9 dans 27
E	9×4	J	6 dans 54

Matériel

Les élèves répondent par écrit sur une « feuille-réponse » vierge.

Description

Les cinq premières questions sont posées oralement. 6×8 est lu « 6 fois 8 ». Une première mise en commun suit. Pour chaque calcul le professeur note les différents résultats proposés au tableau.

Les cinq questions suivantes sont posées oralement. 7 dans 56 est lu « combien de fois 7 dans 56 ? ». Une deuxième mise en commun précède la synthèse.

Analyse

Les mises en commun portent :

- sur la validité du résultat : parmi les résultats proposés pour 6×8 , comment détermine-t-on ceux qui sont faux ? L'échange porte sur les moyens de contrôle que le professeur note au fur et à mesure au tableau ;
- sur les procédures qui permettent d'arriver au résultat : éventuelle reconstruction à partir de résultats mémorisés pour la première série, utilisation d'un résultat bien mémorisé, recours éventuel à un moyen mnémotechnique.

La synthèse reprend les moyens de contrôle ou mnémotechniques dégagés pendant le débat.

Par exemple :

- des règles pour contrôler que :
 - 8 fois un nombre font moins que 10 fois ce nombre ;
 - dans la table de 5, les nombres se terminent par 0 ou 5 ;
 - dans la table de 2, de 4, de 6 et de 8 il n'y a que des nombres pairs ;
 - seul le produit de deux nombres impairs donne un nombre impair ;
- des moyens pour se souvenir :
 - 1 fois 9 = 1 œuf ; 2 fois 9 = dix huitres ; 3 fois 9 = vin de Sète ;
 - 5, 6, 7, 8 ... 56 = 7 fois 8 ...

Les règles sont reprises et enrichies tout au long de l'année.

Prolongement

- Le même type d'exercice est repris en cours d'année dans des séances d'entraînement. D'autres types de questions viennent enrichir l'activité : « $54 \div 9$? » ; « Combien de fois 7 dans 52 ? » (on recherche le quotient entier) ; « Par quoi multiplier 5 pour obtenir 45 ? » ; « Dans quelle(s) table(s) est 36 ? » ; « Donner toutes les multiplications dont le résultat est 32 ? », etc.
- Ces questions sont reprises dans des contextes différents : « Combien de rangées ayant toutes le même nombre de chaises peut-on faire avec 30 chaises ? » ; « Agnès, qui a 36 ans, est combien de fois plus âgée que sa fille qui a 9 ans ? » Ou à l'occasion de la rencontre d'autres nombres : « Combien d'unités avec 24 quarts d'unité ? » ; « Encadrer 25 septièmes par deux entiers consécutifs », etc.
- Pour poursuivre ce travail en dehors de la classe, on peut proposer aux élèves et à ceux qui les aident un guide tel que celui proposé sur le site. (Cf. Site. Document 1.)

Activité 2. Placement des nombres**Objectif**

Reconstruire la table de Pythagore « dans l'autre sens ».

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Matériel

Les élèves disposent d'une table de multiplication vierge identique à celle ci-dessus. Le professeur a préparé la même table vierge sur une affiche (ou un transparent).

Description

Le professeur dicte des nombres compris entre 0 et 100. Les élèves doivent décider si on peut les mettre dans la grille et les placer dans les « bonnes » cases.

La validation est faite par la classe. Les résultats sont inscrits sur une affiche qui reste dans la salle de classe et se complète séance après séance ou suivant les besoins.

Prolongement

- Le travail de mémorisation se poursuit par des exercices d'entraînement. Dans un premier temps les supports visuels sont laissés aux élèves qui le désirent. En cours d'année, l'affiche est d'abord placée sur le mur du tableau, sur un mur de côté ou sur le mur du fond, puis elle est enlevée. Dans le même esprit, des tables de référence sont laissées aux élèves qui en ont le plus besoin. Ils sont ensuite invités à se construire eux-mêmes des feuilles sur lesquelles ils notent uniquement les résultats qu'ils ont du mal à mémoriser, en en réduisant progressivement la liste.
- Pour permettre à l'élève de mesurer la progression de sa mémorisation, on peut lui demander de colorier au fur et à mesure les résultats qu'il sait par cœur sur une table de référence (qu'on peut éventuellement enrichir).
- On peut également organiser un concours dans la classe, par exemple en inscrivant une dizaine de nombres au tableau qu'il faut placer le plus rapidement possible sur une grille vierge.
- Cette grille peut également servir de support à évaluation. Le professeur dicte les nombres que les élèves doivent placer dans la grille. (Cf. Site. Document 2.)

Activité 3. Furet multiplicatif

Objectif

Mémoriser les tables de 6 à 9 et, en particulier, les carrés de ces nombres.

Matériel

Le tableau.

Description

Le professeur écrit au tableau un nombre qui figure dans une table de multiplication et donne la consigne : « *Le premier élève doit proposer une multiplication qui a pour résultat ce nombre. Le premier facteur doit être supérieur ou égal à 6 mais inférieur à 10. L'élève suivant doit proposer un nombre qui est dans la table du premier des deux facteurs. Il n'a pas le droit de donner un nombre déjà donné et ne peut pas proposer deux fois le même produit. La chaîne s'arrête en cas d'erreur ou si les deux facteurs sont identiques.* »

Il s'agit de faire la plus longue chaîne possible. Le professeur écrit au fur et à mesure les éléments de la chaîne.

Exemple de chaîne : 48 ; 6 × 8 ; 24 ; 8 × 3 ; 40 ; 8 × 5 ; 56 ; 7 × 8 ; 49 ; 7 × 7 ; stop.

Analyse

- Donner une chaîne de multiplications permet de balayer la table d'un nombre. Les produits et les multiplications correspondantes étant écrits au tableau, les élèves les sollicitent sans cesse pour ne pas les répéter. Ce balayage répété, couplé à l'évocation

des produits non encore cités, mais qui sont anticipés pour ne pas rompre la chaîne, est une aide à la mémorisation.

- Les carrés des neuf premiers nombres arrêtent la chaîne. Ce rôle particulier qui leur est assigné aide aussi à leur mémorisation.
- Une chaîne maximale comporte 50 éléments (elle est constituée à partir des 24 entiers différents supérieurs ou égaux à 0 pris dans les tables de 6, 7, 8 et 9 à l'exclusion de 49, 64 et 81, et se termine par la décomposition multiplicative d'un de ces trois nombres). Pour tendre vers ce résultat, des stratégies s'élaborent : si les résultats d'une table sont presque épuisés, la commutation des facteurs (quand ils sont supérieurs ou égaux à 6) permet de passer à une autre, mais elle doit être anticipée ; zéro est un nombre joker qui peut être utilisé une fois et peut servir à changer de table.

Prolongement

L'activité peut se dérouler en classe entière, l'enjeu étant alors d'établir un record. Mais on peut aussi organiser des compétitions, une rangée contre une autre, les filles contre les garçons, etc.

Activité 4. Labynombre

Objectif

Mémoriser les tables en travaillant les notions de multiples et diviseurs.

Matériel

La fiche donnée sur le Site. (Cf. Site. Document 3.)

Description

Le travail est individuel. Le professeur donne la consigne et la fait illustrer sur un exemple :

« Indiquer par des flèches un chemin qui permette d'aller, en suivant les lignes, de la case 7 en haut à gauche à la case 8 en bas à droite. Mais attention ! Pour se déplacer on doit respecter les règles suivantes : le nombre inscrit dans un rectangle vers lequel on se déplace doit être multiple du nombre inscrit dans le triangle d'où l'on vient, et le nombre inscrit dans un triangle vers lequel on se déplace doit être diviseur du nombre inscrit dans le rectangle d'où l'on vient. On ne passe pas nécessairement par toutes les cases. »

Analyse

- L'activité nécessite à la fois une connaissance des tables et l'élaboration d'une stratégie prenant en compte les contraintes imposées. De ce fait, elle s'adresse aussi aux élèves ayant une bonne connaissance des tables et permet la différenciation.
- Une stratégie possible consiste à repérer que les nombres inscrits dans chaque rectangle sont des produits de ceux inscrits dans les deux triangles auxquels ce rectangle est relié. On peut ainsi orienter la direction du déplacement dans une grande partie des cas, sauf lorsque le diviseur est inscrit dans plusieurs triangles attenants au rectangle. Il faut alors explorer les différentes pistes possibles pour éliminer celles qui n'aboutissent pas.

- Le professeur peut donc jouer sur le nombre d'étiquettes, la valeur des nombres ainsi que sur la répétition ou non dans les triangles attenants d'un nombre diviseur de celui inscrit dans un rectangle donné. Il peut ainsi complexifier plus ou moins la tâche et l'adapter aux différents élèves de sa classe.

Prolongement

- Le travail peut ne pas se limiter au répertoire des tables de 1 à 10 et étendre la notion de multiple et de diviseur à un domaine plus vaste (Cf. Site. Document 4). Des possibilités sont ainsi ouvertes pour imposer une modification des stratégies et le recours à d'autres connaissances.
- On peut aussi proposer des grilles à plusieurs solutions (Cf. Site. Document 5). La diversité des chemins possibles est l'occasion d'échanges qui attestent que tout problème n'a pas une solution unique.

Activité 5. La table arithmétique naturelle

Cette activité n'est pas à proprement parler du calcul mental. Elle s'adresse aux élèves pour qui les tables de multiplication sont à reconstruire en leur proposant une autre approche que la construction d'une table de Pythagore. En sixième, elle peut être proposée à un petit groupe d'élèves en aide individualisée.

Objectif

Redécouvrir les relations des nombres de 0 à 100 avec leurs diviseurs, percevoir des régularités ou des irrégularités dans ces relations.

Matériel

- Des jetons représentant des soldats ou une feuille de papier quadrillé pour la première phase.
- Des parties de table arithmétique à compléter pour la phase 2. (Cf. Site. Document 6.)

Description

- **Phase 1 :** les élèves doivent aligner un nombre donné de soldats de façon à former un rectangle face au joueur. Un premier essai est proposé avec 18 soldats de façon à ce que chacun s'approprie bien la consigne et différencie correctement le rectangle de 2 lignes de 9 de celui de 9 lignes de 2.

Puis d'autres nombres sont proposés, l'enjeu étant de former un maximum de rectangles possibles.

On peut proposer les nombres 60, 36, 17, 42, 48, 49, etc.

Le travail est individuel et donne lieu à une mise en commun. Après validation des résultats, chacun est invité à dire comment il a fait. Certaines remarques sont soulignées :

- certains nombres ne peuvent « se ranger que par 1 », par exemple 17, etc.
- certains nombres peuvent « se ranger en carré », par exemple 36, etc.
- les nombres pairs « se rangent par 2 », pas les nombres impairs.

- **Phase 2 :** le professeur propose aux élèves de reprendre le même travail avec chacun des nombres de 0 à 80. Pour construire un grand tableau pour la classe, ils doivent inscrire les décompositions des nombres quand elles existent dans un tableau à double entrée. Pour plus d'efficacité le travail est réparti entre différents groupes de deux ou trois élèves. Puis les résultats sont recopiés dans des tableaux de plus grands formats qui sont ensuite assemblés pour former une grande table arithmétique numérique. Les élèves sont alors invités à dire ce qu'ils remarquent ou ont remarqué, par exemple :
 - on peut construire la table d'un nombre aussi loin que l'on veut, en ajoutant ce nombre autant de fois que nécessaire, à partir de zéro ;
 - les multiples de 9 sont multiples de 3, les multiples de 8 sont multiples de 4 et de 2 ;
 - les multiples de 6 sont à la fois multiples de 2 et de 3 ;
 - les multiples de 5 se terminent par 0 ou par 5.

Analyse

- L'activité envisage d'abord les tables « dans l'autre sens » ; il ne s'agit pas de produire le résultat d'une multiplication mais de chercher des décompositions multiplicatives d'un nombre ; c'est pour résoudre ce type de problème que la mémorisation des tables est utile.
- Dans la phase 1, beaucoup d'élèves commencent par manipuler ou dessiner. Certains dénombrent les jetons un à un avant de découvrir qu'il s'agit de chercher des décompositions multiplicatives. Le support matériel devient alors moins nécessaire, mais certains dessinent encore une ligne et une colonne et s'appuient sur cette représentation pour construire ou vérifier par addition répétée des propositions de décompositions.
- Dans la phase 2, les élèves reprennent les stratégies élaborées en phase 1. Puis ils remarquent des régularités pour :
 - certaines obliques : « Ça forme des diagonales » ;
 - les horizontales : « Ça va de deux en deux ; c'est la table de 2 ! » ;
 - les verticales : « Si ça se range par 4, ça se range par 2 ».

Les régularités peuvent être illustrées par des couleurs, par exemple en coloriant les nombres multiples de 2 en jaune, les multiples de 3 en rouge, ceux de 5 en bleu. Les multiples de 6 seront donc orange, ceux de 10 vert... (Cf. Site. Documents 7 et 8.)

Prolongements

Si la construction de la table a surtout servi à mettre en évidence les régularités, elle peut aussi servir de référence à la classe toute entière pendant la révision des tables. Mais elle peut être utilisée également pour illustrer l'encadrement d'un entier par deux multiples consécutifs et la division euclidienne.

Jeux pour mémoriser les tables

Pour les élèves qui ont du mal à les retenir, l'apprentissage des tables est une activité répétitive, rébarbative, qu'ils ne font qu'à contrecœur. De nouvelles répétitions les renvoient à des échecs passés et les obligent à se confronter à une image négative d'eux-mêmes qu'ils préfèrent éviter. Ce type d'activité ne les place pas dans des conditions favorables à une bonne mémorisation.

Proposer des jeux permet à l'enseignant de contourner cet obstacle. Le recours à un matériel manipulable, l'enjeu donné à la partie sont autant de ressorts pour motiver les élèves et les placer dans un état propice à l'apprentissage.

Pour autant, si les situations de jeux sont des situations d'échanges où se produisent de nombreuses interactions, ces dernières se font rarement sous le contrôle de l'enseignant et la justesse des résultats n'est pas toujours garantie. Pour cette raison, c'est plutôt en réinvestissement ou à l'occasion de travail en groupes restreints que ce type d'activités mérite d'être proposé.

Activité 6. Jeu avec des dominos à fabriquer

Matériel

Des vignettes du document 9. (Cf. Site. Document 9.)

Ce sont les tables de 6, 7, 8 et 9 qui sont souvent les plus difficiles à mémoriser par les élèves. Dans le cadre de l'aide individualisée pour des élèves faibles, on peut faire construire des « dominos ».

Règle du jeu

Chaque joueur reçoit un même nombre de dominos et on laisse une pioche. Les joueurs posent successivement les dominos de façon à ce que les « numéros » qui s'accrochent soient les mêmes. Un joueur qui ne peut pas poser un domino doit tirer dans la pioche. La pose d'un « double numéro » doit être accompagnée d'un deuxième domino. C'est le joueur qui peut poser le plus grand « double » qui commence. Le gagnant est celui qui termine le premier.

Jeu 1

Chaque élève reçoit un nombre de *vignettes produits*. On joue suivant les règles classiques des dominos, mais l'élève qui pose sa vignette doit annoncer le bon produit sinon il la reprend et en tire une autre dans la pioche.

Dans les cas difficiles, on peut envisager la présence d'un arbitre disposant des tables de multiplication.

Jeu 2

On utilise par exemple les dominos produits des tables de 6, 7, 8 et 9 et on ajoute des vignettes de même taille avec les résultats 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 14, 21, 28, 35, 49, 56, 63, 16, 32, 40, 64, 72, 18, 27, 45, 72. (Remarque : il n'y a pas assez de *cartes résultats* pour toutes les *cartes produits*.)

Les cartes sont mélangées, on distribue 6 cartes par joueur. Lorsque c'est son tour chaque joueur tire une carte au joueur précédent, pose une paire constituée d'une

vignette produit et d'une *vignette résultat* qui correspond au produit. S'il ne peut pas poser de paire, il tire une carte dans la pioche et attend le tour suivant pour jouer.

Le gagnant est celui qui se débarrasse de toutes ses cartes ou celui qui a le moins de cartes lorsque la pioche est épuisée.

Activité 7. Jeu avec des cartes à jouer

Matériel

On enlève les habillés, les as, les jokers et les dix d'un jeu de 54 cartes. Il reste alors 32 cartes.

Description

On joue suivant le principe du *Memory*. Les cartes sont d'abord retournées. Le premier joueur retourne ensuite l'une d'entre elles, annonce le résultat d'une table du nombre inscrit sur sa carte et retourne une autre carte. Si c'est la bonne carte il continue de jouer, si ce n'est pas la bonne carte c'est le joueur suivant qui joue.

Exemple :

Carte retournée 6, annonce 42 ; si l'élève retourne 8 c'est perdu, s'il retourne 7 c'est gagné.

Lorsqu'il ne reste plus de cartes on ajoute les points marqués sur les cartes (par exemple un joueur qui a deux cartes « 8 », une carte « 9 », deux cartes « 2 » et trois cartes « 4 » marque : $2 \times 8 + 9 + 2 \times 2 + 3 \times 4 = 33$).

C'est celui qui a le total le plus élevé qui a gagné.

Activité 8. Jeu avec des cartes à fabriquer

Matériel

On construit un jeu de 45 cartes dont 4 sont des jokers. Sur les 41 autres sont inscrits les résultats non nuls des tables de multiplication de 2 à 10.

Description

On distribue six cartes une à une à chacun des deux à cinq joueurs. Le reste constitue la pioche. Le premier joueur pose une carte et annonce une table dont le nombre écrit sur la carte fait partie (par exemple il pose 35 et annonce « table de 5 »). Le joueur suivant doit poser une carte faisant partie de la même table et annoncer à son tour une table dont le nombre écrit sur la carte fait partie (par exemple il pose 45 et annonce « table de 9 »). Et ainsi de suite...

Un joueur qui ne peut pas fournir peut utiliser un joker, sinon il pioche une carte et passe son tour.

Le gagnant est le premier joueur qui n'a plus de cartes en main.

Activité 9. Jeu avec des grilles pré-remplies

Matériel

Les grilles ci-dessous.

9	36	4	72	16	80
18	4	28	2	8	5
14	42	7	60	15	40
52	14	56	12	3	48
13	84	2	45	9	63
98	7	16	3	27	18

8	18	9	63	21	48
56	6	42	13	39	4
4	54	14	70	3	12
60	10	42	7	91	7
16	20	4	28	8	14
108	12	48	16	24	2

48	12	96	8	56	6
9	60	5	70	14	42
54	18	75	3	7	21
22	180	24	72	14	42
88	8	48	6	40	12
16	40	16	54	7	96

18	54	6	52	3	30
45	6	84	6	28	15
9	45	15	35	7	42
81	3	90	5	65	13
3	51	10	85	7	91
42	2	34	17	24	17

Description

Le jeu se joue à deux joueurs ou plus. Chacun dispose d'un crayon de couleur différente et d'un jeton le représentant. Un tirage au sort détermine celui qui commence la première partie, puis chacun joue à tour de rôle.

Le joueur part d'une case de son choix et se déplace horizontalement ou verticalement d'un nombre vers un diviseur de ce nombre ou d'un nombre vers un multiple de ce nombre. Il barre la case qu'il a visitée, matérialise son déplacement par un trait et marque un point. Les retours en arrière sont interdits. Les cases déjà visitées ne peuvent plus l'être par aucun des joueurs.

Lorsque le joueur ne peut pas déplacer le jeton, il s'arrête et marque ses points. Le second joueur place son pion sur une case de son choix non barrée et procède de la même façon que le premier joueur.

Lorsque tous les nombres de la grille ont été utilisés ou si aucun déplacement n'est possible, on change de grille. Le gagnant est celui qui a le plus de points quand deux, trois ou quatre grilles sont épuisées.

Activité 10. Jeu avec des cartons de loto

Matériel

Des grilles. (Cf. Site. Document 10.)

	10	27		40				
	12	24	32	48		63		81
8		20			54		72	

	12	21	30	40				81
	16	24	35		54	64	72	
	15				56			

Description

Les jeux de loto permettent de travailler en plus grand groupe et même en classe entière. Chaque élève reçoit un ou deux cartons (Cf. Site. Document 10) sur lequel il doit marquer la *case produit* correspondant à la multiplication annoncée par le meneur de jeu. Le choix de la multiplication annoncée peut être fait par exemple par tirage ou par pointage sur une liste ou une table de Pythagore.

On peut jouer soit à la « quine » (le premier qui a rempli une ligne a gagné), soit « au carton plein » (le vainqueur est le premier à avoir rempli toutes les lignes d'un carton).

Mémoriser des propriétés

Critères de divisibilité

Les critères de divisibilité constituent un aspect de la culture des nombres qui s'enrichit au collège dès la classe de 6^e. Souvent, ces critères sont apportés par l'enseignant et le travail se limite à des exercices d'application. Pourtant, dans les problèmes où interviennent des décompositions de nombres en produits, ils sont efficaces à la fois pour initier des stratégies de résolution et rendre leur résolution plus rapides.

En calcul mental, parce que la rapidité est un enjeu, le recours aux critères de divisibilité peut être mis en valeur.

L'activité suivante a été testée en classe de 6^e mais peut être reprise dans les autres classes.

Activité 11. Le compte est bon

Phase 1 : Familiarisation avec des multiples de 2 ; 5 ; 10

Objectifs

Montrer qu'il existe plusieurs décompositions multiplicatives d'un nombre.

Montrer que certaines stratégies sont plus rapides pour obtenir une décomposition (en particulier celles qui s'appuient sur le repérage du dernier chiffre).

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise.

Prérequis

Connaître les tables de multiplication. Savoir qu'on peut calculer un produit de plus de deux facteurs en associant les facteurs de différentes manières.

Description

Sur le principe du jeu « Le compte est bon », le professeur propose de retrouver des nombres en formant un produit à partir des facteurs écrits sur les étiquettes suivantes : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9.

Le professeur donne la consigne : « On va jouer au « Compte est bon » avec les étiquettes suivantes, que vous ne pouvez utiliser qu'une fois. Mais attention vous ne pouvez faire que des multiplications. Vous pouvez écrire des résultats intermédiaires sur votre feuille mais vous n'avez pas le droit de poser des opérations. »

Il s'assure que tous les élèves ont compris la consigne en proposant éventuellement un exemple.

Les élèves jouent successivement avec des nombres comme : 60 ; 240 ; 560 ; 105.

À chaque fois, après qu'environ la moitié de la classe a abouti à un résultat, le professeur recense les propositions et les soumet à la validation de la classe. Il revient sur les démarches correctes en questionnant les élèves producteurs sur ce qui les a orientés : « Comment as-tu su quels nombres choisir ? », « Qu'est-ce qui t'a donné l'idée de ces nombres ? »

Analyse

Dans les premiers calculs, beaucoup d'élèves n'aboutissent pas, d'autres ne s'approprient pas la consigne ou ont des difficultés à enchaîner les produits et utilisent d'autres opérations que la multiplication. Même si certains élèves connaissent déjà les critères de divisibilité par 2, par 5 et par 10, ils ne les utilisent pas toujours spontanément. La démarche la plus fréquente au début reste celle des essais/erreurs.

Au fur et à mesure, les procédures évoluent : certains reconnaissent dans le nombre des résultats des tables, d'autres travaillent à partir de la recherche de moitiés, de quarts... avant que, petit à petit, le repérage du dernier chiffre apparaisse comme un outil efficace.

On peut se poser la question de la présence du 1 parmi les nombres donnés au départ. Après quelques parties, les élèves font remarquer, soit qu'on ne se sert jamais du 1, soit qu'on peut écrire « fois 1 » dans toutes les décompositions. C'est l'occasion de travailler ainsi, sans aucun formalisme, la notion d'élément neutre pour la multiplication.

La traduction des démarches des élèves par le professeur peut prêter à débat, en particulier quand l'enseignant traduit la démarche par une seule expression. Certains élèves ne reconnaissent pas ce qu'ils ont fait alors que d'autres donnent raison au professeur. C'est l'occasion de travailler le passage délicat de l'oral à l'écrit et de donner du sens aux expressions comportant un produit de plusieurs facteurs (avec utilisation ou non de parenthèses).

Institutionnalisation

- Il y a plusieurs chaînes de multiplications qui donnent le même résultat.
- Des chaînes de multiplications qui comportent les mêmes nombres écrits dans un ordre différent donnent toujours le même résultat.
- Pour former un produit qui se termine par 0, on a intérêt à associer les facteurs 2 et 5 dont le produit est 10.

