

Jeux à  
stratégie gagnante  
*Hex*

Groupe « Jeux »

# 1 Présentation du jeu *Hex*

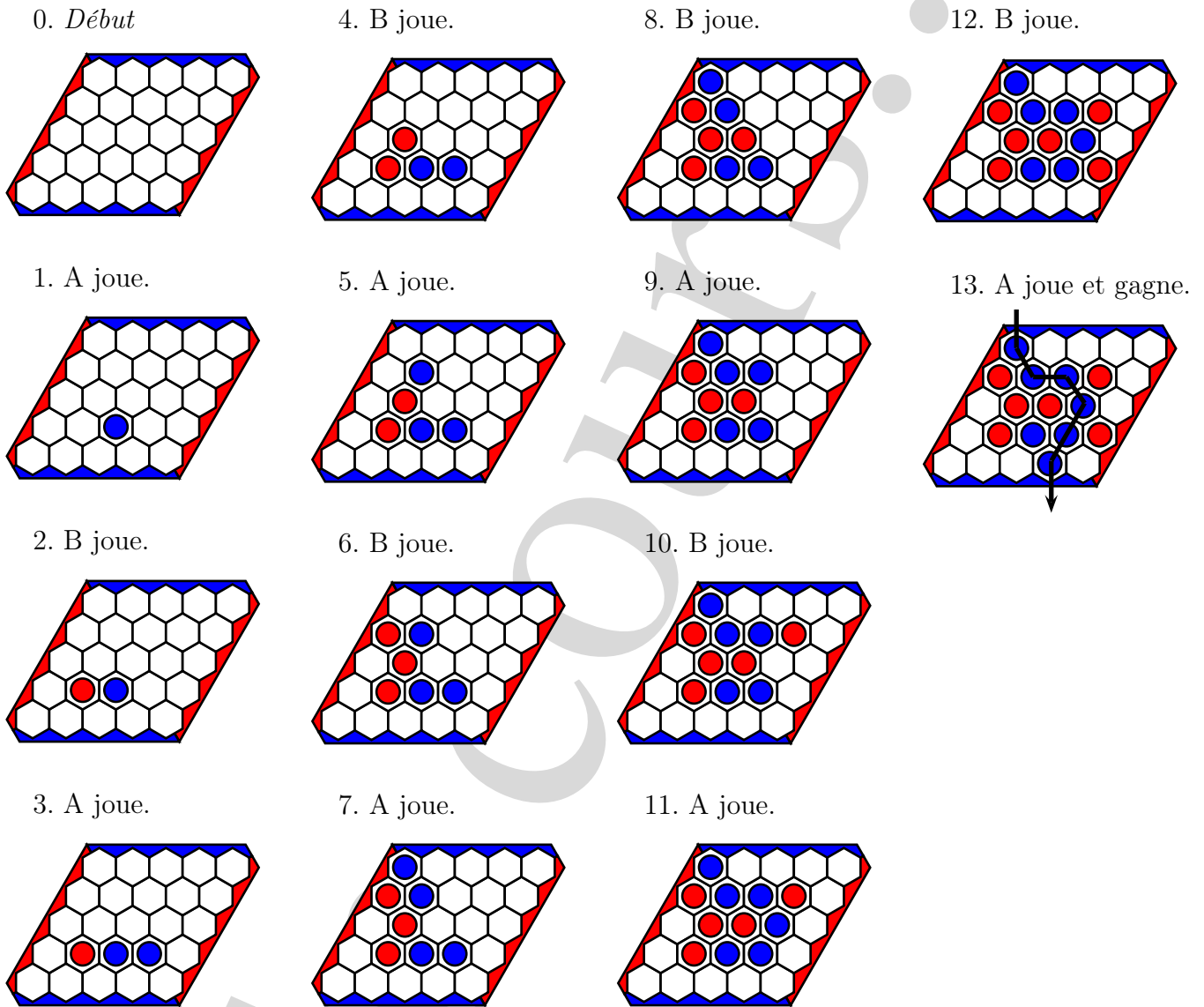
*Hex* se joue sur un plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales.<sup>1</sup>

Au début de partie, un plateau vide sépare deux joueurs. Deux bords opposés ont la même couleur, ici bleu et rouge.

Chaque joueur possède des pions à leur couleur qu'ils disposent tour à tour sur une case de leur choix et un par un. Le plateau se remplit ainsi progressivement.

