Calcul différentiel

1 Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (xy, x^2+y^2) \end{cases}$ est différentiable et expliciter sa différentielle.

2 Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$. Calculer les dérivées (ou dérivées partielles) des fonctions suivantes :

1. $g(x) = f(x, x^2)$.
2. $h(x,y) = f(x+2y, x-y)$.

3 On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\ |\ )$ et de la norme euclidienne associée.

1. Montrer que l'application $q : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \|x\|^2 \end{cases}$ est différentiable et expliciter sa différentielle.
2. En déduire que l'application $N : \begin{cases} \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \|x\| \end{cases}$ est différentiable et expliciter sa différentielle.

4 On munit $E = \mathbf{R}^n$ de sa base canonique.

1. En utilisant la multilinéarité du déterminant montrer que l'application [1] $\det : \begin{cases} E^n \to \mathbf{R} \\ (u_1, \dots, u_n) \mapsto \det(u_1, \dots, u_n) \end{cases}$ est différentiable et expliciter sa différentielle.
2. Pour x réel on pose : $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \dots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$.

   Montrer que D_n est une fonction dérivable puis calculer D_n'. En déduire l'expression de $D_n(x)$.

5 Soit $f : \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in \mathbf{R}$. On définit la fonction φ sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\varphi(x,y) = (x + f(y), y + f(x)).$$

1. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$ et que, pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, $\mathrm{D}(\varphi)(x,y)$ est un isomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.
2. On fixe $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et on définit la fonction g sur $\mathbf{R}^2$ par

   $$g(x,y) = (a - f(y), b - f(x)).$$

   Montrer que g est contractante sur $\mathbf{R}^2$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
3. Déduire de ce qui précède que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathbf{R}^2$.

---

1. En utilisant les dérivées partielles, on peut établir la formule donnant la différentielle du déterminant :

$$\mathrm{D}(\det)(M)(H) = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{Com}(M)H) \text{ où } \mathrm{Com}(M) \text{ est la comatrice de } M.$$

6 On considère l'ouvert $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x - y > 0\right\}$ et la fonction $\varphi : \begin{cases} \Omega \to \mathbf{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (u, v) = (xy, x + y) \end{cases}$.

1. Montrer que φ est $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert V à préciser.
2. Transformer l'équation aux dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + 3(x - y)f(x, y) = 0. \qquad \text{(E)}$$
à l'aide du changement de variables : $u = xy$ et $v = x + y$.
3. En déduire les fonctions $f : \Omega \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ solutions de (E).

7 Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

1. Montrer que f possède trois points critiques.
2. Discuter la nature de ces points critiques.
3. Montrer que, pour $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) + 8 \geqslant 0$. En déduire que f possède deux minima globaux sur $\mathbf{R}^2$.

8 On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire canonique $(\ |\ )$. Soit u un endomorphisme symétrique de $\mathbf{R}^n$ et φ la fonction $\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \\ x \mapsto (u(x) \mid x) \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^n$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\varphi(x_0) = \sup\limits_{\|x\|=1} \varphi(x)$.
2. Soit y un vecteur unitaire orthogonal à x_0. Pour t réel, on pose : $x(t) = \cos t\, x_0 + \sin t\, y$.
   (a) Vérifier que, pour tout t réel, $x(t)$ est unitaire.
   (b) En considérant la fonction $f(t) = \varphi(x(t))$, montrer que $u(x_0)$ est orthogonal à y.
3. En déduire que x_0 est un vecteur propre de u (ceci montre que u possède une valeur propre réelle).

9 Déterminer l'aire maximale d'un triangle ABC inscrit dans un cercle de rayon 1. (O étant l'origine d'un repère adapté, on pourra paramétrer les points B et C à l'aide des angles $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $\beta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$).

10 On considère la surface S d'équation : $\ln(x + y - z) + x^2 - y + 2z - 1 = 0$.

1. Montrer qu'au voisinage du point $A(1, 0, 0)$, S admet une représentation cartésienne de la forme
$$z = \varphi(x, y).$$
2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de $(1, 0)$. Écrire le développement de Taylor-Young de φ à l'ordre 2 en $(1, 0)$.
3. Écrire une équation du plan tangent à S au point A et préciser la position de la surface par rapport à son plan tangent en A.