Phase 2 : Évolution des procédures

Objectif

Montrer qu'on peut déterminer à l'avance la divisibilité d'un nombre par 10, 2, 5, 3 ou 9.

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise.

Prérequis

Avoir déjà rencontré dans sa scolarité des critères de divisibilité.

Description

Le professeur donne la consigne : « On va jouer au « Compte est bon » avec les étiquettes 2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 7 ; 9 ; 13. Comme la dernière fois, vous ne pouvez utiliser qu'une fois chacune d'elles et vous ne pouvez faire que des multiplications. Vous êtes autorisés à écrire des résultats intermédiaires sur votre feuille mais vous n'avez pas le droit de poser des opérations. »

Les élèves jouent cette fois-ci avec des nombres comme : 108 ; 135 ; 117 ; 441 ; 104.

Une mise en commun des procédures est organisée après chaque recherche. Elle porte sur les démarches abouties ou non, sur leur validation et surtout sur ce qui a permis ou non de les initier. Le professeur note et garde au tableau les affirmations d'élèves du type « J'ai vu que le nombre se terminait par 5, alors c'est 5 fois quelque chose... »

Analyse

Les nombres sont choisis pour permettre de faire émerger certains critères de divisibilité et en invalider d'autres.

- Dans 108 ($9 \times 2 \times 2 \times 3$), la plupart des élèves reconnaissent d'abord un multiple de 2, mais certains reconnaissent déjà un multiple de 9.
- Dans 135 ($5 \times 3 \times 9$), certains reconnaissent le multiple de 9, d'autres reconnaissent un multiple de 5. Ils risquent de se construire un théorème-élève du type « le dernier chiffre est un diviseur du nombre ».
- Avec 117 (9×13), le théorème précédent est invalidé. Si certains élèves parviennent au résultat par essais/erreurs, d'autres reconnaissent tout de suite un multiple de 9.
- Avec 441 ($9 \times 7 \times 7$), les procédures par essais successifs ont peu de chances d'aboutir, le recours au critère de divisibilité par 9 est un moyen efficace pour orienter la recherche.
- 104 ($2 \times 2 \times 2 \times 13$) permet d'infirmer le théorème-élève « la somme des chiffres d'un nombre est un diviseur de ce nombre ».

Les procédures qui apparaissent en classe sont plutôt basées sur la multiplication que sur la division.

Les élèves ont besoin de plus ou moins de temps pour s'approprier une autre procédure que la leur. Par conséquent, il peut être préférable de découper l'activité en plusieurs séances espacées dans le temps et ne proposer qu'un ou deux nombres à chaque fois.

Lors de la correction, on peut écrire toutes les propositions des élèves au tableau. Cela permet de faire apparaître différentes décompositions, la commutativité et l'associativité de la multiplication. Par exemple, si un élève propose $9 \times 2 \times 3 \times 2$, et un autre $2 \times 3 \times 9 \times 2$, ce n'est pas immédiatement « la même chose » pour eux. C'est le

calcul de chaque produit dans l'ordre d'écriture qui permettra de mettre en évidence le fait que l'ordre dans lequel on effectue les multiplications ne modifie pas le résultat.

La plupart des élèves commence par des essais successifs. Les critères de divisibilité n'apparaissent pas toujours spontanément. Dans ce cas-là, après la validation des bonnes propositions, l'enseignant doit solliciter la classe et demander si une partie au moins de la décomposition n'était pas prévisible.

Institutionnalisation

Quand certains critères de divisibilité ont été cités, et quand les élèves en expriment le besoin, on peut les écrire dans la partie « calcul mental » du cahier. Nous donnons ci-dessous quatre exemples de ce qui peut y être écrit :

- un entier est multiple de 5 lorsqu'il peut s'écrire $5 \times \dots$. On dit alors qu'il est divisible par 5 ;
- un entier est multiple de 9 lorsqu'il peut s'écrire $9 \times \dots$. On dit alors qu'il est divisible par 9 ;
- un entier est multiple de 5 quand son dernier chiffre est un 5 ou un 0 ;
- un entier est multiple de 9 quand la somme de ses chiffres est multiple de 9.

Prolongement

Une fois que le principe du jeu est acquis et que la classe possède quelques méthodes de résolution efficaces, il est intéressant de proposer régulièrement un entraînement et un réinvestissement des critères de divisibilité avec d'autres nombres.

Ce jeu est très apprécié des élèves qui cherchent à être les premiers à trouver. Pour laisser à tous un temps de recherche suffisant et éviter le découragement des plus lents, on peut proposer à ceux qui ont trouvé rapidement une première solution, soit d'en chercher un maximum d'autres, soit de trouver la plus économique, c'est-à-dire celle qui utilise le moins de nombres parmi ceux qui sont proposés.

Lors de la mise en commun, même les élèves n'ayant pas trouvé de solution peuvent essayer d'en apporter de « nouvelles » en décomposant 4 en 2×2 par exemple. (Cf. Site. Document 11.)

Propriétés des opérations

Dans le calcul mental réfléchi, les propriétés des opérations sont sollicitées de façon consciente ou non. C'est à travers leur application que les stratégies s'élaborent et peuvent être justifiées. Si l'étude de certaines propriétés comme la distributivité est mentionnée dans les programmes, d'autres, comme l'associativité par exemple, ne le sont pas explicitement. Pourtant, elles sont nécessaires et doivent être elles aussi automatisées. Pour cela il est nécessaire de les reconnaître comme étant des outils de calcul efficace avant de les étudier pour elles-mêmes.

Les deux activités proposées ici visent à introduire, pour la première l'associativité de la multiplication en classe de sixième, et pour la seconde les propriétés des puissances en classe de quatrième.

Activité 12. Le plus court chemin

Cette activité concerne donc l'associativité de la multiplication. Celle-ci est une propriété souvent utilisée en acte dans les calculs, aussi bien de sommes que de produits. En ce qui concerne l'addition, le travail fait à l'école élémentaire est important. Il faut le reprendre au collège avec les nouveaux nombres, en particulier les relatifs.

En ce qui concerne la multiplication, le travail mené à l'école élémentaire est très variable suivant les classes. Il n'est pas rare de rencontrer des élèves de sixième n'ayant jamais été confrontés à un produit de trois nombres, c'est-à-dire n'ayant jamais eu à résoudre de problèmes mettant en jeu trois facteurs, et pour qui l'existence même d'un tel produit est inconcevable. Il faut avoir à l'esprit que pour ces élèves la multiplication n'est peut-être qu'une addition répétée.

Objectif

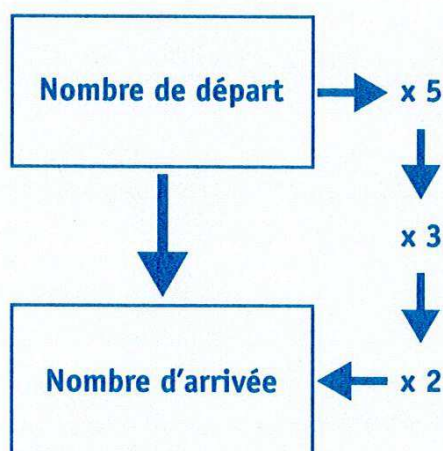
Découvrir l'associativité de la multiplication comme étant un outil efficace pour résoudre un problème numérique.

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise.

Description

Le schéma suivant avec les flèches est écrit au tableau.



Avec par exemple 6 comme nombre de départ, en effectuant le produit $((6 \times 5) \times 3) \times 2$, on montre que le nombre d'arrivée est 180. Les élèves doivent alors calculer le plus rapidement possible, par la méthode de leur choix, des nombres d'arrivée à partir de nombres de départ que le professeur propose successivement : 1 ; 4 ; 7 ; 12 ; 333. L'échange de procédures (il est important de n'en privilégier aucune) se fait question par question. Les nombres de départ et d'arrivée correspondants sont écrits et laissés au tableau.

Analyse

Il s'agit ici de faire opérer des nombres sur un nombre donné.

Voici les procédures attendues :

- dans un premier temps, effectuer les calculs dans l'ordre ;

- puis en fonction des nombres choisis, effectuer les calculs dans un autre ordre (par exemple avec 7 comme nombre de départ, préférer faire 7×2 avant 7×5) ;
- faire appel ensuite à la proportionnalité : le nombre associé à 1 est 30, celui associé à 4 est 4 fois plus grand, c'est 120, celui associé à 13 est la somme des nombres associés à 1, 5 et 7 ;
- associer enfin 5×2 pour faire 10, multiplier par 10 et par 3.

Si la dernière procédure n'apparaît pas au moment de la mise en commun, on pourra demander d'expliquer le « 0 à la fin de l'écriture des nombres d'arrivée » pour mettre en évidence l'association 5×2 .

Réinvestissement

Les procédures mises en évidence sont réinvesties avec d'autres nombres de départ ou en proposant de trouver le nombre de départ à partir d'un nombre d'arrivée.

On notera que les changements d'opérateurs permettent d'aider à la généralisation de la propriété d'associativité.

Institutionnalisation

- Pour effectuer une suite de plusieurs multiplications, on peut calculer dans n'importe quel ordre ;
- Quand c'est possible, il est astucieux de regrouper les facteurs de façon à obtenir des produits qui donnent des multiples de 10.

Prolongements

La propriété d'associativité (et de commutativité) est souvent mobilisée en tant qu'outil dans d'autres activités et, plus tard, à l'occasion du calcul littéral. Les débats autour de résultats trouvés mentalement obligent à s'y référer et à la mettre en mots jusqu'à ce qu'elle devienne une propriété automatisée, reconnue de tous et qu'il n'est plus nécessaire d'explicitier.

Propriétés des puissances

En classe de quatrième, les élèves doivent comprendre les notations a^n et a^{-n} . Ils doivent en outre savoir les utiliser sur des exemples numériques pour des exposants très simples et pour des égalités telles que $a^2 \times a^3 = a^5$; $(ab)^2 = a^2b^2$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{-3}$ où a et b sont des nombres relatifs (a non nul).

Les commentaires du programme précisent que « *cette rubrique ne doit pas donner lieu à des calculs artificiels sur les puissances entières d'un nombre relatif. Pour des nombres autres que 10, seuls des exposants simples sont utilisés. Les résultats sont obtenus en s'appuyant sur la signification de la notation puissance et non par l'application de formules* ». Pour autant, les égalités simples citées plus haut

constituent des formules qui prendront sens et pourront être d'autant mieux mémorisées qu'elles permettent de résoudre un problème.

L'obligation de recourir au calcul mental permet de faire pratiquer une ou toutes ces formules en actes avant de les noter dans le cahier.

L'activité ci-dessous propose de construire la formule $a^n \times a^p = a^{n+p}$ en cherchant à lui donner du sens.

Activité 13. Transformation d'écriture de puissances

Objectif

Découvrir une propriété de transformation d'écriture des puissances comme étant un outil efficace pour résoudre un problème de calcul et l'utiliser en acte.

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise, éventuellement calculatrice pour la validation des résultats.

Prérequis

Savoir calculer une puissance simple d'un entier, savoir comment simplifier une fraction.

Phase 1. Appropriation

Elle se déroule en cinq minutes environ.

Description

Le professeur propose d'effectuer mentalement le calcul $\frac{2^2 \times 2^4 \times 2^3}{2^4 \times 2^2}$ qu'il écrit au tableau.

Il autorise l'écriture d'un résultat intermédiaire.

Quand la moitié de la classe environ a trouvé une réponse, l'enseignant recense les résultats et les différentes démarches en commençant par celles qui n'ont pas abouti puis il les soumet au débat. Si nécessaire, les résultats proposés peuvent être validés ou invalidés en recourant à la calculatrice.

Analyse

On peut s'attendre à ce que certains élèves tentent d'abord d'effectuer le calcul de chaque puissance puis celui de leurs produits et enfin qu'ils essaient de simplifier la fraction. Or il est pratiquement impossible d'effectuer ce calcul de tête. En fait c'est la procédure qui consiste à simplifier d'abord la fraction par $2^2 \times 2^4$ qui s'avère beaucoup plus économique pour obtenir un résultat juste.

Phase 2. Calcul mental réfléchi

Elle se déroule en cinq minutes environ.

Description

Mentalement la classe doit calculer $\frac{3^3 \times 3^5}{3^2 \times 3^8}$

Les réponses sont recensées, les démarches explicitées. Leur validation est l'enjeu du débat.

Analyse

On peut s'attendre à des démarches diverses :

- « J'ai ajouté les exposants 3 et 5 parce que ça faisait 8 et que je pouvais simplifier les 3^8 . »
- « J'ai ajouté les exposants 3 et 5 parce que 3^5 est le produit de 5 trois et 3^3 est le produit de 3 trois et que quand on les multiplie on obtient un produit de 8 trois. »
- « J'ai pris un trois dans le 3^8 du dénominateur que j'ai mis avec le 3^2 . J'ai pu alors simplifier par 3^3 . Comme j'avais un produit de 5 trois au numérateur et qu'il me reste un produit de 7 trois au dénominateur, je peux simplifier 5 fois de suite par 3 et il reste 3^2 au dénominateur. »

Phase 3. Premier réinvestissement

Elle se déroule en cinq minutes environ.

Description

La phase précédente est reprise avec $\frac{5^4 \times 5 \times 5^3}{5^2 \times 5^5}$

Analyse

Les exposants choisis n'autorisent pas la simplification immédiate. Ils obligent à recourir au sens de l'écriture des puissances pour décomposer ou recomposer les produits. Les démarches permettant d'aboutir sont nombreuses et les élèves les échangent volontiers.

Phase 4. Limite de propriété

Elle se déroule en cinq minutes environ.

Description

Le calcul proposé est $\frac{2^2 + 2^3}{2 + 2^2}$

Analyse

On s'attend à ce que certains élèves utilisent la règle qui semble s'être dégagée dans les phases précédentes. Le débat qui suit est l'occasion de rappeler les règles de simplification de fraction.

Réinvestissement

L'activité est reprise au cours de plusieurs séances en introduisant des puissances de plusieurs nombres comme dans le calcul $\frac{2^5 \times 5^6}{2^6 \times 5^4}$, puis des puissances d'un produit comme, par exemple, dans $\frac{(2 \times 5)^5}{2^3 \times 5^6}$

Prolongement

Petit à petit, on peut proposer aux élèves d'inventer les énoncés à soumettre à la classe.

C'est uniquement quand les propriétés commenceront à être bien automatisées « en acte » qu'on pourra les noter dans le cahier après avoir proposé de simplifier l'écriture d'expressions littérales telles que $\frac{a^3 \times a^2}{a^6 \times a}$ (Cf. Site. Document 12.)

Propriétés de géométrie

Bien qu'*a priori* calcul mental et géométrie ne fassent pas partie du même domaine, le calcul d'une mesure dans un cadre géométrique peut pourtant se faire mentalement et être l'occasion de mobiliser un certain nombre de propriétés géométriques.

Cette répétition d'exercices d'application et de réinvestissement peut aider à la mémorisation de ces propriétés. Dans le même temps, ces exercices à support géométrique permettent d'entretenir les compétences construites en calcul mental.

Activité 14. Somme des angles d'un triangle

Objectif

Mémoriser, en l'utilisant, la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Les énoncés sont écrits ou projetés.

Prérequis

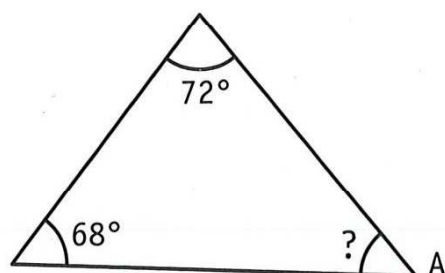
Connaître la propriété de la somme des angles d'un triangle.

Description

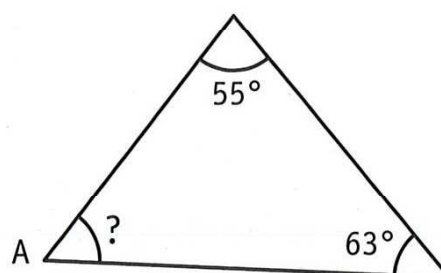
Les réponses et les démarches qui seront données pour les énoncés de la page 96 seront recensées et débattues soit par item soit par groupes d'items.

Le professeur propose successivement cinq énoncés. Il s'agit de déterminer la valeur de l'angle $\widehat{A}$.

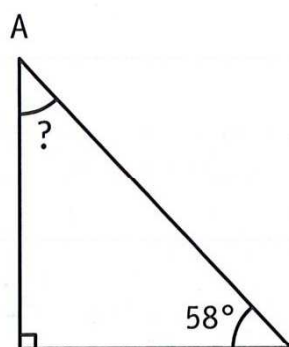
Énoncé 1



Énoncé 2



Énoncé 3



Énoncé 4

Dans un triangle ABC ; $\widehat{B}$ mesure 23° ;
 $\widehat{C}$ mesure 138° .

Énoncé 5

Dans un triangle AXE ; $\widehat{E}$ mesure 87° ;
 $\widehat{X}$ mesure 92° .

Analyse

Les élèves ne peuvent pas effectuer directement des mesures. Seule l'application de la propriété peut leur permettre de déterminer la mesure cherchée. Pour associer une image à la propriété, les trois premiers items s'appuient sur une figure. Dans les items suivants, les élèves peuvent l'évoquer mentalement.

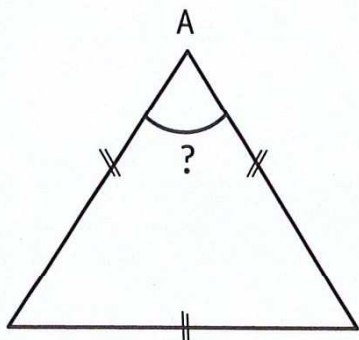
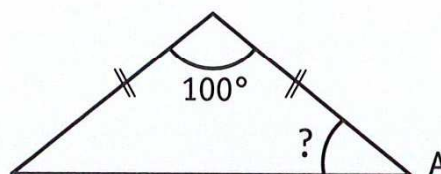
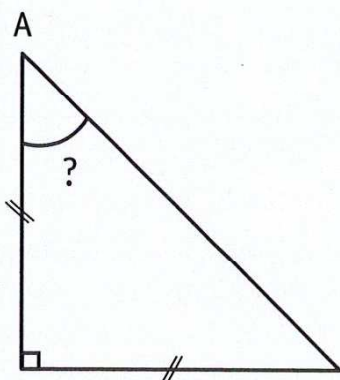
La mémorisation de la propriété s'effectue surtout du fait de son utilisation. Les échanges portent essentiellement sur la validité des résultats proposés et sur les procédures de calcul qui permettent de les obtenir (calcul de la somme des deux premiers angles puis recherche du complément à 180° ou soustractions successives de chacun des deux angles à 180°). C'est au professeur de veiller à faire verbaliser la propriété utilisée. Dans le cas du triangle rectangle (énoncé 3), certains élèves effectuent $90^\circ - 58^\circ$ en utilisant les deux nombres de l'énoncé sans avoir pris conscience de la propriété qui veut que « les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires ».

Les valeurs des angles sont choisies de façon à ce que les calculs à effectuer soient un peu difficiles et qu'ainsi les capacités en calcul mental soient valorisées. Cependant les valeurs du dernier item amènent parfois la classe à s'interroger sur l'existence d'un tel triangle et à envisager le cas où les deux premiers angles sont supplémentaires.

Réinvestissement 1. Détermination de la valeur d'un angle.• **Activité**

Les réponses proposées pour les énoncés doivent être recensées et débattues et les démarches explicitées.

Le professeur propose successivement cinq énoncés. Il s'agit de déterminer la valeur de l'angle $\widehat{A}$.

Énoncé 1**Énoncé 2****Énoncé 3****Énoncé 4**

ABC est rectangle en C ; $\widehat{B}$ mesure 23° .

Énoncé 5

AXE est isocèle de sommet principal A ; $\widehat{X}$ mesure 57° .

Les résultats découlent d'un raisonnement qui met en œuvre plusieurs propriétés. La propriété de la somme des angles est utilisée (si nécessaire) comme un outil parmi d'autres pour résoudre un problème. Elle prend ainsi du sens parmi les autres propriétés des triangles.

Le calcul mental nécessite une certaine vitesse dans la production des réponses. De ce fait, les élèves sont conduits à rappeler rapidement en mémoire aussi bien la propriété de la somme des angles que celles des triangles particuliers. Il devient nécessaire de les mémoriser et, pour cette raison, beaucoup automatisent rapidement procédures et résultats associés. Ainsi certaines connaissances qui peuvent être associées à un schéma se constituent en reliant par exemple directement (sans éprouver le besoin de le justifier) la valeur des angles à l'image du triangle équilatéral ou du triangle rectangle isocèle. (Cf. Site. Document 15.)

Réinvestissement 2. Vrai ou faux

• Activité

Le professeur propose successivement les affirmations ci-dessous. Les élèves répondent par vrai ou faux.

Affirmation 1.

On peut construire un triangle RST tel que $\widehat{R} = 101^\circ$; $\widehat{S} = 28^\circ$; $\widehat{T} = 52^\circ$.

Affirmation 2.

Le triangle ABC tel que $\widehat{A} = 26^\circ$; $\widehat{B} = 128^\circ$ est isocèle.

Affirmation 3.

Le triangle EFG tel que $\widehat{E} = 19^\circ$; $\widehat{F} = 70,9^\circ$ est rectangle.

Affirmation 4.

Un triangle possédant un angle de 60° est obligatoirement équilatéral.

Affirmation 5.

Un triangle rectangle peut avoir un angle de 100° .

Pour chaque affirmation, les vrais et faux sont dénombrés et chacun est invité à argumenter pour convaincre les autres. L'enseignant organise les échanges, fait reformuler et note les arguments au tableau. (Cf. Site. Document 14 pour d'autres exemples.)

• Analyse

Dans le débat, les propriétés des angles des triangles deviennent des arguments pour convaincre. Elles trouvent ainsi une nouvelle utilité qui enrichit leur sens et encourage leur mémorisation.

Ces propriétés, qui dans les activités précédentes avaient été mobilisées de façon plus ou moins automatique pour produire un résultat, sont ici formulées à haute voix dans les échanges. Ce travail de verbalisation est aussi une aide à leur mémorisation. Pour que celle-ci soit correcte, le professeur doit veiller à la rigueur et à la justesse du vocabulaire employé et ne pas hésiter à faire reformuler les élèves en conséquence.

Dans ces activités, la mobilisation de la propriété dans différents problèmes, son utilisation fréquente, sa verbalisation pour argumenter ou justifier, sont trois axes qui favorisent sa mémorisation.

Ce type d'exercices permet aussi d'établir un lien entre les cadres numérique et géométrique : les calculs ne servent pas seulement à produire des réponses sous forme numérique mais aussi à renseigner sur la nature des figures. Cette idée pourra être exploitée par la suite pour déterminer certaines propriétés d'une figure à l'aide des réciproques des théorèmes de Pythagore ou de Thalès.

Prolongement

En cinquième, il est possible de proposer des activités du même type au moment de l'étude des propriétés des angles liées au parallélisme.

Activité 15. Exemples d'autres activités en géométrie.

Objectif

Mémoriser une propriété de géométrie.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Les énoncés sont écrits ou projetés.

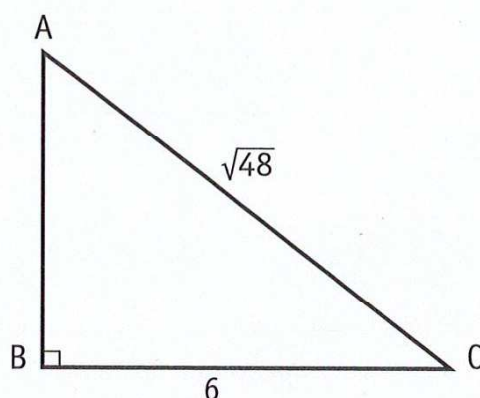
Prérequis

Connaître la propriété à mémoriser.

Exemples d'exercice

- Avec le théorème de Pythagore

Exercice 1



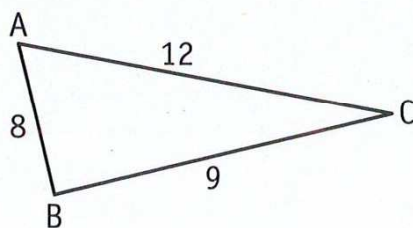
Calculer AB.

Exercice 2

Le triangle EFG est rectangle isocèle en G et $[FG]$ mesure 6 cm. Combien mesurent les autres côtés ?