Un joueur a gagné lorsqu'il a relié les deux côtés opposés du damier de sa couleur par une ligne continue.

Voici un exemple de partie, sur un damier  $5 \times 5$ , où A (en bleu) gagne.



Une règle supplémentaire est parfois appliquée. Si Bleu commence, il joue le premier coup, Rouge a alors le choix entre jouer à son tour ou intervertir les couleurs. Dans ce cas, le joueur qui a commencé devient alors Rouge, et joue alors son premier coup en tant que Rouge, le jeu continuant ensuite normalement.

Quelle est la stratégie gagnante ?

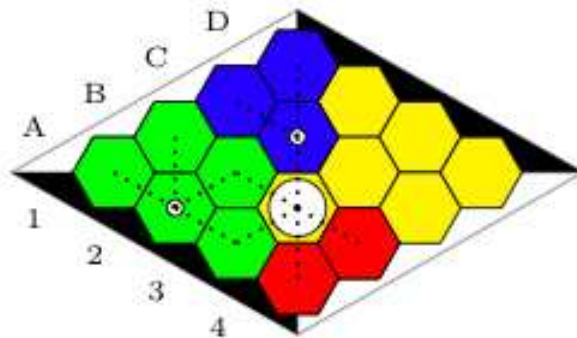
1. Toutes les dimensions du côté du losange sont possibles, la plus traditionnelle est celle composée par 11 hexagones. L'un des inventeurs du jeu, John Nash, préconise un plateau de taille  $14 \times 14$ .

## 2 Un peu de stratégie

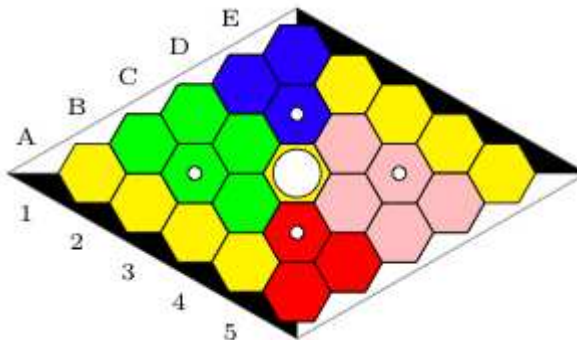
*Cette partie reprend l'article de Frédéric Le Roux, cité en bibliographie (2).*

### 2.1 Gagner sur un petit plateau

Sur un plateau  $4 \times 4$ , les blancs ont une stratégie gagnante qui commence en B3, à la suite de quoi les noirs ne peuvent empêcher les blancs de compléter l'un des chemins victorieux indiqués en pointillés. Les blancs procèdent de la façon suivante. A tout moment, si les noirs jouent dans l'une des deux cases rouges, les blancs répliquent dans l'autre case rouge, assurant ainsi la connexion avec le bord en bas à droite. Si les noirs jouent leur premier coup dans la zone verte, les blancs répondent dans la zone bleue, dans la case marquée d'une pastille blanche, ce qui assure la victoire par le principe des maillons. Inversement, si les noirs jouent dans la zone bleue, les blancs gagnent en jouant dans la zone verte.

