Agrégation interne. Cours P. Caldero.
Algèbre et géométrie.

LES TROIS FILLES DU DOCTEUR FIBONACCI

Le but de ce cours est de présenter, à travers la fameuse suite de Fibonacci, trois façons d'aborder les suites récurrentes linéaires.

1 La suite de Fibonacci.

La suite de Fibonacci est la suite (F_n) qui vérifie $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $F_0 = F_1 = 1$ qui a eu ses heures de gloire dans l'antiquité, à la renaissance, et à la fête de la science où l'on peut admirer sa présence dans la nature, plus précisément les nombres 8 et 13 dans un ananas. Ici elle va nous servir de pretexte à présenter les suites à récurrence linéaire.

Fibonacci 1ère approche.

1) Le sous-espace vectoriel.

On note $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites à coefficients complexes (pour quelles lois ?) et $\mathcal{S}_F$ le sous-espace vectoriel des suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Si on note (a_n) la suite de $\mathcal{S}_F$ telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ et (b_n) la suite de $\mathcal{S}_F$ telle que $b_0 = 0$ et $b_1 = 0$, alors on obtient par récurrence qu'une suite (u_n) de $\mathcal{S}_F$ vérifie $(u_n) = u_o(a_n) + u_1(b_n)$. Ainsi, (a_n) et (b_n) forment une partie libre de $\mathcal{S}_F$. En évaluant la relation $\alpha(a_n) + \beta(b_n) = 0$ en $n = 0$ et 1, on obtient que $\alpha = \beta = 0$ et donc (a_n) et (b_n) forment une base. Et c'est la le premier pas décisif dans l'approche algébrique de la suite : (F_n) appartient à un espace de dimension 2.

2) Une nouvelle base de suites géométriques.

On va chercher une base plus adaptée que la base canonique que nous venons de construire. On cherche pour cela des suites géométriques non nulles de $\mathcal{S}_F$. Quitte à multiplier par un scalaire, cela revient à trouver la raison (non nulle) de cette suite qui devra vérifier l'équation

$$r^{n+2} = r^{n+1} + r^n.$$

La raison devra donc vérifier l'équation du second degré $x^2 - x - 1 = 0$ de discriminant 5 qui possède 2 racines distinctes réelles, dont le celèbre nombre d'or, qui a fait la fortune de Leonard de Vinci.

On obtient donc deux suites géométriques dans $\mathcal{S}_F$ de la forme ϕ^n et ϕ'^n. Leur coordonnées dans la base canonique sont donc respectivement $(1, \phi)$ et $(1, \phi')$. Elle constituent une nouvelle base de $\mathcal{S}_F$.

3) Coordonnées dans la nouvelle base et conclusion.

Il ne reste plus qu'à trouver les coordonnées de (F_n) dans cette nouvelle base. C'est à dire, trouver α et β tels que
$$(F_n) = \alpha(\phi^n) + \beta(\phi'^n).$$
On sait que α et β existent et nécessairement, en évaluant en 0 et en 1, on obtient $\alpha+\beta = 1$ et $\alpha\phi + \beta\phi' = 1$ de determinant principal $\phi' - \phi \neq 0$. Et donc $F_n = \alpha\phi^n + \beta\phi'^n$, avec α, β donné par le système.

Remarque. Le membre de gauche est clairement entier. Le membre de droite doit donc l'être *a posteriori*. Comment pourriez-vous justifier *a priori* qu'il est au moins rationnel ?

Fibonacci 2ème approche.

On va coder cette récurrence par la matrice 2×2 donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit U_n le vecteur colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. On a par construction la relation de recurrence :
$$U_{n+1} = AU_n.$$
On reconnait une suite géométrique généralisée et on peut alors écrire $U_n = A^n U_0$. Il ne reste plus qu'à calculer A^n. Or, $\chi_A = X^2 - X - 1$, et donc les valeurs propres de A sont les ϕ et ϕ' déjà rencontrées. Elles sont distinctes, ce qui implique que A est diagonalisable et ainsi $U_n = PD^nP^{-1}U_0$ permet de calculer U_n et donc u_n.

Fibonacci 3ème approche.

Cette fois-ci, c'est toute la suite que l'on va coder, mais dans une série qu'on appelle souvent, série génératrice : Soit
$$R := \sum_{n\geq 0} F_n z^n.$$
La relation de récurrence donne $R - zR - z^2R = 1$. Et donc R est la fraction rationnelle $\frac{1}{1-z-z^2}$. Mais pas tout de suite, il faut d'abord montrer qu'elle existe sur un rayon de convergence non nul.

Pour cela, il est bien de majorer la suite par une série géométrique, disons 2^n. Ce qui se fait par récurrence sans aucun soucis. Ainsi, le critère de Cauchy donne que le rayon est au moins $1/2$, ceci nous suffit amplement.