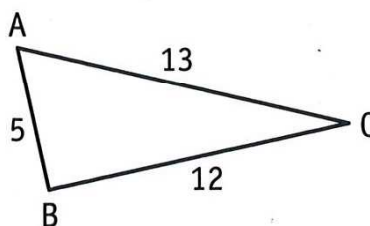
Exercice 3

Le triangle ABC est rectangle : « vrai ou faux » ?



Exercice 4

Le triangle ABC est rectangle : « vrai ou faux » ?



Exercice 5

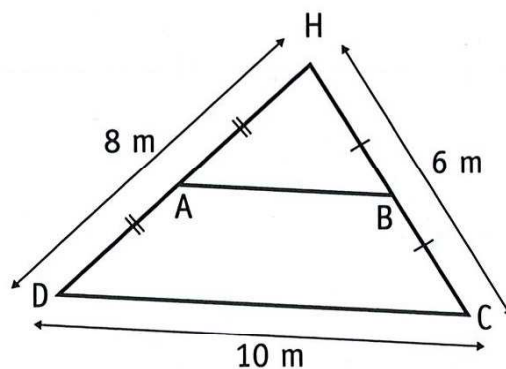
Le triangle ABC est rectangle : « vrai ou faux » ?

$AB = 9 \text{ cm}$; $BC = 15 \text{ cm}$; $AC = 12 \text{ cm}$.

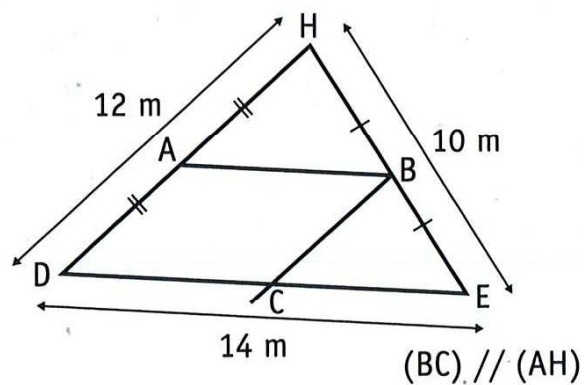
- Avec la droite des milieux

Trouver le périmètre du quadrilatère ABCD.

Exercice 6



Exercice 7

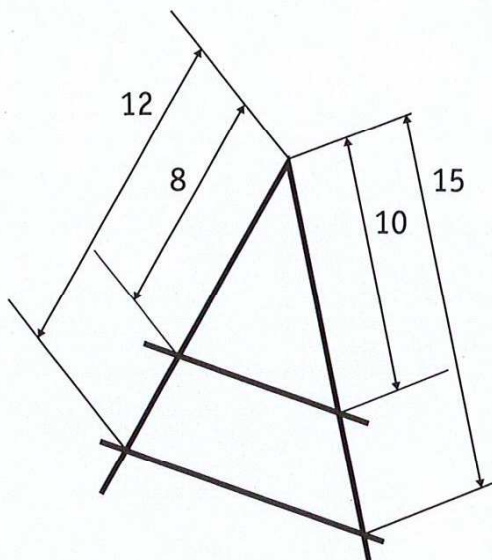


(Cf. Site. Document 13.)

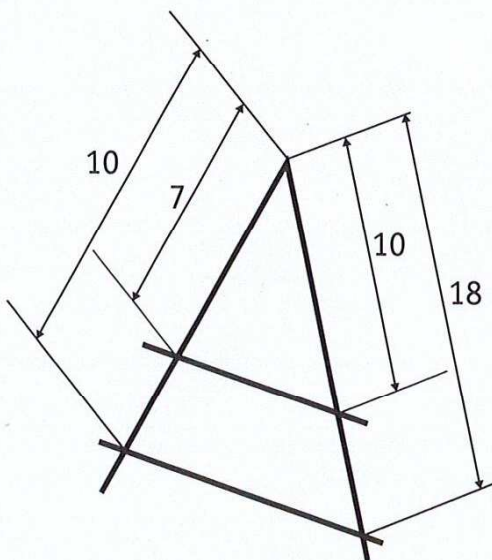
- Avec le théorème de Thalès

Les droites sont parallèles : « vrai ou faux » ?

Exercice 8



Exercice 9



Automatiser des procédures

Multiplier par 10, 100... Diviser par 10, 100...

En sortant de l'école élémentaire, les élèves savent multiplier un entier par 10, 100... Mais lorsqu'il s'agit de multiplier un décimal par 10, 100... de nombreuses erreurs subsistent. En effet ils ont surtout appris la règle dite des zéros : « pour multiplier par 100 on ajoute deux zéros ». Cette règle souvent enseignée constitue un obstacle : lorsqu'il s'agit de multiplier 2,6 par 100, on voit comme résultat 20,60 ou 2,600 ou 200,6 ou 200,600 ou 002,6. Avec cette règle, 260 est « logiquement » une réponse fausse car 260 ne comporte qu'un zéro.

Une autre règle est connue par certains de nos élèves arrivant en sixième : « pour multiplier par 100, il faut décaler la virgule de deux rangs vers la droite ». Cette règle est purement formelle et vide de sens. De plus, elle est incomplète : quand le nombre « devient » entier, on ne déplace plus la virgule mais « on ajoute des zéros ».

Pour éviter ces erreurs, il sera préférable de dire que les chiffres changent de valeur. Ainsi par exemple, si l'on multiplie par cent, le chiffre des unités devient celui des centaines et celui des dixièmes devient celui des dizaines. En fait, chaque chiffre se déplace dans le tableau de numération. Il se décale de deux rangs en même temps que les autres dans le sens qui « agrandit ». Cette méthode s'applique aussi bien aux décimaux qu'aux entiers.

0	0	0	2	,	6	0	0
Multiplié par 100, le 2, chiffre des unités, devient chiffre des centaines et le 6, chiffre des dixièmes, devient chiffre des dizaines.							
0	2	6	0	,	0	0	0

Activité 16. Multiplication : un exemple de situation d'apprentissage

Objectif

Donner du sens à la procédure de multiplication par 10, 100, 1000...

Prérequis

Savoir multiplier un entier par 10, 100, 1000...

Phase 1. Calcul mental réfléchi

Elle se déroule en dix minutes environ.

Matériel

Des demi-droites graduées en centièmes à reproduire sur transparent (Cf. Site. Document 16). Ce matériel participera éventuellement à la validation des résultats.

Description

À l'oral, le professeur propose les calculs suivants :

- 72 centièmes multipliés par dix ;
- 125 centièmes multipliés par dix ;
- 2 unités et 6 dixièmes multipliés par dix.

Les élèves volontaires sont invités à écrire leurs résultats au tableau. Le débat qui suit permet à la classe d'invalider ou de valider les réponses en s'appuyant sur différentes écritures des nombres décimaux.

Analyse

On peut s'attendre à des réponses telles que :

- 72 centièmes multipliés par 10 donnent 720 centièmes et 125 centièmes multipliés par 10 donnent 1250 centièmes ;

- $\frac{72}{10}$ ou $\frac{125}{10}$ et peut être 7,2 ou 12,5. Si ces écritures n'apparaissent pas, le professeur posera des questions du type : « Y a-t-il d'autres écritures de $\frac{72}{10}$? »

Les arguments avancés par les élèves pour montrer l'équivalence entre les réponses s'appuient sur les différentes procédures qui permettent de passer d'une écriture à l'autre. Ainsi 720 centièmes peuvent être considérés comme 7 unités 2 dixièmes (7,2) avant

d'être convertis en $\frac{72}{10}$, ou vus comme $\frac{720}{100} = \frac{72}{10} = 7 + \frac{2}{10}$ donc 7,2.

- pour 2 unités et 6 dixièmes on peut s'attendre à 20 unités et 60 dixièmes mais aussi 20,60... et, bien sûr, 26.

Les propositions incorrectes sont invalidées par les arguments utilisés précédemment.

Phase 2. Calcul mental réfléchi

Elle se déroule en vingt minutes environ.

Matériel

Le tableau de numération (Cf. Site. Document 17) rétroprojeté ou, encore mieux, matérialisé.

Description

Le professeur affiche ou écrit les questions au fur et à mesure qu'il les pose. La réponse doit être donnée sous forme décimale : $1,8 \times 10$ puis $0,076 \times 100$ et $2,15 \times 1000$. Les réponses sont recensées, débattues, validées et justifiées.

Analyse

Notons d'abord quelques exemples de justifications susceptibles d'être avancées par les élèves :

- « 18 car on décale la virgule. » Mais les élèves ne savent pas le justifier ;
- 1,8 c'est 18 dixièmes qui, multipliés par 10, donnent 180 dixièmes qui peuvent se simplifier en 18 unités car il y a 10 dixièmes dans une unité ;
- 1,8 multiplié par 10, c'est 10 unités et 80 dixièmes et 80 dixièmes c'est 8 unités, donc 18 unités ;
- 0,076 c'est 76 millièmes. En multipliant par 100 on a 7600 millièmes, soit 7 unités et 600 millièmes, soit 7,600 ou 7,6 ;
- 0,076 c'est 76 millièmes. En multipliant par 100 on a 7600 millièmes, soit 76 dixièmes ou encore 7,6 ;
- 7 centièmes multipliés par 100 donnent 700 centièmes, soit 7 unités et 6 millièmes multipliés par 100 ce qui donne 600 millièmes ;
- 2,15, c'est 2 unités et 15 centièmes. On aura donc 2000 unités et 15000 centièmes qu'on convertit en unités ;
- 2,15, c'est 215 centièmes qui, multipliés par 1000, donnent 215 000 centièmes, ce qui donne 2150 unités ;
- 2,15, c'est 2 unités plus 1 dixième plus 5 centièmes qui, multipliés par 1000, donneront $(2000 + 100 + 50)$ unités.

Si les justifications ne venaient pas, il faudrait questionner les élèves de façon à les obtenir.

Synthèse

Le professeur se sert ensuite du tableau de numération dans le but d'illustrer les translations des nombres et de leurs chiffres lors de ces différentes multiplications. (Cf. Site. Document 18.)

Dans un premier temps, il est important que le nombre soit décomposé : par exemple 2,15 c'est 2 unités et 1 dixième et 5 centièmes. C'est la translation que produit la multiplication sur chacun des chiffres de cette décomposition qui permettra d'expliquer la translation du nombre tout entier.

Les trois calculs proposés dans l'activité ne sont sans doute pas suffisants pour avoir l'assurance que tous les élèves auront compris. Il faudra illustrer d'autres multiplications avant de pouvoir faire formuler la règle. Et ce, sans doute, plusieurs fois dans l'année.

Institutionnalisation

- Lorsqu'on multiplie un décimal par 10, on décale tous les chiffres d'un rang : les millièmes deviennent des centièmes, les centièmes deviennent des dixièmes, les dixièmes des unités, les unités des dizaines...
- Lorsqu'on multiplie un décimal par 100, on décale tous les chiffres de deux rangs : les millièmes deviennent des dixièmes, les centièmes des unités...

Entraînement

Prévoir quelques exercices d'entraînement. Chaque séance dure dix minutes.

Ces exercices permettent aux élèves de s'entraîner et à l'enseignant de vérifier que la procédure est comprise. Pour certains, plusieurs séances d'appropriation sont nécessaires. La correction de ces exercices prend appui sur le tableau de numération et les différentes écritures des décimaux.

Les exercices proposés ne se limitent pas à des nombres écrits sous forme décimale.

Exemple de séance

Calculer :

- sept cent deux millièmes multipliés par cent (oral) ;
- trois unités deux centièmes multipliés par dix (oral) ;
- $1,7 \times 100$ (écrit) ;
- $0,35 \times 1000$ (écrit) ;
- 35, c'est 0,035 multiplié par... ? (les deux nombres sont écrits) ;
- combien de fois 0,12 dans 120 ?

Comme pour la multiplication, en s'appuyant sur les différentes écritures des décimaux et sur le tableau de numération, la classe valide ou invalide les différentes procédures proposées.

Phase 3. Sur feuille

Elle se déroule en vingt minutes environ.

Prérequis

Savoir qu'un dixième divisé par 10 donne un centième et que si on le divise par 100 on obtient un millième.

Matériel

- Des droites graduées en centièmes sur transparent et pour certains élèves des bandes de papier. Ce matériel participera éventuellement à la validation des résultats.
- Le tableau de numération.

Description

Après une courte recherche individuelle, les élèves travaillent par exemple en petits groupes de trois afin de résoudre le problème suivant : *donner une méthode pour effectuer les calculs suivants en calcul mental : $35 \div 10$; $0,6 \div 10$; $2,6 \div 100$.*

Analyse

On peut s'attendre à des réponses du type :

- $35 \div 10$, c'est 35 dixièmes car une unité partagée en 10 donne des dixièmes et 35 dixièmes c'est aussi 3,5.

On déplace les chiffres d'un rang en sens inverse de la multiplication dans le tableau de numération car les unités divisées par dix donnent des dixièmes ;

- 0,6, c'est 6 dixièmes et, si on divise les dixièmes en dix, on obtient des centièmes, donc 6 centièmes.

On déplace les chiffres d'un rang en sens inverse de la multiplication dans le tableau de numération car les dixièmes divisés par dix donnent des centièmes ;

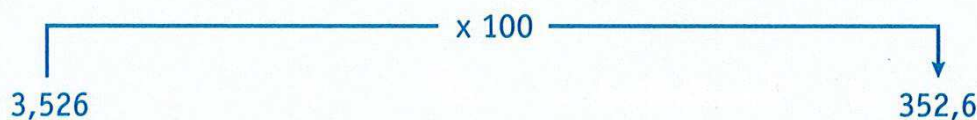
- 2,6, c'est 2 unités divisées par cent, soit 2 centièmes, plus 6 dixièmes divisés par cent, soit 6 millièmes. On a donc 0,026 ou 26 millièmes.

On déplace les chiffres de deux rangs dans le tableau de numération car les unités divisées par cent donnent des centièmes et les dixièmes divisés par cent donnent des millièmes.

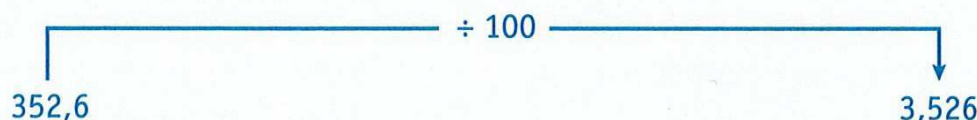
Institutionnalisation

- Lorsqu'on divise un décimal par 10, on décale tous les chiffres d'un rang en sens inverse de la multiplication : les dixièmes deviennent des centièmes, les centièmes deviennent des millièmes, les centaines des unités, les unités des dixièmes...

- Lorsqu'on divise un décimal par 100, on décale tous les chiffres de deux rangs en sens inverse de la multiplication : les dixièmes deviennent des millièmes, les unités des centièmes...



$$\begin{aligned} & (3 \text{ unités} + 5 \text{ dixièmes} + 2 \text{ centièmes} + 6 \text{ millièmes}) \times 100 = \\ & 3 \text{ unités} \times 100 + 5 \text{ dixièmes} \times 100 + 2 \text{ centièmes} \times 100 + 6 \text{ millièmes} \times 100 = \\ & 300 \text{ unités} + 50 \text{ unités} + 2 \text{ unités} + 6 \text{ dixièmes} = 352,6 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & (3 \text{ centaines} + 5 \text{ dizaines} + 2 \text{ unités} + 6 \text{ dixièmes}) \div 100 = \\ & 3 \text{ centaines} \div 100 + 5 \text{ dizaines} \div 100 + 2 \text{ unités} \div 100 + 6 \text{ dixièmes} \div 100 = \\ & 3 \text{ unités} + 5 \text{ dixièmes} + 2 \text{ centièmes} + 6 \text{ millièmes} = 3,526 \end{aligned}$$

Réinvestissement

- Pendant un nombre de séances laissé à l'appréciation du professeur, les élèves sont entraînés à multiplier et diviser par 10, 100...

- La multiplication et la division par 10, 100... ne sont pas enseignées pour elles mêmes : elles peuvent être réinvesties en proposant des problèmes de divisions et de multiplications ou des exercices avec changements d'unités. Voici quelques exemples :
- ♦ transformer 3 mètres en kilomètres ;
- ♦ par quel nombre multiplier 0,01 pour obtenir 10 ?
- ♦ 1000 fois 0,056 km ;
- ♦ 345,2 grammes ça fait combien de kilos ?
- ♦ 0,12, c'est 120 divisé par... ?
- ♦ 1000 pouces = 32 m. Combien mesure un pouce ?
- ♦ donner sous forme décimale le résultat du calcul : $\frac{546}{10} \div 1000$;
- ♦ transformer 234,2 cm en m ;
- ♦ la cantine a servi 100 repas à 3,6 €. Quelle somme doit collecter la gestionnaire ?
- ♦ 354 € partagés entre 100 élèves ;
- ♦ le dictionnaire comporte 1000 feuilles et a pour épaisseur 5,6 cm. Quelle est l'épaisseur d'une feuille ?
- ♦ on a obtenu 5 en multipliant 0,005 par un nombre. Lequel ?
- ♦ mon pas mesure 0,58 m. Quelle distance aurais-je parcouru avec 1000 pas ?
- ♦ quel est le volume minimal de la cuve qui permet de remplir 1000 bouteilles de 33 cl ?

Changements d'unités

A l'école élémentaire, les élèves ont surtout abordé des conversions avec, comme unités de référence, le mètre pour les longueurs, le litre pour les capacités ou contenances, le gramme pour les masses. Ils ont été familiarisés avec les préfixes usuels qui, accolés à l'unité de référence, permettent d'obtenir des unités plus petites ou plus grandes. La signification de kilo-, déci-, centi-, milli- est acquise ou en cours d'acquisition. Le travail sur les conversions d'unités s'est fait de manière raisonnable dans le cadre de problèmes où ces changements ont un intérêt : « Une souris fait 1000 pas de 8 mm chacun, quelle distance a-t-elle parcourue ? » ; « Quelle est la distance représentée par une longueur de 2 cm sur un plan au dix-millième ? », etc. Ces changements reposent surtout sur des transformations de grammes en kilogrammes ou de mètres en centimètres ou millimètres, de litres en centilitres ou millilitres...

Au collège, il s'agit de réactiver et d'entretenir les connaissances et d'amener les élèves à améliorer leurs performances. Le travail à conduire est conséquent : conversions d'aire, de volume, de vitesse sont des nouveautés du programme. Cependant, les calculs artificiels et hors contexte sont à éviter. Il ne s'agit pas de viser une virtuosité technique qui consisterait à faire exprimer $0,3 \text{ km}^2$ en cm^2

ou 3 m^3 en mm^3 , mais de travailler des exercices de transformations d'unités de mesure proches sans réclamer nécessairement le passage par l'écrit.

Conversions simples

Les conversions d'unités de longueurs, de masses, de capacités sont l'occasion de mettre en évidence les similitudes entre le système métrique et l'écriture décimale. Il est donc important de montrer que les changements se font en utilisant la multiplication ou la division par 10, 100, 1000... Notre sentiment est que le « tableau de conversion » ne favorise pas la mise en œuvre de ces procédures et que la compréhension des régularités nécessite un certain nombre d'exercices s'appuyant sur des relations connues ($1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$; $1 \text{ L} = 100 \text{ cL}$, etc.). La mémorisation de ces relations autorise des procédures efficaces sans recours au « tableau de conversion ». Nous pensons que le calcul mental est un moyen privilégié pour les mobiliser et commencer à les automatiser.

L'activité décrite ci-dessous se propose de faire identifier ces liens avec la numération décimale en reprenant le sens des problèmes de conversion d'unités.

Activité 17. Travail de mémorisation

Objectif

Automatiser quelques rapports entre diverses unités d'une même grandeur mathématique.

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise.

Description

Les énoncés sont dictés et écrits au tableau.

Énoncé 1

Combien de baguettes en bois longues de 1 m chacune faut-il mettre bout à bout pour construire une ligne de 13 km de long ?

Énoncé 2

Dans 2,3 € combien y-a-t-il de centièmes d'euros ?

Énoncé 3

312 g, c'est quelle fraction d'un kg ?

Énoncé 4

On mélange 2,5 dL de peinture blanche avec 123 cL de peinture rouge. Quelle quantité de peinture rose obtient-on ?

Énoncé 5

5,6 L = ... ?

*Les résultats sont recensés et débattus.**Analyse*

Voici une liste de ce que l'on peut trouver parmi les solutions proposées.

- Pour l'énoncé 1, une procédure correcte s'énonce ainsi : 13 km c'est 13 fois 1 km ; 1 km c'est 1000 m ; pour faire 1 km il faut donc utiliser 1000 baguettes d'un mètre ; pour faire 13 km il en faut 13 fois plus, soit 13 000 baguettes. Ceci peut s'écrire :

$$13 \text{ km} = 13 \times 1 \text{ km} = 13 \times 1000 \text{ m} = 13 \times 1000 \times 1 \text{ m} = 13000 \times 1 \text{ m}.$$

- Pour l'énoncé 2, on peut obtenir des réponses du type : 2,3 € c'est 2 fois un euro et 3 dixièmes d'euros, donc 2 fois 100 centièmes d'euro (ou centimes d'euro) et 30 centièmes d'euros, donc 230 centièmes d'euros (ou centimes). Ces réponses permettent d'invalider la proposition fausse « 203 centièmes d'euro ».

- Pour l'énoncé 3, l'égalité $1 \text{ kg} = 1000 \text{ g}$ permet d'affirmer que 1 g c'est un millième de kg et que donc :

$$312 \text{ g} = 312 \times 1 \text{ g} = 312 \times \frac{1}{1000} \text{ kg} = \frac{312}{1000} \text{ kg} = 0,312 \text{ kg}.$$

- Pour répondre correctement à l'énoncé 4 où deux mesures sont données dans des unités différentes, l'élève est contraint d'effectuer au moins une conversion. La confrontation des différents choix d'unités peut permettre de revisiter l'égalité $14,8 \text{ dL} = 148 \text{ cL}$.
- L'énoncé 5 est très ouvert et permet d'obtenir un grand nombre de réponses :

$5 \text{ L} + \frac{6}{10} \text{ L} ; \frac{56}{10} \text{ L} ; \frac{560}{100} \text{ L} ; 56 \text{ dL} ; 560 \text{ cL} ; 0,56 \text{ daL} ; \text{etc.}$ Leur mise en correspondance permet d'expliciter encore une fois les liens entre système métrique et numération décimale.

Prolongement

Le débat autour des résultats produits conduit souvent à invalider des propositions que la classe juge trop invraisemblables. Pour améliorer ce type de contrôle, le vécu social des élèves au début du collège doit être enrichi.

On peut mener un travail dans ce but avant de proposer certains exercices de conversion. Cela prendra, par exemple, la forme de séances au cours desquelles on va demander aux élèves de donner la longueur et/ou la largeur (d'un stylo, la longueur ou la largeur d'une table, etc.), la distance (d'une ville à une autre par exemple), la masse (d'un livre, d'un stylo, d'une bouteille, etc.) ou la capacité (plus tard le volume) de différents objets de leur entourage (un verre, une boîte, etc.). L'enjeu est de s'approcher le plus possible du résultat. La validation peut se faire par mesurage ou lecture sur un document (plan, carte, etc.). De même, on pourra proposer de déterminer l'aire de différentes surfaces (feuille A4, tableau) ou le volume d'autres objets (le bureau du professeur, la boîte de craie, un emballage en carton, etc.). La validation se fera alors par mesurage puis calcul.

Unités d'aires

À l'école, le calcul d'aire a été abordé, en CM2 en particulier, lors de la détermination de la mesure de l'aire d'un rectangle. Les élèves ont commencé à manipuler des cm^2 ou des dm^2 sur leur feuille de papier et, parfois, des m^2 dans la cour ou la salle de classe. En géographie, ils ont rencontré le km^2 . Ils ont procédé à quelques conversions d'unités.

Le système métrique construit les unités d'aires à partir des unités de longueur. De ce fait, pour les aires par exemple, le préfixe « kilo » n'amène pas à une multiplication par 1000 mais par 1000^2 . C'est ainsi que 1 km^2 peut être vu comme l'aire d'un carré de 1000 m de côté : $1 \text{ km}^2 = 1000 \text{ m} \times 1\,000 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ m}^2$.

Pour les unités d'aires les unités voisines ne sont plus dans le rapport 10 mais dans le rapport 100.

Notre sentiment est que cette difficulté ne peut être simplement surmontée par l'application d'une règle introduite sans un travail préalable sur les aires et des exercices visant à leur donner du sens d'une part et une certaine expertise d'autre part.