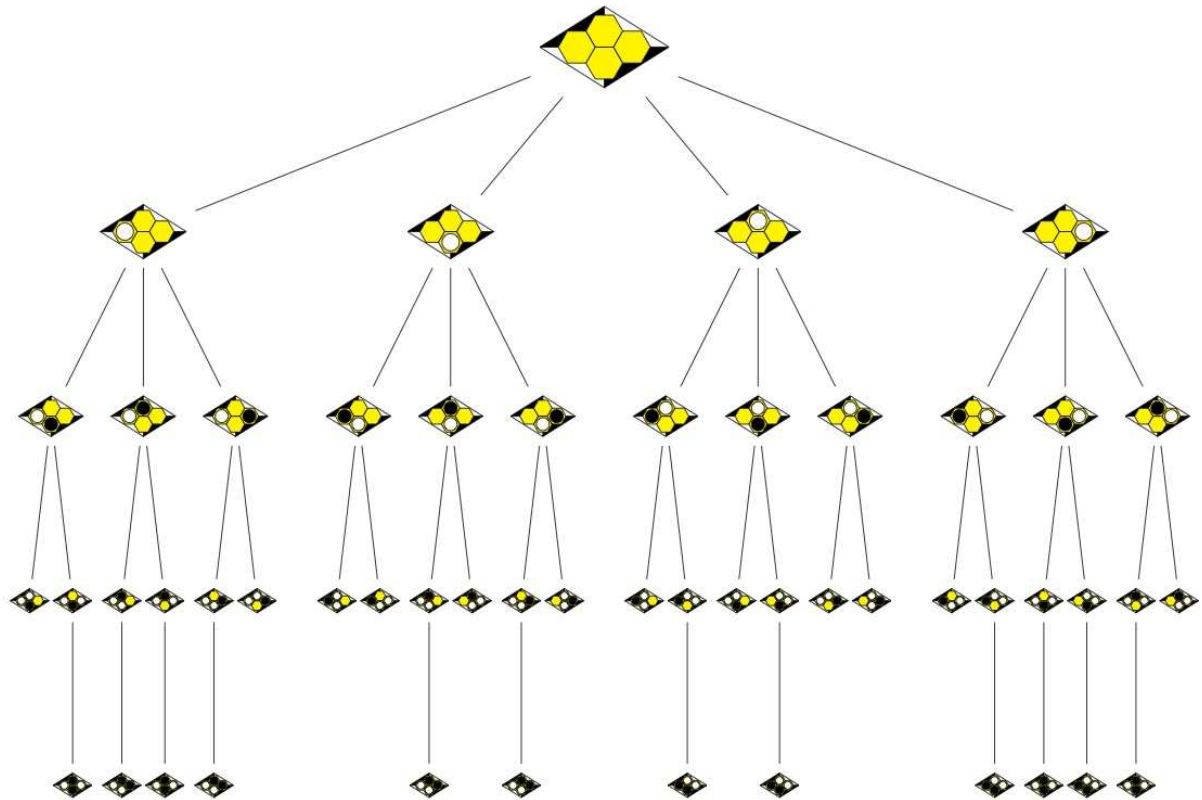


Le principe est le même sur un plateau  $5 \times 5$  : en jouant dans la case centrale C3, les blancs peuvent assurer leur connexion aux deux bords quoiqu'il arrive, grâce à des ensembles disjoints de cases dans lesquels ils peuvent, en un seul coup, sécuriser un chemin.



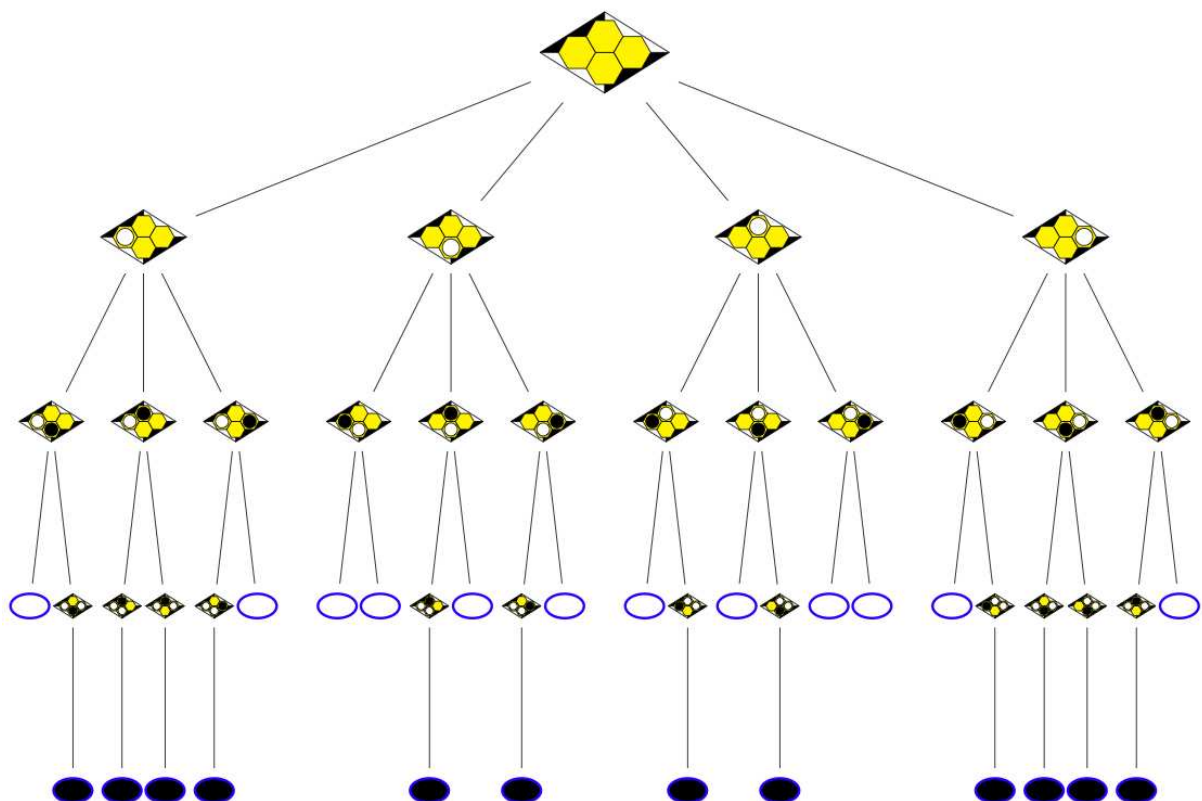
### 2.2 Stratégies gagnantes et arbre du jeu