Il faut maintenant développer la fraction rationnelle en $z = 0$ par Taylor pour obtenir notre suite de Fibonacci. Encore une fois il faut factoriser $z^2 - z - 1 = (z-\phi)(z-\phi')$, développer $\frac{1}{(\phi-z)} = \frac{1}{\phi}\sum_{i\geq 0}\frac{z^i}{\phi^i}$. En faisant la même opération pour ϕ', on obtient, par multiplication des séries
$$R = -\frac{1}{\phi\phi'}\sum_{i\geq 0}\frac{z^i}{\phi^i}\sum_{j\geq 0}\frac{z^j}{\phi'^j} = -\frac{1}{\phi\phi'}\sum_{n} z^n\left(\frac{1}{\phi^n} + \frac{1}{\phi^{n-1}\phi'} + \ldots + \frac{1}{\phi'^n}\right).$$
On simplifie en remarquant que $\phi\phi' = -1$ et que l'on reconnait dans la somme une série géométrique.
$$R = \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{\phi^{n+1} - \phi'^{n+1}}{\phi - \phi'}z^n.$$

2 Généralisation abusive.

On va voir ce que ces méthodes deviennent si on généralise la suite de Fibonacci.
Cas des suites récurrentes linéaires.
La suite de Fibonacci est un cas très particulier des suites récurrentes linéaires qui sont données par une récurrence

$$u_{n+k} = f_1(n)u_{n+k-1} + f_2(n)u_{n+k-2} + \ldots + f_k(n)u_n,$$

et une famille de k fonctions f_i, $1 \leq i \leq k$ définies sur $\mathbb{N}$.
Dans ce cas, si on fixe les f_i, alors l'ensemble des suites vérifiant cette relation de récurrence est un sous-espace vectoriel de dimension k de l'espace des suites. Mais en général, on n'y trouve pas de suite géométriques. La première approche tourne court.
Essayons la deuxième approche. On a par définition

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1 \\ f_k(n) & f_{k+1}(n) & \ldots & \ldots & f_1(n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

Si on pose

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_k(n) & f_{k+1}(n) & \ldots & \ldots & f_1(n) \end{pmatrix},$$

alors calculer explicitement la suite u_n revient à calculer $A_n A_{n-1} \ldots A_1$. Et comme *a priori* les A_i ne commutent pas entre elles, on n'a pas de diagonalisation simultanée. Et donc le produit des matrices n'est pas calculable...
La troisième approche donne des résultats plus satisfaisants. J'en donne un exemple qui a actuellement son heure de gloire : les nombres de Catalan. Le n-ième nombre de Catalan est le nombre de parenthésages possibles sur le produit de n nombres : $a_2 = 1$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$. Pour illustrer ce dernier, on note que l'on peut effectuer 5 parenthésages sur le produit de 4 nombres : $((xy)z)t$, $(x(yz))t$, $(xy)(zt)$, $x((yz)t)$, $x(y(zt))$. On pose $a_1 = 1$. Il se trouve que cette suite vérifie la relation de récurrence linéaire

$$na_n = 2(2n-3)a_{n-1}$$

Posons $x = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$ la série génératrice. On montre à l'aide d'une majoration par une suite géométrique qu'elle possède un rayon de convergence non nul et qu'elle vérifie l'équation différentielle $(1-4z)x' + 2x = 1$. A l'aide des conditions initiales $x(0) = 0$ on obtient facilement la solution $x = (1 - \sqrt{1-4z})/2$. Par une série de Newton, on obtient $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$.
Mais cet exemple peut décevoir car la récurrence permettait sans difficulté de trouver une

expression de a_n. Remboursé !
Un exemple merveilleux (et sans arnaque) est l'étude de la suite d_n du nombre de permutations de $\mathcal{S}_n$ sans point fixe (on appelle ça des dérangements). En exprimant que l'ensemble des permutations est union disjointe des sous-ensemble des permutations ayant exactemtn k points fixes, on voit que la suite vérifie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k = n!$, ce qui en fait une suite récurrente affine (pas linéaire à cause du $n!$). Mais cette fois-ci, cette suite risque fort de ne pas être majorée par une suite géométrique et dans ce cas sa série génératrice aura un rayon nul. Il est préférable de regarder sa série génératrice exponentielle $x = \sum_{n\geq 0} d_n t^n/n!$. On vérifie que $e^t\, x = \sum_{k\geq 0} t^n$ car la récurrence ci-dessus peut également s'écrire

$$\sum_{k=0}^{n} (\frac{d_k}{k!}) \frac{1}{(n-k)!} = 1.$$

Et donc $x = \frac{e^{-t}}{1-t}$. En décomposant e^{-t} et $\frac{1}{1-t}$ en série de Taylor et en multipliant les séries, on obtient :

$$d_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

Cas des suites récurrentes linéaires à coefficients constants.

1ère approche.