L'activité proposée ici est une situation de comparaison de grandeurs.

Activité 18. Comparaison de grandeurs

Objectif

Donner du sens aux conversions d'unités d'aire.

Matériel

Tableau ou matériel de projection, feuille ou ardoise.

Description

Le professeur dessine au tableau ou projette deux rectangles avec leurs dimensions.

Il demande : *Lequel de ces deux rectangles a la plus grande aire ?*

Les élèves peuvent écrire des résultats intermédiaires.

	Rectangle A	Rectangle B
Cas n° 1	32 mm × 5 cm	1 dm × 2 cm
Cas n° 2	8 cm × 25 cm	2 dm × 1,2 dm
Cas n° 3	120 dm × 5 dm	2 m × 30 dm
Cas n° 4	36 cm^2	3125 mm^2

Le débat qui suit chaque question permet d'exhiber différentes procédures.

Analyse

La responsabilité du choix de l'unité pour résoudre le problème est laissée à l'élève : par exemple lorsqu'il s'agit de comparer l'aire de rectangles dont les dimensions sont proposées dans des unités différentes (exemple $32 \text{ mm} \times 5 \text{ cm}$ avec $1 \text{ dm} \times 2 \text{ cm}$), il peut convertir en mm, cm ou dm.

Les élèves peuvent choisir :

- soit d'exprimer les dimensions des deux rectangles dans la même unité (mm, cm ou dm) puis de calculer leurs aires pour les comparer ;
- soit d'exprimer les dimensions du premier rectangle dans une unité et celle du second dans une unité différente, puis de calculer les aires de chacun d'entre eux et les comparer en effectuant des conversions d'unités d'aire.

C'est la comparaison des procédures utilisées qui permettra de valider ou d'invalidier les réponses et les procédures de changements d'unités.

Dans le cas n° 2, la mesure des deux dimensions de chaque rectangle est exprimée dans une même unité (cm pour le premier, dm pour le second). Ce choix est fait pour provoquer des comparaisons par conversion d'unités d'aire. Pourtant, dans la pratique, les élèves choisissent plutôt de convertir toutes les longueurs dans une même unité. Dans le cas où les réponses sont toutes du même type, c'est au professeur de demander : « Est-ce qu'on aurait pu faire autrement ? Y a-t-il d'autres solutions ? »

Dans le cas n° 4, le fait de ne pas donner de dimensions oblige les élèves à convertir les unités d'aire. En cas de désaccord sur la validité des réponses, l'enseignant peut révéler les dimensions cachées (par exemple $3 \text{ cm} \times 12 \text{ cm}$ et $2,5 \text{ cm} \times 12,5 \text{ cm}$).

Prolongement

Par la suite, et tout au long de la scolarité au collège, il est nécessaire de poursuivre l'automatisation des procédures mises à jour sur des exercices d'entraînement.

On peut construire des problèmes de comparaison similaires pour obliger à des conversions d'unités de longueur, de masse, de temps, de capacité ou de volume. Le même type de support (figures, balances, horloges... projetées ou dessinées au tableau) peut être utilisé, mais on peut aussi s'appuyer sur des objets concrets, en particulier pour les comparaisons de volume.

De même, l'étude des vitesses ne se limite pas au chapitre sur la proportionnalité. Pour entraîner ou pour réactiver des connaissances, on peut poser des questions du même type que les suivantes :

- Paul a parcouru 16 km en 20 min et Karine roule à 50 km/h. Qui est le plus rapide ?
- Bernard marche à 4,8 km/h et Hélène parcourt 300 m en 1 minute. Qui est le plus rapide ?
- Sur la route nationale, Stéphanie a parcouru 3 km en 2 minutes. Est-elle passible d'une amende ?
- Avec son cyclomoteur de moins de 50 cm³, Marwin parcourt 9 km en 10 minutes. Est-il en infraction ?

Unités de volume

À l'école, la notion de contenance a été travaillée et le volume à peine abordé. Les enseignants de collège ont la responsabilité d'enseigner la grandeur volume. On peut envisager une démarche comparable à celle que préconisent les programmes de l'école primaire pour les autres grandeurs : d'abord travailler sur la grandeur et sa mesure (comparaison sans mesure entre les volumes de deux solides, comparaison par l'intermédiaire d'un solide dont le volume peut être pris pour unité, empilages de cubes, comptages de petits cubes dans un solide) avant d'aborder les calculs de volumes.

Dans cet esprit, les activités décrites proposent d'établir des liens entre différentes unités de volume et de commencer à entraîner les conversions.

Activité 19. Empilement de cubes

Objectif

Établir des relations entre différentes unités de volume.

Matériel

Matériel de projection, feuille ou ardoise, quelques cubes de 1cm^3 , un cube de 1dm^3 .

Prérequis

Avoir effectivement manipulé des empilements de cubes et étudié leurs représentations en perspective.

Description

Le professeur projette, un à un, différents empilements de cubes (voir page suivante ; Cf. Site. Document 19.) et lit la question correspondante. Les réponses proposées à chaque item sont mises en débat.

Analyse

Les différentes questions sont construites afin de passer du dénombrement de cubes (items A et B), à la mesure du volume d'un cube dans une unité quelconque (items C et D), puis dans une unité du système international d'unités (items E et F).

Une petite unité est envisagée comme une fraction d'unité plus grande (items B, D, E), ceci afin d'autoriser plus tard des raisonnements du type :

$$32\text{ cm}^3 = 32 \times 1\text{ cm}^3 = 32 \times \frac{1}{1000}\text{ dm}^3 = \frac{32}{1000}\text{ dm}^3 = 0,032\text{ dm}^3.$$

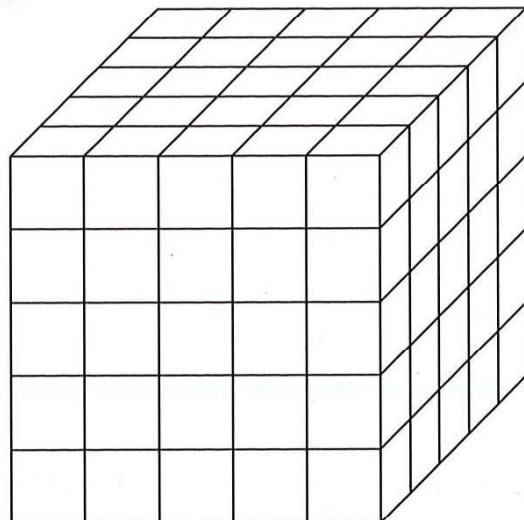
Prolongement

À la suite de l'activité, on peut institutionnaliser les relations entre unités sous la forme :

« $1\text{ m}^3 = 1000\text{ dm}^3...$ » ou sous la forme « $1\text{ dm}^3 = \frac{1}{1000}\text{ m}^3...$ »

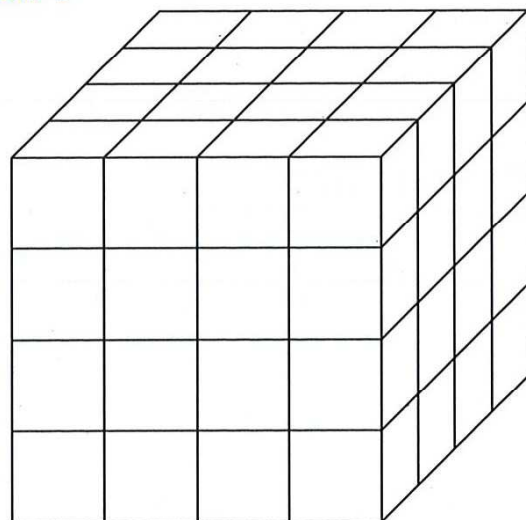
Cette activité peut être adaptée pour illustrer les puissances en classe de quatrième.

Item A



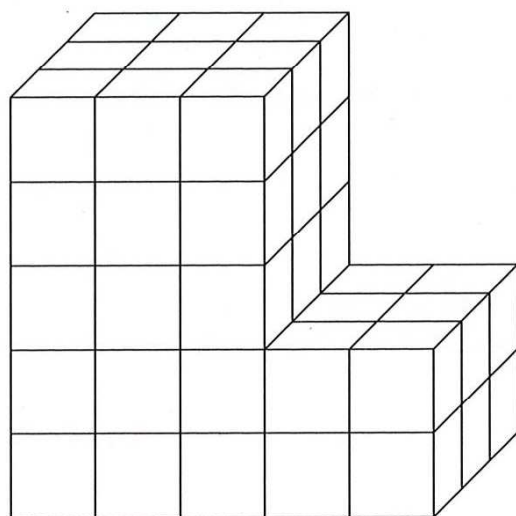
Combien faut-il empiler de petits cubes pour constituer le grand cube ?

Item B



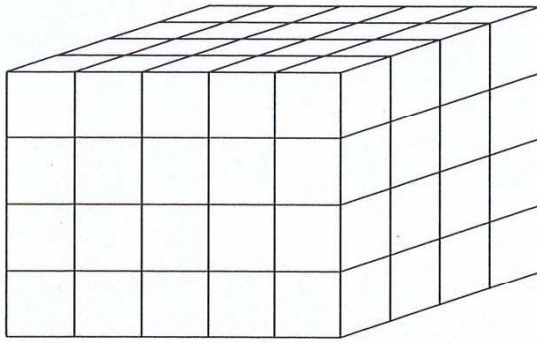
Quelle fraction du volume du grand cube est occupée par un petit cube ?

Item C



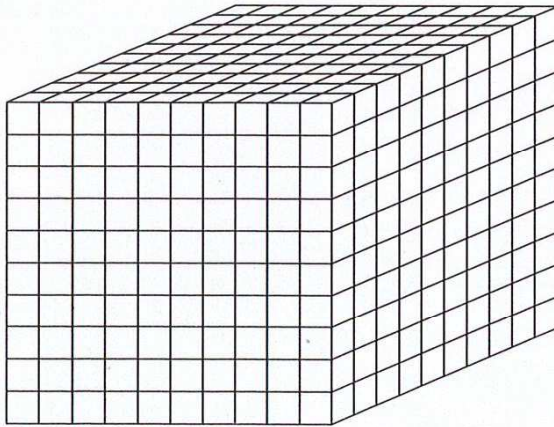
Si on prend le petit cube pour unité de volume, quelle est la mesure du volume du solide ?

Item D



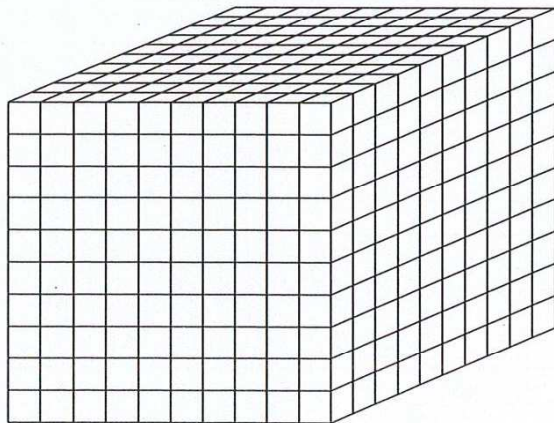
Si on prend tout l'empilement pour unité de volume, quelle est la mesure du volume d'un petit cube ?

Item E



Si l'arête d'un petit cube mesure 1 cm, quelle est la mesure du volume du grand cube ?

Item F



Si l'arête du grand cube mesure 1 m, quelle est la mesure du volume d'un petit cube ?

Activité 20. Du cube aux pavés

Objectif

Donner du sens aux conversions d'unités de volume.

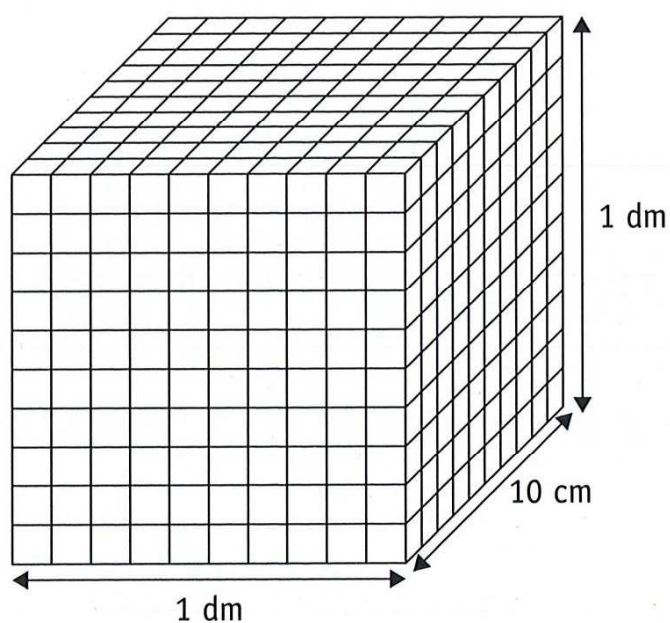
Matériel

Matériel de projection, feuille ou ardoise. (Cf. Site. Document 20.)

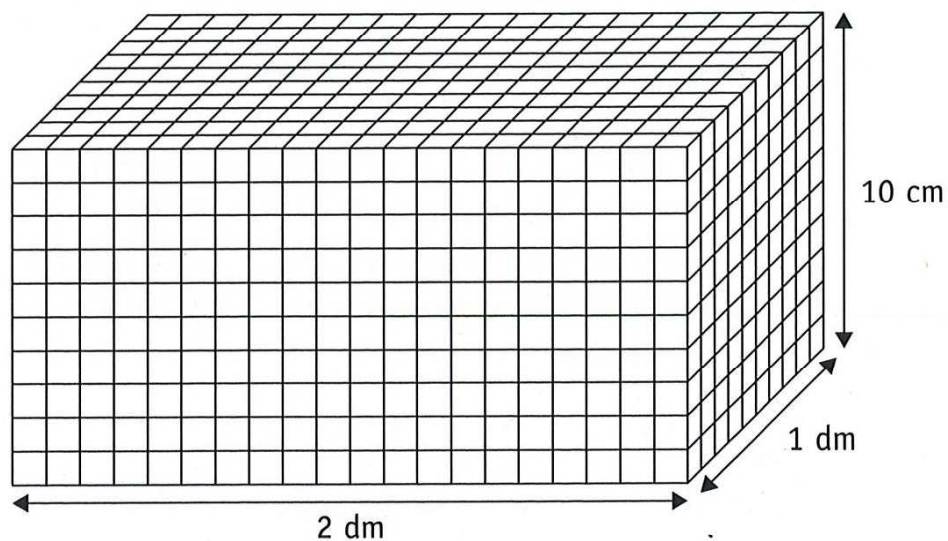
Description

Le professeur projette, un à un, différents pavés droits. À chaque fois il demande de déterminer la mesure de leur volume en dm^3 et en cm^3 . Les réponses sont recensées et débattues.

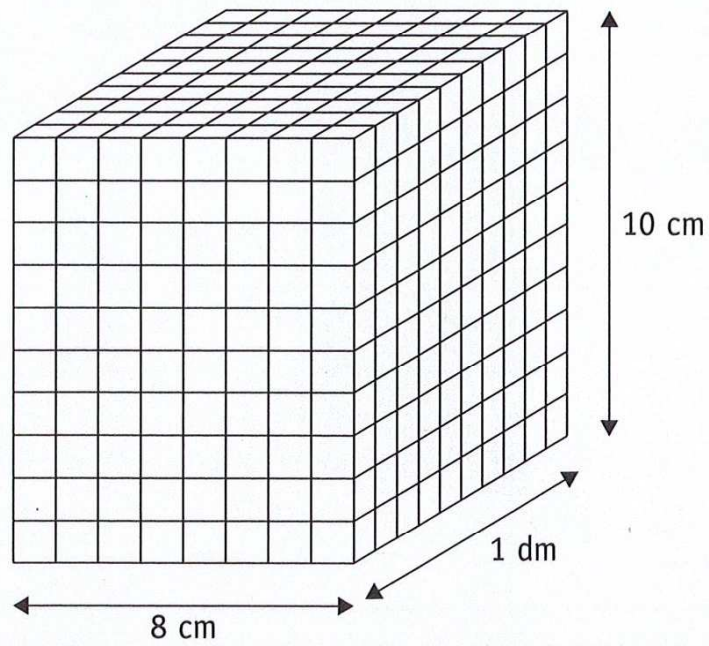
Item A



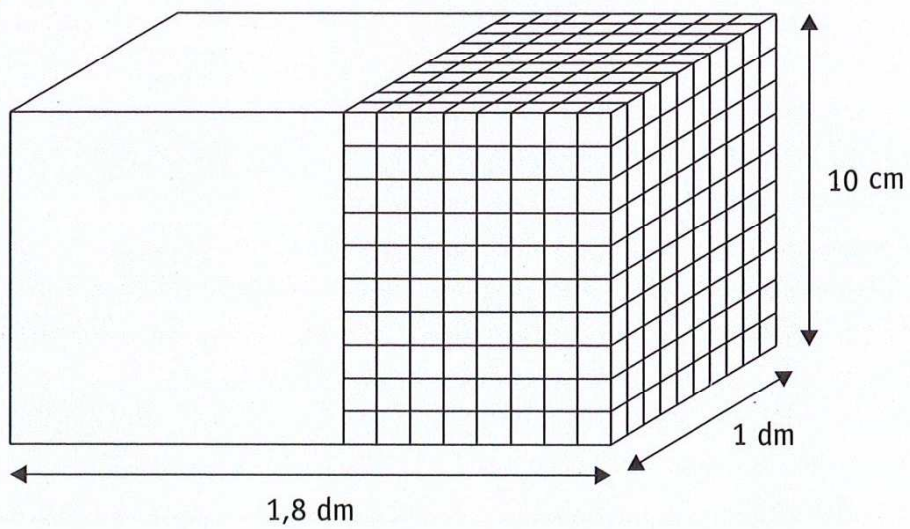
Item B



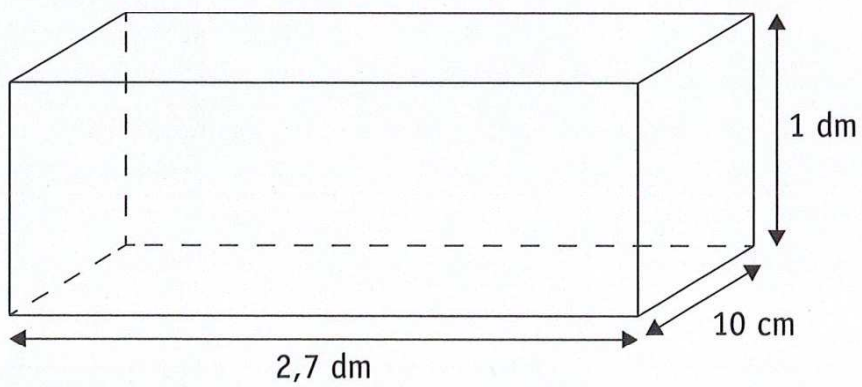
Item C



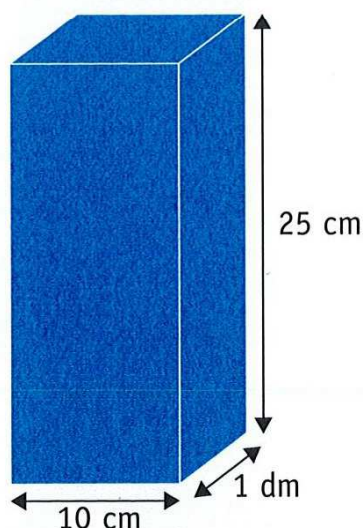
Item D



Item E



Item F

*Analyse*

Au moins deux dimensions des pavés sont données dans des unités différentes (cm, dm) pour obliger les élèves à convertir tout en leur laissant le choix de la stratégie à appliquer. Les cm^3 sont représentés dans les premiers items, puis les élèves doivent les évoquer dans les items suivants. Il s'agit de faire référence à la mesure du volume comme nombre de cubes unités constituant un empilement.

Pour qu'il soit plus facile d'exprimer la mesure en dm^3 qu'en cm^3 , deux des dimensions sont en dm. On peut ainsi déterminer les volumes des pavés en repérant directement les groupements de mille cubes : 1 dm^3 ; 2 fois 1 dm^3 ; 8 dixièmes de dm^3 ; 1 dm^3 et 8 dixièmes de dm^3 .

Deux procédures de résolution sont envisageables :

- mettre toutes les dimensions dans la même unité (cm ou dm), déterminer le volume dans l'unité correspondante, puis recommencer en exprimant les dimensions dans la seconde unité ;
- mettre toutes les dimensions dans la même unité (cm ou dm), déterminer le volume dans l'unité correspondante, puis convertir le volume dans l'autre unité.

La mise en relation des deux procédures permet d'établir que dans tout solide il y a 1000 fois plus de cm^3 que de dm^3 .

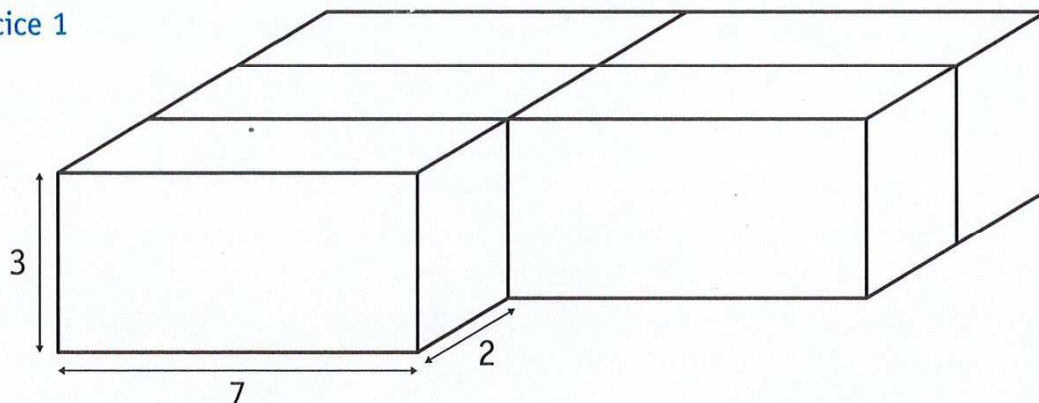
Prolongements

Les conversions peuvent être ensuite entraînées pour elles-mêmes sur des solides concrets (boîte d'allumettes, boîte de craies, etc.) ou représentés ou simplement évoqués dans des questions du type : « Combien faut-il de cm^3 pour remplir un pavé de $5,2 \text{ dm}^3$? » ; « 3 dm^3 , c'est quelle fraction d'un m^3 ? » ; « $32 \text{ cm}^3 = \dots\dots \text{dm}^3$ », etc. Ce n'est qu'après avoir construit par manipulation les relations $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ et $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L} = 100 \text{ cL}$ qu'on pourra proposer des exercices de conversion entre volume et capacité.

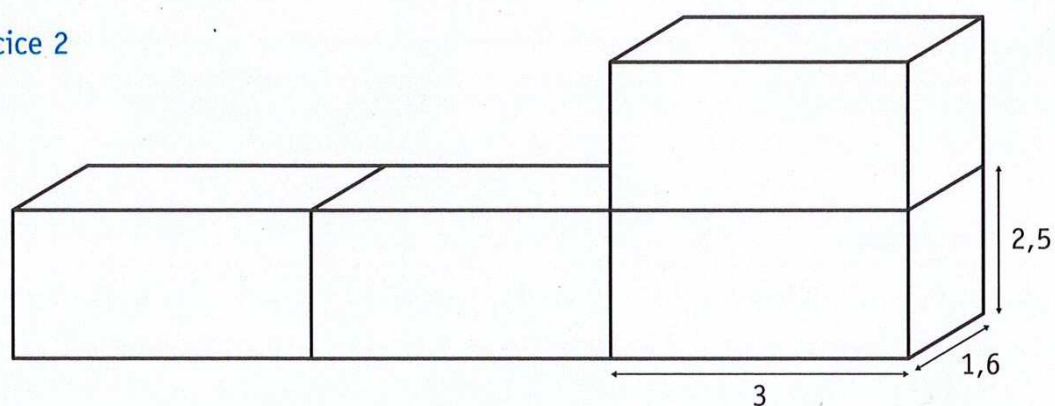
Activité 21. Détermination de volumes

Déterminer les volumes. Les dimensions sont en mètres (Cf. Site. Document 21.)