Les mathématiciens aiment modéliser le jeu de Hex sous la forme d'un arbre représentant toutes les parties possibles. L'arbre commence avec la position initiale, un plateau vide. De cette racine partent autant de branches qu'il y a de possibilités pour le premier coup du premier joueur, et chaque branche aboutit à un nœud de l'arbre représentant la position obtenue, le plateau contenant un unique pion blanc. De chacun de ces nœuds partent à nouveau autant de branches que de réponses possibles pour le second joueur, et ainsi de suite. La figure ci-dessous représente l'arbre des parties pour le jeu de Hex  $2 \times 2$ . Cette taille de plateau est bien sûr particulièrement inintéressante à jouer, et cependant l'arbre occupe déjà une place respectable avec ses 52 branches ! Pour les plateaux plus grands on ne peut pas vraiment dessiner l'arbre sur une feuille de papier, il s'agit plutôt d'un objet abstrait qui est utile pour le raisonnement.



L'arbre va nous aider à nous convaincre qu'il y a bien une stratégie gagnante pour l'un ou l'autre des deux joueurs. Le principe consiste à colorier tous les nœuds de l'arbre en blanc ou en noir, chaque nœud colorié correspondant à une position à partir de laquelle le joueur de la couleur correspondante possède une stratégie gagnante.

L'arbre se termine par des nœuds d'où ne partent aucune branche, qu'on appelle des feuilles ; chaque feuille représente une fin de jeu, avec la victoire de l'un des deux joueurs, puisqu'il n'y a pas de partie nulle possible. Nous commençons par colorier en blanc les feuilles représentant une fin de partie gagnée par les blancs, en noir celles correspondant à la victoire du joueur noir.



Le reste du coloriage se fait progressivement. À un moment donné, on veut attribuer une couleur à un nœud qui n'en a pas encore, mais dont toutes les branches descendantes mènent à des nœuds déjà coloriés. Supposons que ce nœud représente une position à partir de laquelle c'est aux blancs de jouer. Si l'une au moins des branches issues du nœud mène à un nœud blanc, alors on colorie le nœud en blanc. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si toutes les branches mènent à des nœuds coloriés en noir, on le colorie en noir. On procède de façon symétrique si c'est aux noirs de jouer. De proche en proche, on colorie ainsi tous les nœuds de l'arbre, jusqu'à la racine représentant la position initiale. Si celle-ci est finalement coloriée en blanc, le mode de coloriage utilisé assure que le joueur blanc pourra à chaque coup emprunter une branche menant à un nœud blanc, et que le joueur noir, au contraire, n'aura jamais le choix qu'entre des branches menant toutes à un nœud blanc. Ainsi, la stratégie des blancs consistant à rester sur les nœuds blancs est possible et gagnante. Si la racine est noire, par contre, ce sont les noirs qui ont une stratégie gagnante.

### 3 Pour jouer en ligne...

Le programme Hexilla (parmi d'autres) est disponible en ligne :  
<http://www.mattesmedjan.se/hexilla/>

### Bibliographie

- (1) <http://fr.wikipedia.org/wiki/Hex>
- (2) « Le jeu de Hex », Frédéric Le Roux, *Images des Mathématiques*, CNRS, 2012  
<http://images.math.cnrs.fr/Le-jeu-de-Hex.html>
- (3) <http://www.micmaths.com/ateliers/jeu-hex.php>