Topologie des evn

Exe.1 Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$. Pour $f \in E$ on pose $\|f\| = \int_0^1 \mathrm{e}^t |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est norme sur E.
2. Chercher un réel a minimal, tel que $\|\cdot\| \leqslant a\|\cdot\|_\infty$.
3. Les normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes sur E ?

Exe.2 On note ℓ^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et $E = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^\infty | u_0 = 0\}$.
Pour $u \in \ell^\infty$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$ et pour $u \in E$, on pose $\|u\| = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞ et que $\|\cdot\|$ est norme sur E.
2. Comparer ces deux normes sur E. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exe.3

1. (a) Montrer que l'espace $\mathscr{B}([0,1],\mathbf{R})$ des fonctions bornées de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.
   (b) Montrer $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, est un espace de Banach.
2. Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbf{R})$. Pour $f \in E$ on pose $N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $\nu(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$.
   (a) Montrer que N et ν définissent deux normes équivalentes sur E.
   (b) Montrer E, muni de la norme ν, est un espace de Banach.

Exe.4 Soit E un evn réel et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si V$\neq$ E alors V est d'intérieur vide.
2. Montrer que l'adhérence de V est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que tout hyperplan H de E est soit fermé soit dense dans E.

Exe.5 Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ et $\Omega = \{f \in E \mid \forall t \in [0,1], f(t) > 0\}$.

Ω est-il ouvert si E est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$? Et de la norme $\|\cdot\|_1$ ($\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$) ?

Exe.6 Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$ non réduit à $\{0\}$. On pose $H = \{x \in G \,|\, x > 0\}$.

1. Montrer que H est non vide.
2. Soit a la borne inférieure de H.
   (a) Montrer que si $a = 0$, G est dense dans $\mathbf{R}$.
   (b) Montrer que si $a > 0$, $a \in H$ et $G = a\mathbf{Z}$. (Indication : si $a \notin H$, considérer $g, h \in H$ tels que $a < g < h < 2a$).
3. Montrer que si u et v sont deux réels non nuls tels que $\dfrac{u}{v}$ soit irrationnel alors $u\mathbf{Z} + v\mathbf{Z}$ est dense dans $\mathbf{R}$.
4. Montrer que l'ensemble $C = \{\cos n, n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1,1]$.

Exe.7 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

1. Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$.
   (a) Établir l'égalité des trois quantités suivantes :
   $$\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, \qquad \sup_{\|x\|_E \leqslant 1} \|u(x)\|_F \quad \text{et} \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F\,;$$
   la valeur commune des ces quantités est notée $\|u\|$.
   (b) Vérifier que l'on a l'inégalité $\|u(x)\|_F \leqslant \|u\|\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et que $\|u\|$ est le plus petit nombre réel M vérifiant :
   $$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant M\,\|x\|_E.$$
2. Montrer que l'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ (dite norme **subordonnée** aux normes choisies sur E et F) et que, pour u et $v \in \mathscr{L}_c(E,E)$,
   $$\|u \circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|.$$
3. Montrer que si $u \in \mathscr{L}_c(E,E)$ alors, pour toute valeur propre λ de u, on a : $|\lambda| \leqslant \|u\|$.
4. Étudier la continuité et calculer éventuellement la norme de l'application linéaire :
   $$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(t_0) \end{array} \right. \quad \text{où } t_0 \in [0,1].$$
   lorsque l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ puis de la norme $\|\cdot\|_1$ ($\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$).

Exe.8 On définit une norme sur $\mathbf{C}[X]$ en posant, pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n \in \mathbf{C}[X]$,
$$\|P\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$$

1. (a) Montrer que la boule unité de $\mathbf{C}[X]$ n'est pas compacte.
   (b) En considérant la suite des polynômes $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{2^k}$, montrer que $\mathbf{C}[X]$ n'est pas complet (pour la norme ci-dessus).
2. L'endomorphisme de dérivation $D : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P'$ est-il continu ?
3. Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que l'application linéaire $u : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P(a)$ est continue.
   (b) Montrer que la norme de u est inférieure à $\dfrac{1}{1-|a|}$.
   (c) En considérant la suite des polynômes $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\bar{a}^k}{|a|^k} X^k$, montrer que la norme de u vaut $\dfrac{1}{1-|a|}$.