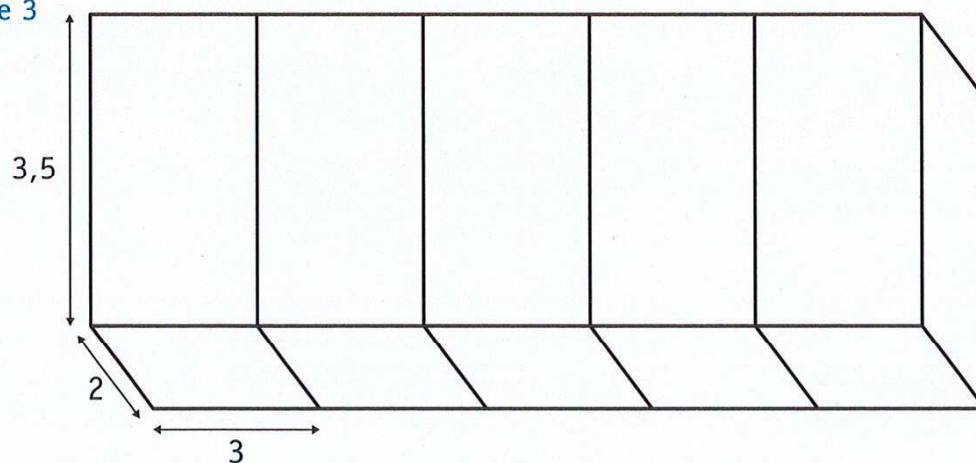
Exercice 1



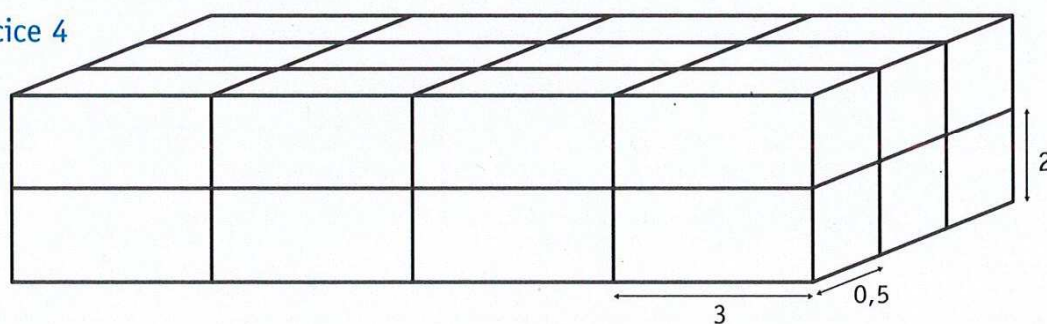
Exercice 2



Exercice 3



Exercice 4



Activité 22. Volumes et capacités

Objectif

Mettre en place et commencer à automatiser les relations $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$; $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ sur lesquelles on pourra s'appuyer ensuite pour effectuer des conversions capacités/volumes.

Matériel

- Pour le professeur : un verre doseur, un cube de 1 cm d'arête, un cube évidé de 1 dm d'arête (et, éventuellement, des petits cubes de 1 cm d'arête, des barres de 10 cubes et des plaques de 100 cubes qui permettent de remplir le grand cube), de la semoule ou tout autre solide en grain que l'on peut transvaser, un récipient bécber, une seringue ou un autre récipient gradué en mL ou cm^3 , et, quand c'est possible, un cube évidé de 1 m de côté.
- Pour l'élève : feuille ou ardoise.

Description

Le professeur propose successivement les énoncés ci-dessous (pas nécessairement dans une même séance). Les élèves doivent choisir une ou plusieurs réponses parmi celles qui sont proposées. Les énoncés sont écrits ou projetés.

- Un cube de 10 cm d'arête a un volume de 10 cm^3 ? 1 dm^3 ? 100 cm^3 ? 1000 cm^3 ?*
- Ce cube de 10 cm d'arête peut contenir au maximum 10 L ? 1 L ? 100 L ? 10 dL ? 10 cL ?*
- À votre avis, un récipient ayant la forme d'un cube de 1 m d'arête peut au maximum contenir 1 L ? 10 L ? 100 L ? 1000 L ?*
- À votre avis, un récipient ayant la forme d'un cube de 1 cm d'arête peut au maximum contenir 1 L ? 1 dL ? 1 cL ? 1 mL ?*
- Avec 10 L on peut remplir exactement dix cubes de 10 cm d'arête ? un cube de 10 cm d'arête ? un cube de 1 m d'arête ? dix cubes de 1 m d'arête ?*
- Avec 10 mL on peut remplir exactement un cube de 10 mm d'arête ? dix cubes de 1 cm d'arête ? un cube de 1 cm d'arête ? dix cubes de 1 mm d'arête ?*
- Complète avec une autre unité : $5 \text{ m}^3 = \dots$; $3 \text{ cm}^3 = \dots$*

Les réponses et les démarches sont recensées et débattues item par item. Le matériel peut être utilisé pour valider les réponses données (totalement ou en partie selon les items) et créer des images mentales.

Analyse

- Les six premiers items sont formulés de façon à ce que les élèves essaient de se créer une image de la situation.
- Dans les items a et b, on cherche à réactiver et établir les équivalences $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L} = 100 \text{ cL} = 10 \text{ dL}$. Il est souvent nécessaire, surtout en sixième, de faire reformuler leurs énoncés pour que les élèves comprennent bien qu'on cherche à déterminer le nombre d'unités nécessaires au remplissage du cube. La validation des réponses se fait avec le matériel : on montre qu' $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$ en transvasant un litre de semoule dans le cube évidé de 1 dm d'arête, et que $1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$ en remplissant tout le cube ou seulement son fond et une hauteur avec des petits cubes de 1 cm d'arête.

La comparaison des résultats validés des deux items permet de montrer ensuite que les conversions de volumes se font par multiplication ou division par des puissances 1000, que celles de capacités se font par les mêmes opérations, mais avec des puissances de 10 et que, par conséquent, les conversions volumes-capacités mêlent les deux systèmes.

- Dans l'item c, on cherche une capacité correspondant à un volume donné. Parmi les réponses proposées, 1 L et 10 L peuvent être écartées en évoquant la taille respective d'une ou dix bouteilles de 1 L et celle d'un cube de 1 m d'arête. Pour trancher le débat autour des réponses 100 L ou 1000 L, la manipulation est difficile et le recours au calcul devient nécessaire. On peut :

- utiliser d'abord l'équivalence $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$;
- déterminer ensuite le volume d'un cube de 1 m d'arête en dm^3 , soit en calculant, $a \times a \times a = 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} \times 10 \text{ dm} = 1000 \text{ dm}^3 = 1000 \times 1 \text{ dm}^3 = 1000 \times 1 \text{ L} = 1000 \text{ L}$, soit en évoquant le remplissage du m^3 par des cubes de 1 dm d'arête.

- Pour l'item d, on pourra écarter les réponses 1 L, 1 dL et surtout 1 cL visuellement, en comparant chacune de ces quantités de liquide versées dans un verre mesureur avec le cube de 1 cm d'arête. Mais il faudra établir la relation $1 \text{ cm}^3 = 1/1000 \text{ dm}^3 = 1/1000 \text{ L}$ pour prouver l'égalité $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$, (ou utiliser ce qui a été établi aux deux premiers items : $1000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ L} = 1000 \text{ mL}$). La réponse 1 cL est très tentante pour les élèves et, spontanément, c'est celle qu'ils donnent avant de se représenter les volumes.

- Dans les items e et f, on cherche le volume correspondant à des capacités données. Les mêmes relations que dans le c et le d peuvent être utilisées pour servir à la validation. Les élèves peuvent, par exemple, faire le lien entre 10 L et dix cubes en utilisant la correspondance $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$ ($1 \text{ L} = 10 \times 1 \text{ L} = 10 \times 1 \text{ dm}^3 = V_{10 \text{ cubes de } 1 \text{ dm d'arête}} = V_{10 \text{ cubes de } 10 \text{ cm d'arête}}$), ou calculer le volume puis le convertir en litre ($V_{10 \text{ cubes de } 10 \text{ cm d'arête}} = 10 \times V_{1 \text{ cube de } 10 \text{ cm d'arête}} = 10 \times 1000 \text{ cm}^3 = 10000 \text{ cm}^3 = 10 \text{ dm}^3 = 10 \text{ L}$). Les formulations du type « cube de 10 cm d'arête » visent à renvoyer les élèves à l'image du *cube unité* correspondant et à réinvestir, pour commencer à les automatiser, les relations établies précédemment.

- Dans l'item g, l'absence de précision dans la consigne est destinée à ouvrir le choix des élèves entre unités de volume et unités de capacités, et à favoriser l'émergence d'autres équivalences, comme $5 \text{ m}^3 = 5000 \text{ 000 mL}$ ou $3 \text{ cm}^3 = 0,003 \text{ L}$, qui puissent être mises en débat.

Réinvestissement

Les relations $1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ L}$; $1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$; $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$ peuvent être institutionnalisées en fin de séance et notées dans le cahier. Pour les automatiser, il est nécessaire de les faire mémoriser et de les utiliser régulièrement tout au long des quatre années du collège. Pour cela, on peut proposer des énoncés similaires à ceux présentés dans cette activité ou en proposer d'autres en variant :

- les supports utilisés : solides concrets (boîtes en plastique), représentés (photographies, perspectives) ; solides simplement évoqués ;

- les types de questions : on peut demander par exemple de calculer une contenance (*combien de litres peut contenir une cuve de forme parallélépipédique de 2 m de haut sur 3 m de long et 2,5 m de large ?*) ou, inversement, de déterminer une ou des dimensions d'un solide de volume donné (*quelles pourraient les dimensions d'une boîte parallélépipédique dont la contenance est de 3 mL ?*).

Heure décimale

Pour les élèves qui arrivent en sixième, les relations entre les heures et les minutes ou entre les minutes et les secondes sont connues. À l'école ils ont été amenés à travailler dans le cadre de problèmes sur les équivalences :

$$0,5 \text{ h} = \frac{1}{2} \text{ h} = 30 \text{ min} ; 0,25 \text{ h} = \frac{1}{4} \text{ h} = 15 \text{ min} ; 0,75 \text{ h} = \frac{3}{4} \text{ h} = 45 \text{ min}.$$

Ces conversions sont utiles non seulement à l'école mais aussi à toute personne qui veut vérifier sa fiche de paie ou la facture de son garagiste. Au collège, ce travail doit être repris, même si aucune virtuosité n'est souhaitée dans les programmes. À l'occasion du travail sur les fractions, on peut envisager de reprendre les conversions dans le système sexagésimal mais aussi d'aborder, dans des séances de calcul réfléchi, le passage de l'écriture décimale à l'écriture sexagésimale, et réciproquement, dans le cas des dixièmes d'heures.

Activité 23. Conversions d'écritures

Objectif

Comprendre la relation liant les écritures décimale et sexagésimale des mesures de temps.

Matériel

Tableau ou matériel de projection, feuille ou ardoise, cadran d'horloge dessiné ou projeté.

Description

Le professeur écrit les données au tableau. Il propose aux élèves d'exprimer en minutes les durées suivantes : 2 h 5 min ; 3,25 h ; 2,5 h ; 0,80 h ; 1,2 h.

Les différents résultats sont recensés et débattus.

Analyse

Les nombres sont choisis pour susciter des réponses diverses et permettre d'engager le débat.

- Le premier et le troisième items sont à mettre en parallèle. Leur comparaison permet d'établir la distinction d'écriture entre :

$$2 \text{ h } 5 \text{ min} = 120 \text{ min} + 5 \text{ min} = 125 \text{ min}.$$

et

$$2,5 \text{ h} = 2 \text{ h} + \frac{5}{10} \text{ h} = 2 \text{ h} + \frac{1}{2} \text{ h} = 2 \text{ h} + 30 \text{ min} = 120 \text{ min} + 30 \text{ min} = 150 \text{ min}.$$

- Dans le deuxième item, le rappel de l'égalité $0,25 = \frac{1}{4}$ permet d'invalider la réponse 205 mn en écrivant :

$$3,25 \text{ h} = 3 \text{ h} + \frac{25}{100} \text{ h} = 3 \text{ h} + \frac{1}{4} \text{ h} = 180 \text{ min} + 15 \text{ min} = 195 \text{ min}.$$

- Pour les quatrième et cinquième items, une réponse fausse, 80 min, commune aux deux items s'auto-invalidé. Les réponses 8 min et 62 min s'invalident par retour au sens de l'écriture décimale :

$$0,80 \text{ h} = \frac{80}{100} \text{ h} = \frac{8}{10} \text{ h} \neq 8 \text{ min} \text{ et } 1,2 \text{ h} = 1 \text{ h} + \frac{2}{10} \text{ h} \neq 1 \text{ h } 2 \text{ min}.$$

- L'utilisation d'une horloge permet de visualiser les fractions d'heures. Ainsi, le professeur peut montrer un secteur angulaire qui correspond à 6 minutes pour illustrer le dixième d'heure.

Prolongement

On pourra institutionnaliser la relation :

$$0,1 \text{ h} = \frac{1}{10} \times 1 \text{ h} = \frac{1}{10} \times 60 \text{ min} = 6 \text{ min}.$$

Elle sera réinvestie en proposant des problèmes du même type et, par la suite, le problème inverse : donner l'écriture décimale en heure de 105 min, 192 min, etc.

La notion de vitesse est l'occasion de revenir sur ces conversions d'écriture et, en classe de quatrième, on pourra proposer de déterminer mentalement le temps nécessaire à un train pour parcourir 630 km à une vitesse constante de 300 km.h⁻¹.

Pour travailler le sens du nombre, il est intéressant de varier les contextes pour permettre aux élèves d'établir des liens. S'il n'est pas rare de voir, en classe de sixième, des élèves savoir déterminer $\frac{3}{4}$ de 60 min et, dans le même exercice, ne pas savoir calculer les $\frac{3}{4}$ du nombre 60, d'autres sont capables les années suivantes de dire immédiatement que $\frac{90}{360} = \frac{1}{4}$ et même que $\frac{270}{360} = \frac{3}{4}$ en visualisant 270° sur 360° sur un cercle.

Retenir des formules

Dans les programmes du collège, un certain nombre de formules sont à retenir non pour elles-mêmes mais pour les procédures de calculs qu'elles recouvrent. Ainsi mémoriser la formule « pierre carrée » pour πR^2 dans le calcul de l'aire du disque n'a pas d'intérêt si cette mémorisation n'est pas associée à la fois à la procédure « prendre le rayon du disque, calculer son carré, multiplier le résultat obtenu par π » et à la procédure permettant de calculer le rayon du disque à partir de la donnée de son aire.

Cet aspect procédural porté par l'expression littérale des formules d'aire, de périmètre ou de volume, mais aussi de certaines expressions algébriques comme les identités remarquables, n'est pas toujours perçu par les élèves. Certains d'entre eux, capables de réciter la formule, ne parviennent pas à l'appliquer.

Nous profitons de la concentration de la classe pendant les séances de calcul mental et de la possibilité de proposer un grand nombre d'exercices en un temps restreint pour favoriser l'automatisation des procédures liées aux formules et contribuer ainsi à leur mémorisation.

Activité 24. Formules d'aires

Objectifs

Automatiser les procédures de calcul d'aire. Différencier aire et périmètre.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. (Cf. Site. Documents 22 à 27.)

Description

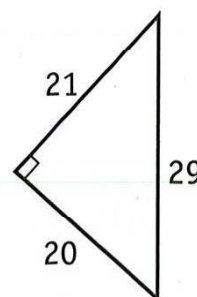
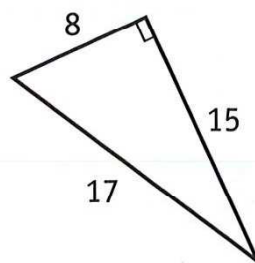
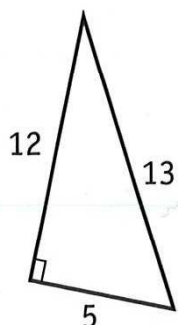
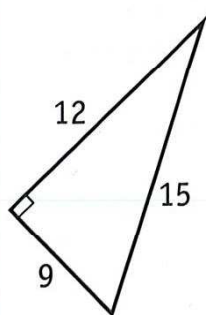
Les énoncés sont projetés, écrits au tableau ou présentés sur une affiche. Dans certains cas ils peuvent être lus oralement.

Les résultats sont recensés et débattus.

Exemples d'énoncés

- Triangles rectangles

Calculer l'aire et le périmètre des triangles ci-dessous. Les dimensions sont en cm et les dessins ne sont pas à l'échelle.



- Disques

Quel est le périmètre d'un disque de 8 m de diamètre en prenant 3,1 pour valeur approchée de π ? Quel est le périmètre d'un disque de 100 cm de diamètre en prenant 3,1 pour valeur approchée de π ?

Quelle est la valeur exacte du périmètre d'un disque de 6 cm de rayon ?

On prend 3 pour valeur approchée de π . Quel est le rayon d'un disque dont une valeur approchée du périmètre est 48 cm ?

On prend 3 pour valeur approchée de π . Quel est le rayon d'un disque dont une valeur approchée du périmètre est 108 cm ?

Quelle est la valeur exacte du périmètre d'un disque de 18 cm de rayon ?

Quel est le périmètre d'un disque de 2000 m de diamètre en prenant 3,14 pour valeur approchée de π ?

Analyse

L'utilisation de dessins facilite la compréhension et allège la mémoire de travail. Mais pour favoriser la création d'images mentales, il est préférable d'alterner les différentes formes d'énoncés.

Les nombres sont choisis pour que l'essentiel du travail mental se fasse autour de la formule à retenir. Ils font également partie des répertoires de résultats que nous souhaitons voir mémoriser par les élèves. Dans le cadre d'une progression spiralee, on peut entretenir à la fois les connaissances sur les formules et celles sur les relations arithmétiques entre nombres.

Le professeur veille à faire verbaliser les procédures de calcul et à les associer à la formule correspondante qui peut être rappelée aux élèves avant de commencer la séance.

La répétition d'exercices de ce type à différents moments de l'année et de la scolarité rend utile la mémorisation et facilite l'automatisation des procédures.

Activité 25. Identités remarquables

En troisième, le travail sur les identités remarquables ne s'arrête pas à la restitution des formules. À ces égalités, il faut aussi savoir associer les procédures qui permettent de les utiliser avec des nombres et des lettres qui ne sont pas ceux de la formule. Ces procédures mobilisent les propriétés des opérations pour calculer ou reconnaître un double produit, et aussi certains carrés, par exemple celui de $2x$.

Objectifs

Découvrir puis automatiser les identités remarquables.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Les énoncés sont écrits ou projetés.

Découverte

• Description

Il s'agit de développer et réduire le plus rapidement possible des expressions. Les élèves sont autorisés à écrire un ou deux calculs intermédiaires, mais le temps est limité. On peut proposer par exemple :

$$(x + 2)^2 ; (1 + y)^2 ; (z + 5)^2 ; (a - 3)^2 ; (6 - b)^2.$$

Pour chacune des propositions, quand la moitié de la classe a produit des résultats, ceux-ci sont recensés puis débattus.

- Analyse

Le temps étant limité, beaucoup d'élèves commencent par produire des réponses fausses et le double produit est souvent absent. Ces réponses doivent être invalidées par un contre-exemple (qui peut être numérique). Les réponses justes sont validées par l'utilisation de la double distributivité.

Après chaque essai, le professeur fait verbaliser les procédures des élèves qui ont réussi jusqu'à ce que le double produit soit évoqué. Il peut alors faire préciser en langage courant la procédure qui permet d'effectuer rapidement le développement avant de proposer à la classe de développer $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$. Remarquons que les élèves commencent souvent par le calcul des deux carrés avant d'effectuer le double produit. Leur procédure se traduit alors plutôt par la formule $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ que par $a^2 + 2ab + b^2$.

Le même travail peut être proposé pour la découverte de la troisième identité $(a + b)(a - b)$.

Réinvestissement

- Description

Le même dispositif est repris avec cette fois-ci des expressions plus complexes.

On peut proposer par exemple :

$$(3x - 7)^2 ; (0,2x + 5)^2 ; (x - 0,8)(x + 0,8) ; (2a + 3b)^2 ;$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 2\right)\left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right)$$

Les résultats sont recensés puis débattus soit par item, soit par groupe d'items.

- Analyse

On peut varier les énoncés en jouant sur le type des nombres proposés, le nombre de variables, et, éventuellement, sur le degré des polynômes.

C'est la verbalisation des procédures et la répétition de ce type d'exercices qui permettent l'automatisation des identités remarquables.

- Prolongement

Le travail d'entraînement peut se prolonger dans des exercices de factorisation. On peut également faire compléter des égalités pour travailler en particulier le double produit.

Exemples :

– factoriser : $9x^2 - 18x + 36$; $4x^2 + 9 - 6x$; $x^2 - 81$.

– compléter : $(a - 6)^2 = a^2 \dots 36 \dots$; $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + \dots + \dots$;

$(\dots - x)^2 = 36 - 12x + \dots$; $(\dots - y)(\dots + y) = 9 - \dots$

Opérations sur les fractions

L'enseignement du calcul en écriture fractionnaire se limite souvent à l'apprentissage de règles formelles. Les élèves considèrent souvent l'ensemble numérateur/dénominateur comme une juxtaposition de deux nombres entiers et appliquent des procédures opératoires qui n'ont pas toujours de sens pour eux : ainsi ils confondent souvent la multiplication d'une fraction par un entier avec le passage d'une écriture fractionnaire à une autre écriture fractionnaire d'un même nombre.

L'activité décrite ici a été expérimentée en classe de cinquième. Elle propose d'utiliser les changements d'écriture de nombres, en écriture fractionnaire ou non, pour aider à la compréhension des procédures de calcul et favoriser ainsi leur automatisation ultérieure.

Activité 26. Le compte est bon (avec des fractions)

Objectifs

- Comprendre qu'un même nombre peut s'écrire sous différentes formes.
- Entraîner les techniques opératoires sur les fractions.

Matériel

Tableau, feuille ou ardoise.

Prérequis

Addition et soustraction sur des fractions ayant le même dénominateur.

Description

Sur le principe du jeu « le compte est bon », le professeur propose de trouver une fraction à partir d'une liste de nombres dont certains sont des fractions. Les quatre opérations sont autorisées.

Le professeur donne la consigne :

« Voici des nombres : $1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \frac{1}{3} ; \frac{5}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{3}{6} ; \frac{4}{7} ; \frac{5}{8} ; \frac{6}{9}$ Pour trouver le nombre $\frac{9}{8}$ vous aurez le droit de faire les opérations que vous voulez et d'écrire si besoin des résultats intermédiaires. Attention, les **nombres** ci-dessus sont tous différents, vous ne pourrez les utiliser qu'une seule fois mais **sous l'écriture de votre choix**. »

Les élèves cherchent individuellement et les plus rapides sont invités à chercher d'autres méthodes. Au terme de la recherche, l'enseignant recense les procédures et veille à ne pas les dénaturer en les retranscrivant au tableau. Les différentes propositions sont soumises à la classe.

Analyse

Il s'agit ici d'analyser les procédures possibles.

Beaucoup de procédures sont susceptibles d'émerger. Nous en donnons quelques exemples ci-dessous.

- *Procédures erronées :*

- ♦ $4 + \frac{5}{8} = \frac{9}{8}$ amène à réfléchir aux notions d'unité et de fraction de l'unité.

L'invalidation peut se faire en s'appuyant sur la conception de « la fraction partage » (4 unités, c'est 4 fois huit huitièmes d'unité), sur celle de la fraction quotient ($\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0,625$), soit encore en référence aux ordres de grandeur ($4 + \frac{5}{8}$ est supérieur à 4 donc à 2).

- ♦ $\frac{5}{4} \times 2 - 1 = \frac{10}{8} - 1$ peut être invalidé comme la procédure précédente et soulève cette question : comment obtenir une écriture équivalente d'un nombre ? Elle permet de rappeler que $\frac{5}{4}$ et $\frac{10}{8}$ sont des écritures d'un même nombre et que le passage de l'une à l'autre ne constitue pas une opération mais une transformation d'écriture.

- *Procédures justes :*

- ♦ $\frac{5}{8} + \frac{3}{6} = \frac{5}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8} + \frac{4}{8}$ permet de montrer l'intérêt de pouvoir disposer de plusieurs écritures d'un même nombre.

- ♦ $\frac{5}{4} - (\frac{1}{4} \text{ divisé par } 2)$ permet d'envisager la division d'un nombre en écriture fractionnaire par un entier. Certains élèves considèrent que « diviser un quart en deux, c'est prendre sa moitié, donc c'est un huitième », d'autres préfèrent dire que « $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ et que la moitié de deux huitièmes c'est un huitième ».