On considère le sous-espace vectoriel des suites données par une récurrence

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

où les a_i sont des complexes fixés (non tous nuls.
Si le polynôme $P := X^k - a_1 X^{k-1} - \ldots - a_0$ possède des racines distinctes t_i, $0 \leq i \leq k-1$, alors les suites géométriques (t_i^n) forment une base du sous-espace. Pour le montrer, il suffit de voir que cette famille est libre, puisque son cardinal est égal à sa dimension. Il faut donc résoudre $\alpha_0 t_0^j + \ldots + \alpha_{k-1} t_{k-1}^j = 0$, $0 \leq j \leq k-1$. Il s'agit d'un système de Cramer : son déterminant principal est un déterminant de Vandermonde donc non nul puisqu'égal à

$$\det V = \det((t_i^j)_{0\leq i,j\leq k-1}) = \prod_{0\leq i<j\leq k-1} (t_j - t_i).$$

Conditions initiales : Soit (u_n) une telle suite. Elle est donc entièrement déterminée par les k premiers termes $u_0, \ldots, u_{k-1}$. Pour la décomposer dans la “bonne” base des suites géométriques, il faut trouver les coefficients α_i tels que $u_j = \alpha_0 t_0^j + \ldots + \alpha_{k-1} t_{k-1}^j$, $0 \leq j \leq k-1$. Il s'agit encore d'un système de Cramer associé au déterminant de Vandermonde.
Cas pathologique : Que se passe-t-il lorsque P possède des racines multiples ? Par exemple les racines de distinctes de P sont t_i, $0 \leq i \leq r-1$, avec multiplicités m_i. Il est clair que dans ce cas, les suites géométriques (qui formeront encore ne partie libre par Vandermonde) auront du mal à constituer une base. Il faut chercher une base dans une forme plus générale. En fait on montre qu'une base est formée des suites de la forme $(n^s t_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour $0 \leq i \leq r-1$, $0 \leq s \leq m_i - 1$. Comme précédemment, il faut calculer le déterminant du système

$$\sum_{0\leq i\leq r-1,\, 0\leq s\leq m_i-1} \alpha_{i,s} j^s t_i^j = u_j,\ 0 \leq j \leq k-1.$$

On peut voir cela comme un Vandermonde pathologique. Toujours est-il que l'on montre par une récurrence laborieuse ou par une jolie application de la factorialité des polynômes à une ind'eterminée sur un corps, que l'on a bien un système de Cramer de déterminant principal. Comme ci-dessus, le déterminant nous permet aussi de trouver la décomposition d'une suite donnée par les conditions initiales.

$$\det V = \prod_{0\leq i<j\leq r-1} (t_j - t_i)^{m_i m_j}.$$

2ème approche.
C'est l'approche matricielle.

On pose

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_k & a_{k+1} & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix} \text{ et } U_n := \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+k-1} \end{pmatrix}$$

Ce qui donne $U_{n+1} = AU_n$ et donc $U_n = A^n U_0$. On reconnait une matrice compagnon $A = C_P$ de polynôme caractéristique P. Et son polynôme minimal est donc aussi P, de par les propriétés connues des matrices compagnon (de la chanson).
Ainsi donc, C_P est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ ssi P est à racines simples. On a alors dans ce cas, $U_n = QD^nQ^{-1}U_0$ où D est la matrice diagonale constituée des racines de P et Q est la matrice de passage.
Cas pathologique : Comment s'adapte cette méthode lorsque P possède des racines multiples ? A n'est alors plus diagonalisable mais trigonalisable. Il est en général difficile de calculer la puissance d'une matrice triangulaire. Mais, il se trouve que le théorème de Jordan (qui n'est pas au programme, et c'est bien triste parce que c'est quand même notre lyonnais d'élite) dit que A est semblable à une matrice de la forme

$$T := \begin{pmatrix} J_{m_0}(t_0) & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & J_{m_r}(t_r) \end{pmatrix},$$

avec $J_m(t)$ le bloc de Jordan

$$J_m(t) = t1_m + J_m(0),\ J_m(0) := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{C})$$

Il suffit donc de calculer $J_m(t)^n$. Le binôme de Newton nous donne

$$J_m(t)^n = (t1_m + J_m(0))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k J_m(0)^{n-k}.$$

Et donc

$$J_m(t)^n = \begin{pmatrix} t^n & \binom{n}{1}t^{n-1} & \binom{n}{2}t^{n-2} & \dots & \binom{n}{n}t^0 \\ 0 & t^n & \binom{n}{1}t^{n-1} & \dots & \binom{n}{n-1}t^1 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \binom{n}{1}t^{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t^n \end{pmatrix}$$

3ème approche.

Idem. On code la suite sous forme de série génératrice comme pour la suite de Fibonacci.

$$R := \sum_{n\geq 0} u_n z^n.$$

On montre par majoration par une suite géométrique que la serie entière possède un rayon de convergence non nul et que R est la fraction rationnelle $-\frac{1}{P}$. On factorise P pour la développer en série de Taylor.