Synthèse

- Les techniques de calcul en écriture fractionnaire nécessitent souvent l'utilisation de différentes écritures d'un même nombre.
- Un changement d'écriture ne change pas la valeur du nombre.
- On peut diviser une fraction par un entier.

Prolongements

Une fois le principe du jeu acquis, et quand la classe possède quelques méthodes de résolution efficaces, il est intéressant de le proposer régulièrement. Sa pratique est appréciée des élèves et la vitesse devient un enjeu. La verbalisation et la validation des démarches restent nécessaires car, en cherchant à gagner du temps, les élèves font à nouveau des erreurs classiques sur lesquelles il faut revenir.

Avec les mêmes nombres de départ, on peut proposer d'essayer d'atteindre les nombres

suivants : $\frac{6}{7}$; $\frac{4}{9}$; $\frac{9}{24}$; $\frac{9}{28}$; etc. Mais d'autres nombres peuvent être choisis.

Cet exercice peut être repris ultérieurement et adapté dans les classes supérieures.

Estimer des ordres de grandeurs

Approcher des résultats

Les documents-ressources accompagnant les programmes de l'école et du collège soulignent la nécessité de faire pratiquer le calcul approché. Ils insistent sur son utilité « à la fois pour anticiper un ordre de grandeur et pour contrôler l'exactitude d'un résultat ».

L'expérience montre que le calcul approché s'appuie sur des représentations et des méthodes que les élèves n'ont pas toujours à leur disposition. Par exemple, pour déterminer l'ordre de grandeur d'un produit, on peut calculer le produit de valeurs approchées des facteurs et réajuster. Ainsi, comme $\frac{78}{43}$ c'est un peu moins que 2, et que 19 608 c'est un peu moins de 20 000, alors le produit de $\frac{78}{43}$ par 19 608 est un peu moins que 40 000 donc environ 35 000. Une autre méthode consiste à encadrer le produit par des produits de valeurs approchées et à réajuster si besoin. Comme $\frac{78}{43}$ est compris entre 1,5 et 2, et que 19 608 est compris entre 18 000 et 20 000, alors le produit de $\frac{78}{43}$ par 19 608 est compris entre 27 000 et 40 000. Ces stratégies qui s'appuient sur une connaissance des nombres et sur une utilisation intuitive de la proportionnalité ne sont pas spontanées. Il est donc nécessaire de les construire dans le temps tout en développant en parallèle des moyens de contrôle. C'est le but des activités de calcul mental proposées ci-après.

Activité 27. Approcher une somme

L'utilisation des valeurs approchées pour anticiper l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul n'est pas une démarche courante pour des élèves arrivant au collège. Il n'est pas

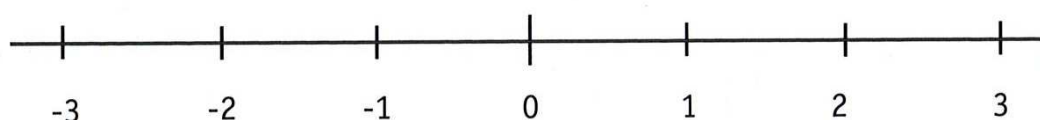
rare de voir certains d'entre eux, à qui on demande l'ordre de grandeur du résultat d'un calcul, commencer par chercher sa valeur exacte et ensuite l'approcher. Il est donc nécessaire de proposer des situations où cette méthode n'a pas de sens.

Objectif

Utiliser les valeurs approchées des termes d'une somme pour calculer sa valeur approchée.

Matériel

Tableau ou matériel de projection, une droite graduée par élève, une autre dessinée ou projetée au tableau pour la mise en commun.



Description

Le professeur donne la consigne et écrit les données au tableau.

Placer approximativement les résultats des sommes suivantes sur l'axe gradué :

- $(-1,27) + (+2,34)$; $(+2,087) + (-3,245)$;
- $(-0,857) + (-1,3333)$; $(+1,0547) + (+0,82)$;
- $(+0,867) + (-\frac{3}{4})$; $(-1,2089) - (-\frac{4}{3})$

Les différentes réponses sont recensées et débattues après chaque item.

Analyse

Les données des items rendent le calcul approché pratiquement incontournable, sauf dans le premier calcul où les nombres ont été choisis de façon à ce que le calcul exact puisse encore être effectué. Cette procédure montrera ses limites dès le calcul suivant, surtout si le temps est limité.

C'est la graduation de l'axe d'unité en unité qui détermine la précision (de l'ordre du dixième) avec laquelle effectuer les calculs.

Le support de la droite numérique autorise la procédure de calcul qui s'appuie sur des déplacements sur un axe gradué. Au moment de la mise en commun, elle peut constituer un moyen de validation de l'opération à effectuer et permettre ainsi de centrer le débat davantage sur le choix des valeurs approchées que sur la validité de l'opération effectuée.

Au terme de l'activité, on pourra noter en synthèse que pour trouver un ordre de grandeur d'une somme de nombres, il est possible de faire la somme des valeurs approchées de chacun de ces nombres.

Prolongement

L'activité peut être adaptée et reprise dans toutes les classes du collège. Par exemple on peut :

- proposer des nombres positifs en classe de sixième ;

- faire placer approximativement des nombres tels que : $1,354 - 0,03245 \times 102$ en classe de quatrième ;
- situer des sommes telles que $\pi - \sqrt{2}$ en classe de troisième.

On peut également jouer sur le pas des graduations pour induire des précisions plus ou moins grandes :

- graduer de dizaine en dizaine autorisera des arrondis à l'unité ;
- graduer de dixième en dixième demandera une précision atteignant quasiment le centième.

À partir de la classe de quatrième, on peut également proposer de placer des nombres sur un axe gradué suivant les puissances de 10 et demander de placer des nombres comme $1\,234\,567 - 453\,215$.

Activité 28. Contrôler la valeur d'un produit

Pour contrôler la valeur d'un produit, les stratégies expertes sont multiples et parfois combinées : observation du dernier chiffre, calcul du nombre de chiffres après la virgule, ordre de grandeur des facteurs, etc. L'activité présentée ici est conçue pour favoriser l'utilisation de cette dernière procédure.

Objectif

Contrôler la plausibilité d'un produit par l'ordre de grandeur de ses facteurs.

Matériel

Tableau ou matériel de projection, ardoise ou feuille de brouillon.

Description

Le professeur donne la consigne et écrit ou projette les énoncés.

Pour chaque calcul, choisir parmi les résultats proposés celui qui convient.

Calcul	A	B	C	D
$7 \times \frac{3}{4}$	7	0,75	5,25	21
$2,325 \times 452,8$	904,76	1052,76	222,76	92,76
$\frac{78}{43}$ de 19608	35568	3556,8	35,568	350568
$1824 \times 0,028$	745,072	2843,072	51,072	5209,722

Les différentes propositions sont décomptées et débattues.

Analyse

À chaque fois, les résultats proposés dans l'énoncé sont donnés afin qu'aucune des réponses ne puisse s'éliminer facilement par des procédures mettant en œuvre le der-

nier chiffre ou le nombre de chiffres après la virgule. Ils ont été choisis pour que deux réponses s'éliminent facilement par comparaison d'un des deux facteurs à l'unité, de façon à autoriser la méthode de contrôle qu'on pourrait énoncer ainsi : « Si l'un des deux facteurs est inférieur à 1, alors le produit est inférieur à l'autre facteur. Dans le cas contraire, le produit est supérieur à chacun des facteurs. » Le choix entre les deux réponses restantes peut se faire par exemple en affinant l'ordre de grandeur du plus petit des facteurs.

On peut aussi trouver des élèves qui utilisent directement des valeurs approchées des facteurs pour déterminer l'ordre de grandeur du produit et effectuer leur choix.

Prolongement

Ce sont les nombres proposés comme résultats qui permettent de mettre en avant une procédure plutôt qu'une autre : en jouant sur ces nombres, on peut soit favoriser la recherche du dernier chiffre comme dans le premier exemple du tableau suivant, soit favoriser le nombre de chiffres après la virgule comme sur le second, soit favoriser le choix d'un arrondi pertinent comme dans le troisième.

Calcul	A	B	C	D
$3,13 \times 4,7$	14,787	14,805	14,711	14,683
$5,43 \times 71,432$	387,87576	385,543756	384,926	386,76
$24,73 \times 78,34$	2348,3482	1937,3482	1449,3482	2018,3482

Ces différentes procédures peuvent être combinées et entraînées dans des exercices comme le suivant :

Parmi les égalités suivantes, lesquelles sont sûrement fausses ?

$312,5 \times 27,87 = 8700,326$; $312,5 \times 27,87 = 9037,25$; $312,5 \times 27,87 = 8709,375$;
 $312,5 \times 27,87 = 6570,425$; $312,5 \times 27,87 = 9307,675$.

Estimer des mesures

On ne dispose pas toujours des moyens matériels nécessaires à la mesure d'une grandeur telle que la hauteur d'un bâtiment ou le volume d'une pièce. Pour approcher cette mesure, on s'appuie sur des références perceptives ou culturelles, comme la taille d'un mètre, la taille humaine, la hauteur d'un étage... que l'on reporte, ajoute, multiplie... pour obtenir un résultat.

L'estimation des mesures joue aussi un rôle important dans le contrôle de la vraisemblance des résultats. Un œuf de 1 kg ou une maison de 3 km de haut sont des réponses qui devraient s'invalider d'elles-mêmes, à condition que l'élève soit capable d'apprécier ce qu'est un kilogramme ou un kilomètre.

Il est donc important que les élèves disposent de repères sur lesquels s'appuyer pour pouvoir résoudre des problèmes et établir des procédures de contrôle. Ces repères se construisent dans le temps en multipliant les expériences : estimation, report d'étalons, mesurage effectif dans une unité donnée, calcul de mesures.

Le dispositif utilisé au cours des séances de calcul mental peut être mis à profit pour aider à construire des références communes à la classe. C'est le cas de l'activité présentée ci-dessous.

Activité 29. Estimation de longueurs

Objectif

Fixer quelques références culturelles sur les mesures de longueurs.

Matériel

Matériel de projection ou tableau, feuille ou ardoise.

Prévoir différents instruments de mesure ou de report de mesure (mètre, ruban, ficelle, etc.) pour le professeur.

Description

• Phase 1

Le professeur donne la consigne, lit les données et les écrit au tableau.

Quelle est la hauteur de la salle ?

Quelle est la hauteur du tableau (ou de la porte) ?

Quelle est la hauteur d'une table ?

Les différentes réponses sont recensées et débattues pour regrouper celles qui sont proches ou égales et en invalider certaines. Les procédures sont toutes explicitées avant d'être validées par mesurage.

• Phase 2

Le professeur propose un nouvel énoncé.

Quelle est la distance du tableau au fond de la salle ?

Quelle est la longueur de la table (ou la largeur de la porte, etc.) ?

Quelle est la longueur de la règle du tableau ?

Les différentes réponses sont recensées et débattues.

Analyse

Pour estimer des mesures de longueurs verticales ou horizontales, on n'utilise pas toujours les mêmes références. Pour la verticale, on se réfère en général à la taille humaine ou à la hauteur d'objets posés dans un plan vertical. Pour l'horizontale, la longueur d'un pas, d'un bras, l'empan de la main, l'envergure peuvent être des étalons privilégiés. On peut aussi s'être construit une image du mètre ou du double décimètre

et être capable de manière perceptive d'apprécier un mètre ou un décimètre. Chacune des phases travaille un aspect en particulier.

Le contexte des énoncés est choisi dans le cadre de la classe pour fixer des références qui puissent être validées.

Les dimensions sont choisies de l'ordre de grandeur du mètre pour permettre aux élèves d'intérioriser l'unité 1 mètre.

Les élèves peuvent procéder par estimation globale et fournir directement une réponse ou bien se référer à un étalon reporté mentalement un certain nombre de fois. La réponse peut alors être le résultat d'un comptage ou d'une opération.

Les erreurs peuvent porter sur la valeur de l'estimation globale (c'est haut donc c'est au moins dix mètres), sur l'évaluation de la taille de l'étalon (la hauteur de la porte est de trois mètres), sur l'évaluation du nombre de reports de l'étalon, sur les calculs et sur les changements éventuels d'unités.

Les écarts entre les estimations incitent au débat et justifient plus tard l'éventuel recours au mesurage avec instruments pour valider les réponses.

Prolongement

Pendant le cours, estimer des dimensions pour les vérifier ensuite à la maison soit par un mesurage soit par une recherche documentaire : dimensions d'un lit, largeur d'un frigo, hauteur d'un placard de cuisine ou d'une armoire, hauteur ou largeur d'une cage de foot, hauteur ou longueur d'une voiture, dimensions du collège, etc.

Les estimations d'une autre grandeur que la longueur sont plus délicates à faire par report mental d'étalon. Dans le cas des volumes et des aires, le dénombrement de petits étalons devient pratiquement impossible et l'impression visuelle est parfois trompeuse. Dans le cas des masses, l'œil évalue le volume et l'estimation est liée à la connaissance de la masse volumique.

Pour estimer des aires, des volumes ou des masses, il est souvent nécessaire de calculer à partir d'estimations de longueurs et de connaissances scolaires ou sociales. En procédant ainsi, on multiplie les erreurs et on perd encore de la précision.

Vers l'écriture scientifique

En classe de quatrième, les activités en liaison avec les sciences expérimentales, en particulier avec la physique, insistent sur l'usage de l'écriture scientifique d'un nombre. Celle-ci est en effet utile pour fixer l'ordre de grandeur des mesures, aussi bien dans le domaine microscopique qu'à l'échelle astronomique. Cette fonction d'approche d'un résultat est une opération mentale qui ne nécessite pas à proprement parler de calcul. Pourtant elle nécessite un apprentissage qui peut parfaitement s'effectuer dans des séances de type calcul mental.

Activité 30. Donner un ordre de grandeur à l'aide des puissances de 10.

Objectif

Entraîner l'usage des puissances de 10 pour approcher un résultat.

Matériel

Matériel de projection ou tableau, feuille ou ardoise et photocopies de l'énoncé de l'activité.

Prérequis

Savoir écrire un nombre sous la forme d'une puissance de 10.

Phase 1 : appropriation

Description

Le professeur distribue l'énoncé photocopié et rappelle la consigne :

Écrire un ordre de grandeur des mesures suivantes :

- la distance du soleil à la terre est en moyenne de 149 597 870,691 km ;
- la masse d'un atome de carbone est de 0,000 000 000 000 000 000 000 019 92 kg.

Les différentes réponses sont recensées et débattues.

Analyse

La consigne ne demande pas explicitement d'utiliser les puissances de 10. Pour la première question, on peut donc s'attendre à des réponses du type 150 000 000 km (ou 150 millions de kilomètres). Pour la seconde question les réponses données en écriture décimale ou du type « deux centièmes de millionième de milliardième de milliardième » montrent rapidement leurs limites et, en retour, prouvent l'efficacité des écritures utilisant les puissances de 10.

La consigne ne précise pas non plus le nombre de chiffres significatifs demandé, ni l'arrondi à effectuer. Il est fréquent qu'au moment de la mise en commun différents résultats valides apparaissent. C'est leur diversité qui conduit par la suite l'enseignant à modifier la consigne proposée.

Phase 2 : entraînement

Description

La consigne est précisée :

Écrire, en utilisant les puissances de 10, un ordre de grandeur des nombres suivants.

On gardera un chiffre significatif.

1 234 567 890 ; 0,000 000 231 548 ; 227 666 789 456 215 ; 0,000 020 132 456 ; 1,000 007 004 551 ; 0, 007 435 888.

Analyse

L'exercice est maintenant proposé dans un cadre numérique. En effet, il s'agit de mettre en place les opérations mentales portant sur les nombres plus que sur les mesures.

Les nombres sont donnés de façon que l'arrondi se fasse toujours au nombre inférieur. Ce choix a été fait afin que, plus tard, puisse être établi aisément le lien entre valeur approchée et écriture scientifique du nombre.

Prolongement

L'activité peut être reprise sous la même forme dans les séances suivantes. Elle peut être modifiée de façon à proposer des calculs dont les élèves devront donner l'ordre de grandeur du résultat en utilisant des puissances de 10.

Quand les élèves commencent à avoir automatisé le processus permettant de fournir la valeur approchée d'un nombre à un chiffre significatif, ils peuvent étendre la procédure à l'écriture scientifique. Il est alors temps pour le professeur de l'introduire en s'appuyant sur des arguments du type : « 2×10^9 est une écriture significative d'une valeur approchée de 2 143 658 790 pratique à utiliser alors que $2,143\,658\,79 \times 10^9$ est une autre écriture significative assez similaire, mais qui a l'avantage d'être exacte. »

Autres activités

Chercher : trouver la règle

La recherche d'une relation liant des suites de nombres puis l'utilisation de cette relation en calcul mental permettent de commencer à construire la notion de variable et, progressivement, d'introduire des formules.

Dans ce type d'activité, le calcul mental et la connaissance de relations arithmétiques entre les nombres est utile pour faire des conjectures et les tester.

Activité 31. Recherche et utilisation d'une relation liant des nombres

Phase 1 : Recherche d'une relation

Objectif

Émettre des conjectures et les tester.

Matériel

Rétroprojecteur ou tableau, feuille ou ardoise.

Description

L'énoncé ci dessous est proposé aux élèves :

Trouver la règle simple qui permet de fabriquer le nombre de droite à partir de celui de gauche : $1 \rightarrow 6$; $2 \rightarrow 9$; $3 \rightarrow 12$; $8 \rightarrow 27$.

Les élèves cherchent individuellement, puis suit une mise en commun qui vise à valider ou invalider les différentes propositions sans qu'aucune ne soit privilégiée.

Analyse

Les élèves doivent rechercher, tester et formuler une procédure simple ou une succession de procédures simples permettant de passer du nombre de gauche au nombre de droite (par exemple : ajouter 5 ; multiplier par 6 ; ajouter 2 et multiplier par 2 ; ajouter 1 et multiplier par 3). Règles attendues :

- multiplier le nombre par 3, puis ajouter 3 au résultat ;
- ajouter 1 au nombre de départ puis le multiplier par 3 ;
- $3 \times (n + 1)$ ou $3n + 3$ (pas en début de collège).

Synthèse

Selon le niveau de classe et l'objectif que le professeur se fixe, la synthèse pourra mettre en lumière l'équivalence des règles en s'appuyant sur la distributivité ou porter davantage sur le passage de formulations en mots à l'expression littérale.

Phase 2 : Utilisation de la relation

Objectif

Travailler sur les opérations et opérations inverses avec différents types de nombres.

Matériel

Rétroprojecteur ou tableau, feuille ou ardoise.

Description

Des questions du type de celles proposées ci-dessous sont posées une à une. Les élèves répondent individuellement.

- a. Quel nombre obtient-on si on transforme 7 ?
- b. Quel nombre obtient-on si on transforme 300 ?
- c. On a obtenu 48. Quel est le nombre transformé ?
- d. Quel nombre obtient-on si on transforme 0,4 ?
- e. On a obtenu 4,8. Quel est le nombre transformé ?
- f. On a obtenu 10. Quel est le nombre transformé ?
- g. On a obtenu 603. Quel est le nombre transformé ?
- h. Quel nombre obtient-on si on transforme 17 tiers ?

Après une courte série de questions, les différentes propositions sont recensées et débattues avant d'entamer la série suivante.

Analyse

Les élèves sont amenés à faire fonctionner la formule dans les deux sens.

Dans les questions posées ici, les nombres sont choisis en vue de différents objectifs :

- travailler les triples d'entiers ou de nombres en écriture fractionnaire ou décimale et faire la différence entre « triple » et « plus 3 » (questions a, b, d, h) ;
- entraîner les élèves à retrouver le nombre de départ avec des multiples de 3 (questions c et g) ;
- entraîner les élèves à retrouver le nombre de départ avec des nombres décimaux qui conduisent à un résultat décimal (question e) ;
- entraîner les élèves à retrouver le nombre de départ avec des nombres qui ne sont pas des multiples de 3, ce qui conduit à un résultat non décimal ;
- trouver un quatrième nombre dans une situation de non-proportionnalité (association des questions c et e).

Réinvestissement et prolongement

Comme on l'a vu, cette activité peut être reprise de différentes façons. On peut :

- inciter à conjecturer, tester, en proposant d'établir d'autres formules ;

- travailler le calcul en reprenant une formule plusieurs fois en cours d'année et en l'appliquant à l'occasion de la rencontre avec de « nouveaux nombres » ;
- à partir d'une formule précédemment établie, travailler les relations inverses en faisant retrouver le nombre du départ ;
- en classe de troisième, s'appuyer sur ce type d'activité pour introduire la notion de fonction.

Pour modifier des conceptions

Certaines erreurs ont pour origine les conceptions que les élèves ont *a priori* à propos des notions mises en jeu. Ces conceptions erronées constituent des obstacles à l'apprentissage et, pour les modifier, un travail sur l'erreur est nécessaire.

Ce travail doit être mené chaque fois qu'il y a débat mais plus particulièrement à partir d'exercices du type « vrai ? faux ? ». Ces exercices fournissent facilement un enjeu et certains se prêtent à une gestion en calcul mental. En voici deux exemples.

Activité 32. Racines carrées

Objectif

Confronter des conceptions pour modifier les conceptions erronées sur les propriétés des racines carrées.

Matériel

Tableau ou rétroprojecteur, avec brouillon ou ardoise pour compter facilement les « vrai » et les « faux ».

Description

Le professeur propose successivement les énoncés ci dessous. Les élèves doivent répondre par « vrai » ou « faux ».

- $\sqrt{4} \times \sqrt{9} = \sqrt{36}$;
- $\sqrt{4} + \sqrt{16} = \sqrt{20}$;
- $\sqrt{25} - \sqrt{9} = \sqrt{16}$;
- La moitié de $\sqrt{18}$ est $\sqrt{9}$;
- $\sqrt{5} \times \sqrt{6} = \sqrt{30}$.

Les « vrais » et « faux » sont décomptés avant qu'un débat permette à la classe de trancher.

Analyse

- Les affirmations sont construites de façon à comporter des erreurs classiques glissées parmi des phrases vraies.
- Les nombres choisis permettent de répondre mentalement, mais les traces écrites sont autorisées.
- En ce qui concerne les deux derniers items, pour clore le débat et en cas de désaccord persistant, on peut retourner à la définition de la racine carrée (c'est-à-dire élever au carré) ou faire appel à la calculatrice.
- Il s'agit d'une première rencontre avec les propriétés des racines carrées. Cet exercice peut être utilisé comme une première situation d'apprentissage.
- Pour cela, il pourra être complété par un « vrai ? faux ? » portant sur des écritures littérales telles que : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ou $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a+b}$. Le débat autour des propriétés vraies pourra conduire à leur démonstration.

Prolongement

Placés à d'autres moments ces exercices deviennent des exercices de révision ou d'entraînement. Ils sont d'autant plus nécessaires que certaines erreurs sont récurrentes.

On peut faire évoluer les énoncés et proposer des affirmations telles que :

- $4 \times \sqrt{3} = \sqrt{48}$;
- $\sqrt{32} - \sqrt{2} = \sqrt{18}$.

Le carré de $1 + \sqrt{2}$ est $3 + 2\sqrt{2}$.

Les élèves utilisent alors majoritairement les traces écrites. L'activité calcul mental est ainsi allégée.

Activité 33. Pourcentages*Objectif*

Outre le fait de lutter contre des conceptions erronées, l'objectif est de commencer à faire le lien entre différentes procédures de calcul dans des problèmes utilisant des pourcentages particuliers (comme 50 % en lien avec la moitié, 25 % en lien avec un quart, etc.).

Matériel

Tableau ou rétroprojecteur avec brouillon ou ardoise. (Cf. Site. Document 28.)

Description

Le professeur propose les énoncés ci-dessous. Les élèves doivent répondre par « vrai » ou « faux ».

- Augmenter un prix de 100 % revient à le multiplier par 2.
- Diminuer un prix de 100 % revient à le diviser par 2.
- Deux hausses de prix successives de 50 % correspondent à une hausse de 100 %.

- Baisser un prix de 25 % revient à prendre les trois quarts de ce prix.
- Une baisse de 20 % annule les effets d'une hausse de 20 %.

Les « vrais » et les « faux » sont décomptés avant qu'un débat permette à la classe de trancher.

Analyse

- Les nombres choisis sont simples pour que le débat porte davantage sur les conceptions mises en jeu que sur les calculs mis en œuvre.
- C'est souvent la production d'un contre-exemple qui permet d'invalidier les affirmations fausses. En ce qui concerne les affirmations vraies, les élèves se contentent souvent d'un exemple générique. Si nécessaire, c'est au professeur de faire affiner la preuve en proposant de recourir au calcul littéral.

Prolongements

- On peut prolonger le travail sur les pourcentages avec un autre type de questions :

Par combien faut-il multiplier un prix pour l'augmenter de 10 % ?

Par quel nombre faut-il multiplier un prix pour le diminuer de 10 % ?

- On peut travailler sur les conceptions dans d'autres domaines :

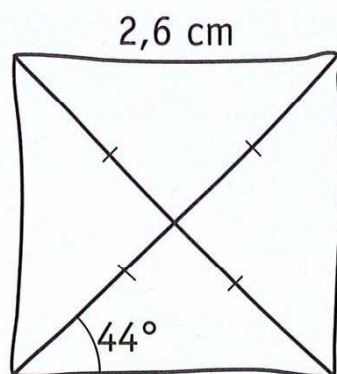
– dans le cadre numérique :

$2,3 \times 4 = 8,12$: vrai ou faux ?

$(-0,2)^2 = 0,4$: vrai ou faux ?

$\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{6}{14}$: vrai ou faux ?

– Dans le cadre géométrique :



Le périmètre de cette figure est de 10,4 cm.

Vrai ou faux ?

– Dans le cadre des grandeurs :

Un carré de côté 1 cm a une aire de 1 cm² : vrai ou faux ?

Un carré de côté 2 cm a une aire de 2 cm² : vrai ou faux ?

Un carré de côté 3 cm a une aire de 12 cm² : vrai ou faux ?

Pour enrichir des stratégies

L'enseignement de stratégies écrites de résolution de problèmes avec l'aide de la calculatrice conduit souvent à une introduction prématurée de procédures « expertes ». On les désigne ainsi parce qu'elles fonctionnent pour tous les problèmes d'une même catégorie. C'est le cas par exemple « du produit en croix » dans les problèmes de recherche d'une quatrième proportionnelle. Pourtant, dans un exercice donné et pour un individu donné, la procédure experte n'est pas toujours la plus performante et d'autres façons de faire plus personnelles peuvent être plus rapides ou plus efficaces. Dans les problèmes de proportionnalité, des procédures basées sur la linéarité sont souvent plus performantes pour peu qu'il existe des relations simples entre les nombres en jeu.

Pour nous, l'enrichissement du panel de stratégies disponibles pour chaque élève, l'augmentation de la capacité à les mobiliser et la compréhension des liens qui existent entre elles constituent aussi un objectif d'enseignement.

Le calcul mental favorise cet enrichissement en incitant à produire des solutions « personnelles » plutôt qu'à utiliser des méthodes plus générales où les calculs sont parfois trop difficiles à effectuer de tête.

Les activités proposées ici portent sur la notion de proportionnalité.

Activité 34. Pamplemousses et citrons

Objectif

Mettre en œuvre des procédures « personnelles ». Éventuellement s'approprier d'autres procédures.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Les énoncés sont écrits au tableau.

Description

Le professeur écrit au tableau :

Pour le même prix, on a 12 pamplemousses ou 18 citrons.

Puis les questions sont lues une à une, énoncées deux fois ou écrites au tableau.

- Combien de pamplemousses peut-on avoir pour le prix de 9 citrons ?*
- Combien de citrons peut-on avoir pour le prix de 30 pamplemousses ?*
- Pour le prix de 42 pamplemousses, combien peut-on avoir de citrons ?*
- Pour le prix de 108 citrons, combien de pamplemousses peut-on avoir ?*

Les résultats sont recensés et les procédures explicitées après chaque question. On garde une trace des résultats trouvés avant de passer à la question suivante.

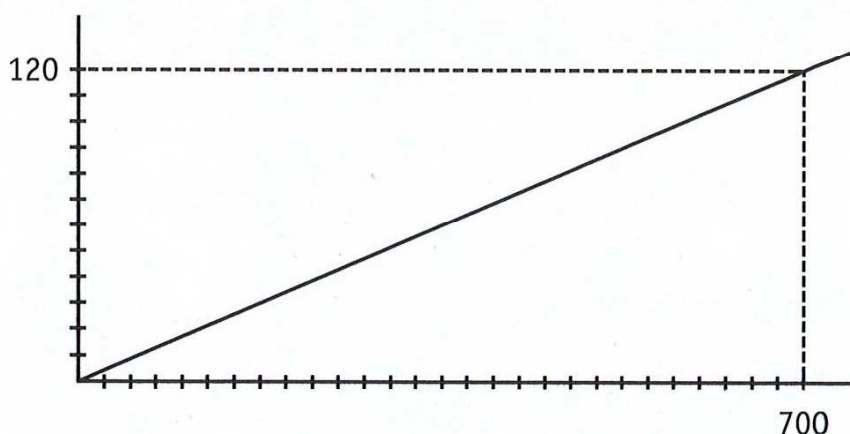
Analyse

- Les données ne sont pas nécessairement écrites de façon à mettre les pamplemousses sous les pamplemousses et les citrons sous les citrons. Le but est que les élèves aient la charge d'identifier eux-mêmes les grandeurs en jeu et les nombres correspondants.
- Différentes procédures sont envisageables (on désignera par c le prix d'un citron et par p le prix d'un pamplemousse) :
 - pour a : $9 c$, c'est la moitié de $18 c$ donc la moitié de $12 p$; pour passer de 18 à 12 on divise par $1,5$; $18 p$, c'est $12 p$ + la moitié de $12 p$... et $9 c$, c'est $6 c$ + la moitié de $6 c$;
 - pour b : en utilisant le résultat précédent, $30 p = 6 p \times 5$ donc $9 c \times 5 = 45 c$; $30 p$ c'est $12 p \times 2,5$ donc $18 c \times 2,5 = 45 c$; $30 p$ c'est $12 p \times 2 + 6 p$ donc $18 c \times 2 + 9 c = 45 c$; $12 p \times 1,5 = 18 p$ donc $30 c \times 1,5 = 45 c$.
 - pour c : $42 p = 12 p + 30 p$. Donc en utilisant le résultat précédent, $45 c + 18 c = 63 c$, $42 p = 6 p \times 7$ donc $9 c \times 7 = 63 c$; $42 \times 1,5 = 63$.
 - pour d : $108 c = 9 c \times 12$ donc $6 p \times 12$; $108 = 18 c \times 6$ donc $12 p \times 6$; $63 c + 45 c = 108 c$ donc en se servant des résultats précédents $30 p + 42 p$.
- Cette activité peut être proposée en sixième ou en cinquième. Du fait qu'il n'est pas rare qu'en début de sixième des élèves n'aient pas la notion de grandeurs proportionnelles, il faut parfois recourir au dessin et procéder à des échanges pour illustrer les procédures de linéarité.

Prolongements

Le même type d'exercices peut être proposé à tous les niveaux du collège en variant les nombres et les contextes. (Cf. Site. Documents 29 et 30.) Exemples :

- avec des grandeurs clairement identifiées et un coefficient non décimal : « 3 stylos rouges contre 7 bonbons roses » ;
- avec des grandeurs plus difficiles à identifier et un coefficient simple : « 2 personnes sur 5 ont une voiture » ;
- dans un contexte uniquement numérique : « 7 pour 8 c'est ... » ;
- dans un cadre graphique :



Activité 35. La configuration de Thalès

En fin de collège, la résolution de problèmes à propos de la configuration de Thalès se réduit le plus souvent à l'écriture des rapports et au calcul du produit en croix. Souvent, les autres procédures possibles ne sont pas évoquées et les liens avec la proportionnalité ne sont pas établis. L'activité proposée ici vise à montrer la diversité des procédures possibles et peut être conduite en quatrième ou en troisième avant même d'avoir institutionnalisé la propriété de Thalès sous sa forme classique.

Objectif

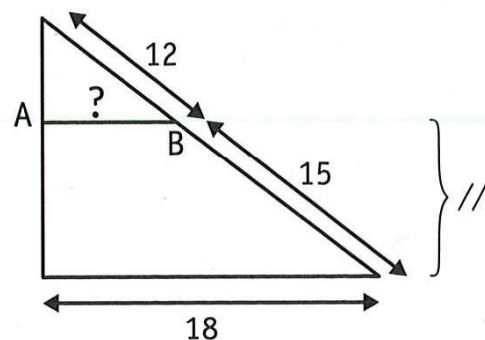
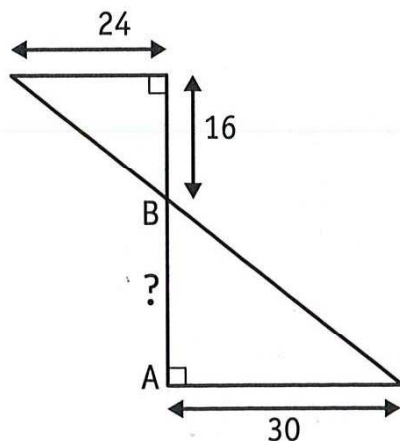
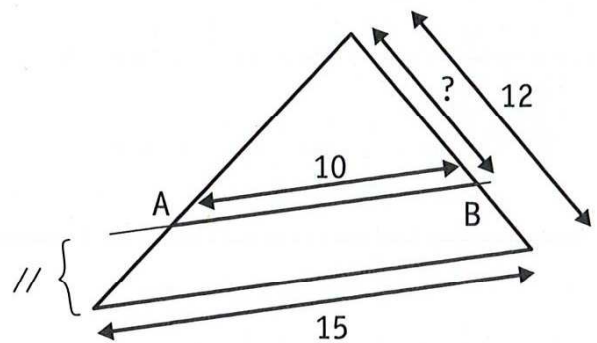
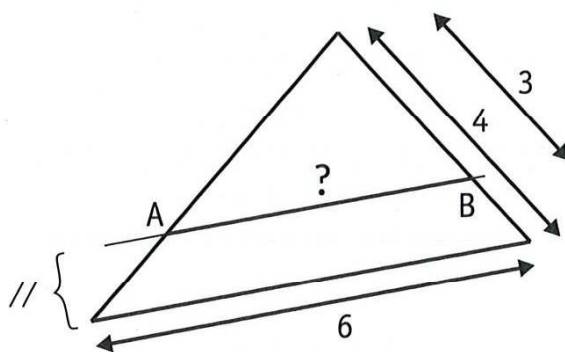
Mettre en œuvre des procédures personnelles dans la configuration de Thalès.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Les figures sont projetées.

Description

Les figures ci-dessous sont présentées les unes après les autres au rétroprojecteur ou au vidéoprojecteur. Il s'agit de retrouver le plus rapidement possible la longueur inconnue. L'échange de procédures (sans en privilégier aucune) se fait question après question. Les procédures utilisées sont écrites et laissées au tableau.



Analyse

Différentes procédures sont envisageables. Par exemple, pour la première figure :

- les solutions fausses consistant à enlever 1 à 6 parce qu'il faut enlever 1 pour passer de 4 à 3, ou à ajouter 2 à 3 parce qu'il faut ajouter 2 pour passer de 4 à 6 ;
- les solutions justes s'appuient sur le fait que les dimensions du triangle agrandi sont proportionnelles aux dimensions correspondantes du petit triangle ; les procédures peuvent être multiplicatives (pour passer de 4 à 3, on peut multiplier par 0,75) ou additives (pour passer de 4 à 3, on peut enlever le quart de 4) ; les essais de nombres sont également possibles : par exemple, on peut tester un nombre en lui ajoutant son tiers pour essayer d'obtenir 6 (pour passer de 3 à 4, on peut ajouter le tiers de 3) ;
- celles qui s'appuient sur le fait que l'agrandissement conserve les angles et les relations de proportionnalité entre les côtés du triangle : pour passer de 4 à 6, on peut multiplier par 1,5 ou ajouter la moitié de 4 ;
- les procédures consistant à raisonner mentalement sur l'égalité de fraction : $\frac{3}{4} = \frac{x}{6}$ ou $\frac{4}{6} = \frac{3}{x}$; elles croisent les deux propriétés précédentes (l'une d'entre elles permet-

tant d'écrire les rapports, l'autre de les calculer), mais elles autorisent de plus le recours au produit en croix (bien que celui-ci soit difficile à mobiliser mentalement).

La synthèse consiste à pointer les différentes procédures et à remarquer éventuellement que l'écriture de l'égalité des rapports permet de les synthétiser. Si besoin est, la validation peut se faire à partir d'un dessin.

Prolongements

Des exercices du même type sont présentés dans les séances suivantes pour permettre aux élèves de tester les procédures des autres et éventuellement se les approprier.

Plus tard, un choix de nombres adapté rendra le calcul difficile à effectuer mentalement. Il sera alors nécessaire d'utiliser l'écrit et d'écrire les rapports. La classe sera prête à institutionnaliser la propriété de Thalès. Mais le calcul mental, en retour, permettra un contrôle en travaillant sur les ordres de grandeur.

Pour créer des situations de référence

Face à un problème concret, l'élève cherche s'il n'a pas déjà rencontré un problème du même type pour lequel il possède déjà une méthode de résolution efficace et qu'il pourrait appliquer à cette nouvelle situation.

On comprend qu'un élève qui bénéficie d'un grand nombre de problèmes de référence sera plus apte à en résoudre d'autres. Là encore la mémorisation joue un rôle et le calcul mental est un moyen d'y parvenir à moindre coût. L'activité décrite page suivante montre comment travailler le sens des opérations.

Activité 36. Le sens de la multiplication

Objectifs

Travailler le sens de la multiplication.
Consolider la connaissance des répertoires multiplicatifs.

Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise.

Description

Les énoncés sont dictés et les données sont écrites au tableau. L'enseignant énonce deux fois chaque énoncé :

- Jean a distribué 7 cartes à chacun des 4 joueurs. Combien a-t-il distribué de cartes ?*
- Paul a distribué en tout 48 cartes à 6 joueurs. Combien de cartes chaque joueur a-t-il reçu ?*
- Naïma a distribué en tout 56 cartes. Elle sait qu'elle a donné 7 cartes à chaque joueur. Combien de joueurs a-t-elle servi ?*
- Lydie a distribué 3 fois plus de cartes à Nicolas qu'à Morgane. Nicolas en a 24. Combien a-t-elle distribué de cartes ?*
- Dylan a un roi de pique, un roi de trèfle, un roi de carreau, une dame de cœur et une dame de pique. En choisissant un roi et une dame, combien de mariages différents peut-il réaliser ?*

Les réponses sont recensées, les démarches verbalisées puis débattues.

Analyse

Le contexte choisi est le même pour toute la série de façon à ce que les élèves aient moins de difficulté à « entrer » dans les exercices. Les énoncés sont choisis de façon à reprendre différents types de situations du domaine multiplicatif (Cf. Vergnaud *in* biblio) :

- les trois premiers problèmes sont des situations de proportions simples : le premier problème est un problème multiplicatif, le second est un problème dit « de division partition » et le troisième de « division quotient » ;
- le quatrième problème est un problème du type « fois plus, fois moins » et le cinquième une situation type « produit cartésien ».

Dans les problèmes b et c certains élèves parlent de division alors que d'autres utilisent la multiplication à trous. C'est une occasion supplémentaire de montrer les liens entre les deux opérations.

Dans le dernier exercice, beaucoup d'élèves ne reconnaissent pas un problème multiplicatif et essaient de dresser mentalement l'inventaire de tous les couples possibles. Le lien entre les deux procédures peut être établi en présentant par exemple tous les couples possibles sous la forme d'un tableau cartésien.

La répétition de ces exercices types peut contribuer à leur mémorisation, surtout si l'enseignant invite les élèves à faire des liens, en leur demandant par exemple à quel problème déjà traité un nouvel énoncé a pu leur faire penser.

Prolongements

Problèmes similaires avec variation des contextes (Cf. Site. Document 28) :

- avec 100 roses, combien peut-on réaliser de bouquets de 12 roses ?
- une puce avance de 12 cm par bond. Combien doit-elle faire de bonds pour parcourir 100 cm ?
- dans une bande de 100 cm, combien peut-on découper de rubans de 12 cm ?

On peut varier les types de nombres :

- Nicolas mesure 120 cm. La taille de son frère Jacques est 1,5 fois la sienne. Combien mesure-t-il ?
- Nicolas mesure 120 cm. La taille de son frère Jacques est $\frac{5}{4}$ de la sienne. Combien mesure-t-il ?

D'autres problèmes de référence peuvent être abordés dans le domaine additif :

- à midi, Léa a reçu 20 € d'argent de poche. Pourtant, ce soir, elle a 3 € de moins que ce matin. Qu'a-t-elle fait dans l'après-midi ?

Pour raisonner

À l'école élémentaire, un travail sur l'argumentation a déjà été conduit à l'oral. Il occasionnera des débats riches.

Au collège, la construction du raisonnement déductif se poursuit et il est préférable que le passage à la démonstration rédigée se fasse progressivement en continuant, dans un premier temps, à s'appuyer sur des échanges d'arguments en classe. Le calcul mental peut constituer un support à l'élaboration de raisonnements déductifs. Pour convaincre la classe, ceux-ci doivent être formulés oralement et immédiatement après l'exercice. Ils sont explicités si nécessaire et leur validité est mise en débat dans la classe.

Les activités proposées ici se situent dans le cadre géométrique.

Activité 37. Avec le cercle en classe de sixième**Objectif**

Travailler le raisonnement déductif à l'oral en s'appuyant sur des débats contradictoires.

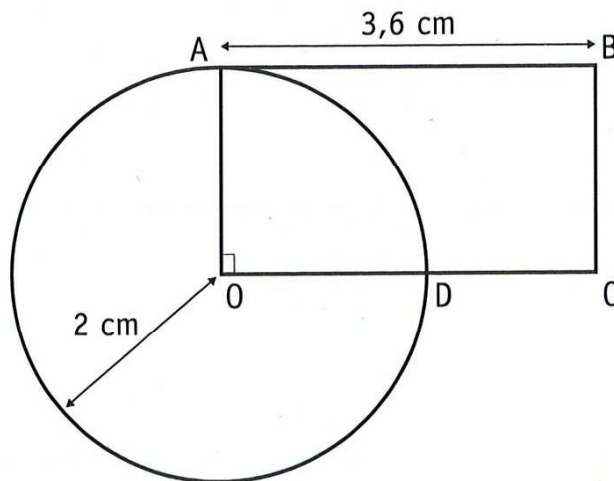
Matériel

Cahier de brouillon ou ardoise. Rétroprojecteur ou vidéoprojecteur.

Description

Des figures sont projetées une à une aux élèves. Les résultats sont recensés et débattus jusqu'à ce que la classe se mette d'accord sur une argumentation. Les consignes sont données oralement.

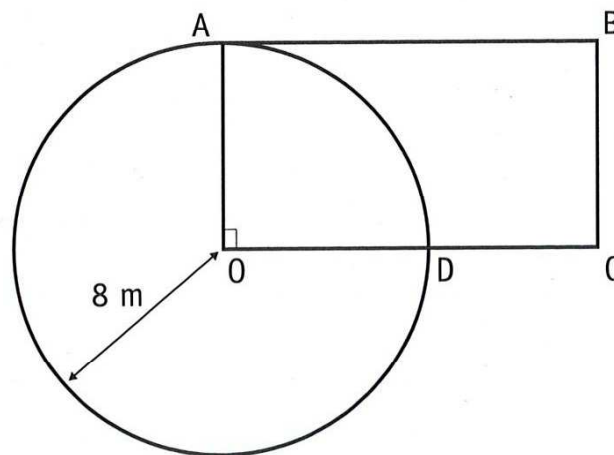
Exercice 1



Quelle est la mesure de $[DC]$?

$ABCO$ est un rectangle et le point D est à l'intersection du cercle et du rectangle

Exercice 2



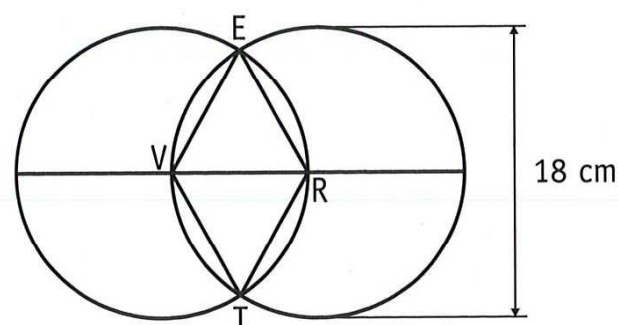
Quelle est la mesure de $[DC]$?

$ABCO$ est un rectangle et le point D est à l'intersection du cercle et du rectangle.

Le demi-périmètre du rectangle est 22 m.

Attention, le dessin n'est pas aux bonnes dimensions !

Exercice 3



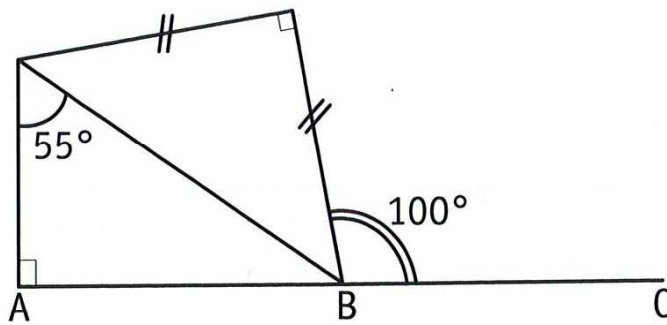
Quel est le périmètre du quadrilatère $VERT$?

Les deux cercles de centre V et R ont le même rayon.

Analyse

- Pour ne pas surcharger la mémoire de travail, les données numériques sont données sur les dessins.
- Dans le premier exercice, la figure est dessinée aux bonnes dimensions sur un transparent puis rétroprojetée. Deux types de résultats sont souvent produits :

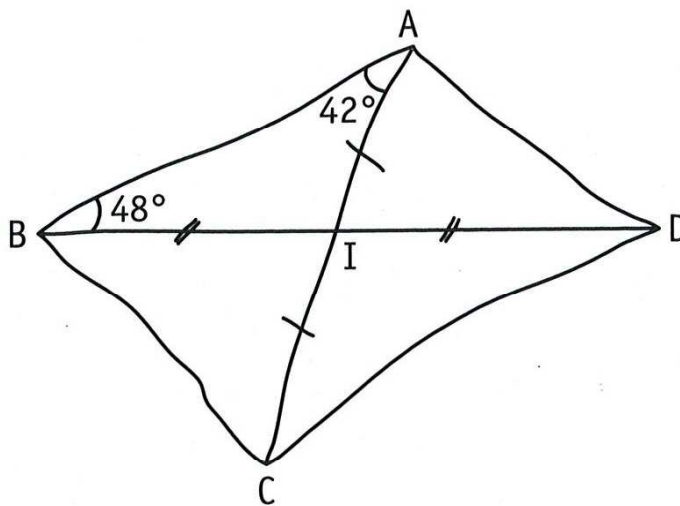
Exercice 3



Les points A, B, C sont-ils alignés ?

- En classe de quatrième

Exercice 1



$$AB = 4,7 \text{ cm}$$

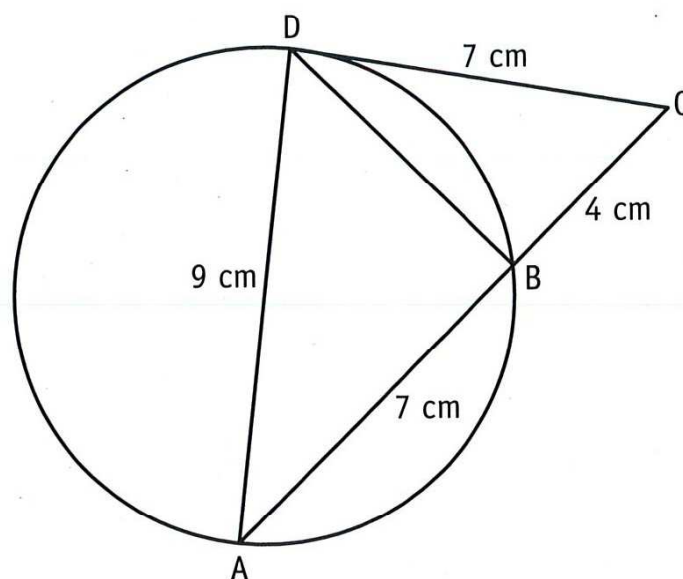
I milieu de $[AC]$ et de $[BD]$

$$\widehat{IAB} = 42^\circ ; \widehat{IBA} = 48^\circ$$

Quel est le périmètre de ABCD ?

NB. Le dessin est à main levée.

Exercice 2



$[AD]$ est un diamètre du cercle.

B est un point de ce cercle.

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

« Le calcul mental au collège : nostalgie ou innovation ? » Pour nous la réponse est clairement du côté des pratiques innovantes.

Conclusion

Au temps de la calculatrice, derrière le calcul mental ne se cache plus seulement le calcul automatisé qui s'appuie sur la mémorisation mais aussi le calcul réfléchi qui s'apparente à une vraie activité de recherche. Ces deux aspects sont profondément liés, le second se nourrit du premier et amène en retour, par souci d'économie, à mémoriser toujours plus de résultats.

Loin d'être une perte de temps, le calcul mental est un moyen d'ancrer des apprentissages, de donner du sens à certaines propriétés des opérations et d'introduire de nouvelles notions en s'appuyant sur les procédures personnelles des élèves. Tel que nous le pratiquons dans nos classes, c'est une réelle activité mathématique avec ses temps de découverte, d'entraînement et d'évaluation. Placées en début d'heure, des séances de calcul mental, décrochées ou non du chapitre en cours, permettent d'activer, d'entretenir ou de finaliser l'acquisition de savoirs. C'est un bon moyen de faire vivre les connaissances des chapitres antérieurs, voire des années antérieures, mais aussi de préparer à celles des chapitres à venir.

Cette pratique quotidienne équilibre le rapport écrit/oral libérant ainsi les élèves des blocages de l'écrit pour rentrer dans l'activité. De ce fait, nous avons constaté que ces séances suscitent l'adhésion de tous, même celle des élèves les plus démotivés.

En résumé, si, pour nous, la place du calcul mental au collège mérite d'être élargie, c'est parce que sa pratique actualisée, nourrie des apports de la recherche en didactique des mathématiques, nous paraît à la fois nécessaire, possible, utile et rentable :

- elle est nécessaire, dans un monde où l'information « chiffrée » est de plus en plus prégnante ;
- elle est possible, par une programmation construite, cohérente et articulée avec les programmes ;

- elle est utile, car elle favorise les apprentissages, permet la mémorisation et développe des automatismes ;
- elle est rentable, et rejaillit sur l'ensemble de l'activité mathématique (capacités de calculs accrues, aides en résolution de problèmes, mais aussi capacité à chercher, à argumenter, à s'adapter, etc.)

Tableau des activités (livre)

Partie	Chapitre	Page	Activités	Exercices	Utilisation	Niveaux
2	1	76	Activité 1. Les tables dans tous les sens.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	1	77	Activité 2. Placement des nombres.	Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	1	78	Activité 3. Furet multiplicatif.	Oral	Individuelle Collective	6 ^e
2	1	79	Activité 4. Labynombre.	Écrit	Individuelle	6 ^e
2	1	80	Activité 5. La table arithmétique naturelle	Écrit	Individuelle	6 ^e
2	1	82	Activité 6. Jeu avec des dominos à fabriquer.	Oral	Collective	6 ^e
2	1	83	Activité 7. Jeu avec des cartes à jouer.	Oral	Collective	6 ^e
2	1	83	Activité 8. Jeu avec des cartes à fabriquer.	Oral	Collective	6 ^e
2	1	84	Activité 9. Jeu avec des grilles pré-remplies.	Écrit	Individuelle	6 ^e
2	1	85	Activité 10. Jeu avec des cartons de loto.	Oral	Collective	6 ^e

Partie	Chapitre	Page	Activités	Exercices	Utilisation	Niveaux
2	2	87	Activité 11. Le compte est bon.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	2	91	Activité 12. Le plus court chemin.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	2	93	Activité 13. Transformation d'écriture de puissances	Oral Écrit	Individuelle Collective	4 ^e
2	2	95	Activité 14. Somme des angles d'un triangle.	Oral Écrit	Individuelle Collective	5 ^e et 4 ^e
2	2	99	Activité 15. Exemples d'autres activités en géométrie	Oral Écrit	Individuelle Collective	4 ^e et 3 ^e
2	3	104	Activité 16. Multiplication. Un exemple de situation d'apprentissage.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	109	Activité 17. Travail de mémorisation.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	111	Activité 18. Comparaison de grandeurs.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e
2	3	113	Activité 19. Empilement de cubes.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	116	Activité 20. Du cube aux pavés.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	119	Activité 21. Détermination de volumes.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	120	Activité 22. Volumes et capacités.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e

Partie	Chapitre	Page	Activités	Exercices	Utilisation	Niveaux
2	3	122	Activité 23. Conversions d'écritures	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e
2	3	124	Activité 24. Formules d'aires.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	125	Activité 25. Identités remarquables.	Oral Écrit	Individuelle Collective	3 ^e
2	3	127	Activité 26. Le compte est bon (avec des fractions).	Oral Écrit	Individuelle Collective	5 ^e
2	4	129	Activité 27. Approcher une somme.	Oral Écrit	Individuelle Collective	5 ^e
2	4	131	Activité 28. Contrôler la valeur d'un produit.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e
2	4	133	Activité 29. Estimation de longueurs	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	4	135	Activité 30. Donner un ordre de grandeur à l'aide des puissances de 10	Oral Écrit	Individuelle Collective	4 ^e
2	5	137	Activité 31. Recherche et utilisation d'une relation liant des nombres	Oral Écrit	Individuelle Collective	5 ^e
2	5	139	Activité 32. Racines carrées	Oral Écrit	Individuelle Collective	3 ^e
2	5	140	Activité 33. Pourcentages.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e
2	5	142	Activité 34. Pamplemousses et citrons.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e

Partie	Chapitre	Page	Activités	Exercices	Utilisation	Niveaux
2	5	144	Activité 35. La configuration de Thalès.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 4 ^e
2	5	146	Activité 36. Le sens de la multiplication.	Oral Écrit	Individuelle Collective	6 ^e
2	5	147	Activité 37. Avec le cercle en classe de sixième.	Oral Écrit	Individuelle Collective	Dès la 6 ^e

Tableau des documents imprimables et/ou projetables (site d'accompagnement)

Partie	Chapitre	Documents	Usage	Utilisateur	Utilisation	Niveaux
2	1	Document 1 Les tables de multiplication. <i>Comment savoir si l'on connaît ses tables ?</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 2 Les tables de multiplication. <i>Les tables de Pythagore</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 3 Les tables de multiplication. <i>Labyrinthe 1</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 4 Les tables de multiplication. <i>Labyrinthe 2</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e

Partie	Chapitre	Documents	Usage	Utilisateur	Utilisation	Niveaux
2	1	Document 5 Les tables de multiplication. <i>Grilles de labyrinthe</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 6 Les tables de multiplication. <i>Table arithmétique</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 7 Les tables de multiplication. <i>La table arithmétique naturelle</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	1	Document 8. Les tables de multiplication. Table arithmétique avec couleurs	Imprimable Projetable Affichable	Élève Enseignant	Individuelle Collective	6 ^e
2	1	Document 9 Jeux pour mémoriser les tables de multiplication. <i>Jeu de dominos multiplicatifs</i>	Imprimable (bristol ou papier 120g)	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	1	Document 10 Jeux pour mémoriser les tables de multiplication. <i>Loto</i>	Imprimable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	2	Document 11 Critères de divisibilité. <i>Le compte est bon</i>	Imprimable	Enseignant	Collective	6 ^e
2	2	Document 12 Propriétés des puissances. <i>Entraînement sur les puissances</i>	Imprimable	Élève Enseignant	Individuelle	4 ^e

Partie	Chapitre	Documents	Usage	Utilisateur	Utilisation	Niveaux
2	2	Document 13 Propriétés de géométrie. <i>Droite des milieux</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	4 ^e
2	2	Document 14 Propriétés de géométrie. <i>Le triangle existe-t-il ?</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	5 ^e
2	2	Document 15 Propriétés de géométrie. <i>Somme des angles d'un triangle</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	5 ^e
2	3	Document 16 Multiplier par 10, 100... <i>Graduations</i>	Imprimable	Élève	Individuelle	6 ^e
2	3	Documents 17 Multiplier par 10, 100... <i>Fabrication d'un tableau de numération</i>	Imprimable	Enseignant		Enseignant
2	3	Document 18 Multiplier par 10, 100... <i>Tableau de numération. Illustration de $2,16 \times 1000$</i>	Imprimable pour affichage	Enseignant Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	Document 19 Changement d'unités. <i>Empilement de cubes</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e 5 ^e 4 ^e
2	3	Document 20 Changement d'unités. <i>Des cubes aux pavés</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e 5 ^e 4 ^e

Partie	Chapitre	Documents	Usage	Utilisateur	Utilisation	Niveaux
2	3	Document 21 Changements d'unités. <i>Détermination de volumes</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e 5 ^e 4 ^e
2	3	Document 22 Retenir des formules. <i>Aires et périmètres</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	Document 23 Retenir des formules. <i>Aires et périmètres des triangles</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	5 ^e
2	3	Document 24. Retenir des formules. <i>Volumes</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	4 ^e
2	3	Document 25 Retenir des formules. <i>Rayon, diamètre et périmètre du disque</i>	Imprimable Projetable (selon les cas)	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	Document 26 Retenir des formules. <i>Aire et périmètre du disque</i>	Imprimable Projetable (selon les cas)	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	3	Document 27 Retenir des formules. <i>Volumes des pavés</i>	Imprimable Projetable (selon les cas)	Élève	Individuelle Collective	6 ^e
2	5	Document 28 Modifier des conceptions. <i>Pourcentages</i>	Imprimable par l'enseignant pour son propre usage	Enseignant	Orale (par l'enseignant) Collective	6 ^e 5 ^e

Partie	Chapitre	Documents	Usage	Utilisateur	Utilisation	Niveaux
2	5	Document 29 Enrichir des stratégies. <i>Proportionnalité</i>	Imprimable Projetable (selon les cas)	Élève	Individuelle Collective	6 ^e 5 ^e
2	5	Document 30 Enrichir des stratégies. <i>Proportionnalité. Cinq activités</i>	Imprimable Projetable	Élève	Individuelle Collective	5 ^e
2	5	Document 31 Créer des situations de référence. <i>Petits problèmes de multiplication</i>	Imprimable	Élève	Individuelle Collective	6 ^e

Tableau des diaporamas (site d'accompagnement)

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
1	4	Diaporama 1 Les différents types de séances. <i>Racines carrées. Evaluation formative.</i>	Test	3 ^e	Au clic/ Minuté
1	4	Diaporama 2 Les différents types de séances. <i>Proposition de progression sur les racines carrées.</i>	Formation	3 ^e	Au clic
2	1	Diaporama 3 Les tables de multiplications. <i>Un exercice de remédiation.</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	1	Diaporama 4 Les tables de multiplication. <i>Double, moitié, etc.</i>	Entraînement	6 ^e	Au clic/ Minuté

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
2	1	Diaporama 5 Les tables de multiplication. <i>Entraînement.</i>	Entraînement	6 ^e	Au clic
2	1	Diaporama 6 Les tables de multiplication. <i>Multiplier par 12 et 15.</i>	Après échanges de procédures, plutôt entraînement	6 ^e 5 ^e	Au clic
2	2	Diaporama 7 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 1</i>	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 8 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 2</i>	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 9 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 3</i>	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 10 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 4</i>	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 11 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 5</i>	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 12 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 6. Test 1</i>	Evaluation formative	4 ^e	Au clic/ Minuté

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
2	2	Diaporama 13 Propriétés des puissances. Progression avec puissances de dix 7	Introduction avec échanges de procédures	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 14 Propriétés des puissances. <i>Progression avec puissances de dix 8. Test 2</i>	Evaluation formative	4 ^e	Minuté
2	2	Diaporama 15 Propriétés de géométrie. <i>Somme des angles.</i>	Entraînement ou test	5 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 16 Propriétés de géométrie. <i>Triangle rectangle. Égalité de Pythagore.</i>	Entraînement	4 ^e	Au clic/ Minuté
2	2	Diaporama 17 Propriétés de géométrie. <i>Droite des milieux.</i>	Entraînement	4 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 18 Multiplier ou diviser par 10 ; 100 ; 1000... <i>Multiplier et diviser par 10 ; 100 ; 1000...</i>	échanges de procédures	6 ^e	Au clic
2	3	Diaporama 19 Changement d'unités. <i>Conversions simples.</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 20 Changement d'unités. <i>Volumes.</i>	Entraînement	6 ^e	Au clic
2	3	Diaporama 21 Changement d'unités. <i>Capacité / Volume.</i>	Introduction	6 ^e	Au clic

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
2	3	Diaporama 22 Changements d'unités. <i>Heure décimale.</i>	Entraînement	5 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 23 Retenir des formules. <i>Trigonométrie.</i>	Entraînement	3 ^e	Au clic
2	3	Diaporama 24 Retenir des formules. <i>Aire et périmètre du disque 1</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 25 Retenir des formules. <i>Aire et périmètre du disque 2</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 26 Retenir des formules. <i>Aire et périmètre du rectangle.</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	3	Diaporama 27 Retenir des formules. <i>Identités remarquables. Test.</i>	Test	3 ^e	Au clic
2	3	Diaporama 28 Opérations sur les fractions. <i>Problèmes multiplicatifs avec fractions.</i>	Entraînement	6 ^e 5 ^e	Au clic/ Minuté
2	3	Diaporama 29 Opérations sur les fractions. <i>Fractions égales.</i>	Entraînement	5 ^e	Minuté
2	4	Diaporama 30 Vers l'écriture scientifique. <i>Estimer un ordre de grandeur avec puissances de dix.</i>	Découverte	4 ^e	Minuté

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
2	5	Diaporama 31 Trouver la règle. <i>Vers le Calcul littéral.</i>	introduction	5 ^e	Au clic/ Minuté
2	5	Diaporama 32 Trouver la règle. <i>Initiation aux fonctions.</i>	introduction	3 ^e	Minuté
2	5	Diaporama 33 Modifier des conceptions. <i>Yens et euros.</i>	Échanges de procédures	6 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 34 Modifier des conceptions. <i>Problèmes multiplicatifs avec pourcentage.</i>	Échanges de procédures	6 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 35 Modifier des conceptions. <i>Simplification de racines carrées.</i>	Échanges de procédures	3 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 36 Enrichir les stratégies. <i>Configuration de Thales.</i>	Échanges de procédures et entraînement	4 ^e 3 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 37 Enrichir des stratégies. <i>Statistiques.</i>	Échanges de procédures et entraînement	6 ^e (7 premières diapos) 3 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 38 Enrichir des stratégies. <i>Fonctions et thèmes de convergence.</i>	Échanges de procédures et entraînement	3 ^e	Au clic

Partie	Chapitre	Diaporamas	Type de séances	Niveau minimum	Temps
2	5	Diaporama 39 Créer des situations de référence. <i>Problèmes multiplicatifs.</i>	Échanges de procédures et entraînement	6 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 40 Raisonner en géométrie. <i>Rayon et cercle 1</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	5	Diaporama 41 Raisonner en géométrie. <i>Rayon et cercle 2</i>	Entraînement	6 ^e	Minuté
2	5	Diaporama 42 Raisonner en géométrie. <i>Calcul d'angles.</i>	Entraînement	5 ^e	Minuté
2	5	Diaporama 43 Raisonner en géométrie. <i>Points alignés.</i>	Entraînement	5 ^e	Minuté
2	5	Diaporama 44 Raisonner en géométrie. <i>Calcul de longueurs 1</i>	Échanges de procédures	4 ^e	Au clic
2	5	Diaporama 45 Raisonner en géométrie. <i>Calcul de longueurs 2</i>	Entraînement	4 ^e	Minuté

Bibliographie

ANSELMO Bernard, PLANCHETTE Paul, « Le calcul mental au collège : nostalgie ou innovation ? », *Repères IREM*, n° 62, Topiques éditions, 2006 (consultable en ligne à partir du site des IREM à la rubrique *Repères-IREM*).

ANSELMO Bernard, « Quelle place pour le calcul mental au collège ? », *Bulletin APMEP*, n° 475, mars-avril 2008, (consultation en ligne sur le site de l'APMEP).

ANSELMO Bernard, ÉVESQUE-SAGNARD Stéphanie, FENOY Karine, PLANCHETTE Paul, ZUCCHETTA Hélène, *Le calcul mental au collège : nostalgie ou innovation ?* IREM de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1, 2008.

BOULE François, *Jeux de calcul. Cycle des apprentissages fondamentaux et des approfondissements*, « Pratique pédagogique », Armand Colin, 1994.

BOULE François, *Le calcul mental au quotidien. Cycles 2 et 3*, « Au quotidien », CRDP de Bourgogne, 2012, nouvelle édition mise à jour.

BUTLEN Denis, MONTFORT Anne-Marie, PÉZARD Monique, « Le rôle du calcul mental dans la connaissance des nombres, des opérations et dans la résolution de problèmes », *Repères IREM*, n° 41, Topiques éditions, 2000.

BUTLEN Denis, MASSELOT Pascale, « Dialectique entre sens et techniques. L'exemple du calcul mental », in DURPAIRE Jean-Louis (coord.), MÉGARD Marie (coord.), *Le Nombre au cycle 2*, « Ressources pour faire la classe », SCÉRÉN-CNDP, 2002, 104 pages.

BUTLEN Denis, *Le calcul mental entre sens et technique*, « Didactiques », Presses universitaires de Franche-Comté, 2007.

CHARNAY Roland, COMBIER Georges, DUSSUC Marie-Paule, *Cap maths CM1. Le guide des activités pour l'enseignant*, Hatier, 2003, disponible pour les enseignants sur le site d'Hatier.

CHARNAY Roland, COMBIER Georges, DUSSUC Marie-Paule, *Cap maths CM2, le guide des activités pour l'enseignant*, Hatier, 2004 disponible pour les enseignants sur le site d'Hatier.

DELANOY Cécile, *Une mémoire pour apprendre*, « Ressources formation. Enjeux du système éducatif », SCÉRÉN-CNDP/Hachette Éducation, 1994.

DOSSAT Luce, FROMENTIN Jean, HOUEMENT Catherine, MATULIK Nicole, PIGOT Guy, PLANCHETTE Paul, contribution de BOULE François et SALIN Marie-Hélène, « Le calcul mental à l'école élémentaire », *Mathématiques. École primaire*, CNDP, 2002, téléchargeable à l'adresse : <http://www2.cndp.fr/archivage/valid/68718/68718-10580-14939.pdf>

LETHELLIEUX Claire, *Le calcul mental au cycle des approfondissements*, « Pratique pédagogique », Armand Colin, 1993.

PELTIER Marie-Lise, CLAVIE Claudette, *Calcul mental au cycle 3. Des activités pour un entraînement quotidien*, « Mosaïque », Hatier, 2005, fiches photocopiables.

VERGNAUD Gérard (dir.), *Le Moniteur de mathématiques. Résolution de problèmes. Cycle 3*, Nathan, 1999.

APMEP, *Jeux 5. Des activités mathématiques au collège*, Brochure n° 119, APMEP, 1998, 15 jeux.

APMEP, *Jeux 6. Des activités mathématiques pour la classe*, Brochure n° 144, APMEP / ACL-Les éditions du Kangourou, 2002, 16 jeux.

APMEP, *Jeux 7. Des activités mathématiques pour la classe*, Brochure n° 169, APMEP / ACL-Les éditions du Kangourou, 2005, 25 jeux.

APMEP, *Jeux 8. Des activités pour la classe*, Brochure n° 185, APMEP / ACL-Les éditions du Kangourou, 2008, 26 jeux.

APMEP, *Comment faire du calcul un jeu d'enfant*, « Culture scientifique », Vuibert, 2007, environ 80 jeux.

COPIRELEM, *Calcul mental à l'école primaire*, ARPEME, 2012, en vente sur le site de l'ARPEME.

IREM de Brest, *Le calcul mental en sixième*, Université de Bretagne occidentale-IREM de Brest, 1997.

IREM de Clermont-Ferrand, *Calcul mental et Automatismes*, Université Blaise Pascal-IREM de Clermont-Ferrand, 1994.

Sitographie

Calcul@tice, de l'académie de Lille, avec des activités sous forme de jeux pour s'entraîner au calcul.

<http://calculatice.ac-lille.fr/calculatice/>

Le calcul numérique au collège. Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e, 3^e du collège, Ministère de l'Éducation nationale, 2007.

<http://eduscol.education.fr/D0015/LLPHAG00.htm>

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/1/doc_acc_clg_calcul_numerique_109171.pdf

Gomaths, site suisse, permet un bon entraînement des tables de multiplication (livrets) et d'autres opérations (entraînement en ligne ou impression de fiches).

<http://www.gomaths.ch/>

Mathématiques magiques propose des jeux, des trucs, de la magie.

<http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/>

Le Matou matheux propose des exercices interactifs d'entraînement.

<http://matoumatheux.ac-rennes.fr/accueilniveaux/accueilFrance.htm>

Le Nombre au cycle 3. Apprentissages numériques, « Ressources pour faire la classe », Ministère de l'Éducation nationale/SCÉRÉN-CNDP, 2012, 126 pages.

<http://www.eduscol.education.fr>

www.sceren.com

Derniers ouvrages parus

Drama activities – L'enseignement de l'anglais par les techniques théâtrales, SCÉRÉN-CRDP de Lorraine, 540B0371, 2013, 25 €.

Enseigner le français à tous les élèves – Réponses aux difficultés du collège, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Créteil, 941B3120, 2012, 18 €.

Clés pour l'enseignement de l'histoire et de la géographie – Aide à la mise en œuvre des programmes de terminale, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Versailles, 7800HG07, 2012, 22 €. Chacune des deux parties est disponible séparément sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

Histoire Géographie Éducation civique 3^e – Aide à la mise en œuvre des programmes, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Versailles, 7800HG06, 2012, 22 €. Chacune des trois parties est disponible séparément sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

L'art des mots – Enseigner le vocabulaire au collège et au lycée, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Versailles, 7800BF35, 2012, 21 €. Cet ouvrage est disponible également sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

Guide Tice pour le professeur-documentaliste – Enjeux numériques, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Paris, 750LIV15, 2012, 22 €.

Guide Tice pour le professeur de français, scérén-crdp de l'académie de Paris-WebLettres, 750LIV11, 2012, 21 €.

Sciences de la vie et de la Terre 2^{de} – Tâches complexes & évaluation, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Nice, 060B2313, 2012, 23 €. Cet ouvrage est disponible également sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

Clés pour l'enseignement de l'histoire et de la géographie au lycée 1^{re} – Aide à la mise en œuvre des programmes, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Versailles, 07800HG05, 2011, 21 €. Chacune des deux parties est disponible séparément sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

Introduction à la science informatique – pour les enseignants de la discipline en lycée, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Paris, 750LIV10, 2011, 20 €.

Histoire Géographie Éducation civique 4^e – Aide à la mise en œuvre des programmes, SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Versailles, 7800HG04, 2011, 19 €. Chacune des trois parties est disponible séparément sous forme numérique ; voir www.sceren.com.

Lire en langue étrangère, SCÉRÉN-CRDP de l'académie d'Aquitaine, 73309B231, 2011, 18 €.

Ouvrages et documents en ligne de la collection : www.cndp.fr/collections

Achevé d'imprimer sur les presses de l'Imprimerie de Montlignon
61400 St Hilaire le Châtel
Tirage : 1600

© SCÉRÉN-CRDP de l'académie de Lyon, 2013.

Le calcul mental au collège

Un livre
Un site

Ouvrage collectif sous la direction de
Bernard Anselmo et Hélène Zucchetto

Le calcul mental est une activité mathématique à part entière, avec ses temps de découverte, d'entraînement et d'évaluation. Pratiqué régulièrement, il permet :

- d'activer, d'entretenir ou de finaliser l'acquisition des savoirs ;
- d'ancrer les apprentissages ;
- de développer mémoire et automatisation des procédures ;
- d'élaborer et d'échanger des procédures personnelles ;
- d'aborder des notions nouvelles dans des situations de recherche.

L'ouvrage et le site qui l'accompagne et le complète proposent 113 activités :

- pour la plupart directement utilisables en classe ;
- répondant à une progression des apprentissages conforme aux programmes de mathématiques du collège ;
- motivées par une réflexion théorique montrant l'intérêt du calcul mental pour la compréhension des nombres et le développement des capacités de raisonnement.



« RPA disciplines & compétences » valorise des pratiques innovantes et privilégie l'approche par compétences, la pédagogie différenciée, l'évolution didactique d'une discipline.

Directrice de la collection : Anne-Marie Hazard-Tourillon