Inégalités II

1 Inégalité de Carlemann.

On se propose d'établir l'inégalité de Carlemann : pour toute série $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ à termes positifs convergente, la série $\sum_{n\geqslant 1}(a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}}$ est convergente et on a l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1a_2\dots a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{e}\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

1. Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $\dfrac{n+1}{(n!)^{1/n}} \leqslant \mathrm{e}$.
2. En écrivant $a_1a_2\dots a_n = \dfrac{a_1\cdot 2a_2\cdot\dots\cdot na_n}{n!}$, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$(a_1a_2...a_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{n+1}{(n!)^{1/n}}\cdot\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n+1)}.$$ (*Penser à l'inégalité arithmético-géométrique*).
3. Montrer que, pour tout entier $N \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} a_n - \frac{1}{N+1}\sum_{n=1}^{N} na_n$.
4. En déduire que la série de terme général $\dfrac{a_1+2a_2+\dots+na_n}{n(n+1)}$ est convergente et a pour somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ puis conclure.
5. On se propose de montrer que la constante e dans l'inégalité de Carlemann est la meilleure possible.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \ln N$.
   (b) En déduire un équivalent, lorsque $N \to +\infty$, de $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n!)^{1/n}}$. (*Penser à la formule de Stirling*).
   (c) En utilisant les suites $(a_n)^N$ définies par $a_n = \begin{cases} 1/n & \text{si } n \leqslant N \\ 0 & \text{si } n > N\end{cases}$, montrer que la constante e est la meilleure possible.

2 Inégalité de Hilbert.

1. Soit p une fonction polynômiale à coefficients réels.
   (a) Établir l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} p(x)\,\mathrm{d}x = -i\int_0^{\pi} p(\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{it}\ \mathrm{d}t$.
   (b) En déduire l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 p^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|p(\mathrm{e}^{it})\right|^2\ \mathrm{d}t$.
2. En déduire l'inégalité de Hilbert : si $a_0,\dots,a_n$ sont des nombres réels positifs alors on a
$$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n}\frac{a_pa_q}{p+q+1} \leqslant \pi\sum_{p=0}^{n} a_p^2.$$

3 **Inégalité de Jensen.**

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue et convexe et $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que :

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 (\varphi \circ f)(t)\,\mathrm{d}t.$$

4 **Inégalité de Wirtinger.**

Soit $f : [0,\pi] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $f(0) = f(\pi) = 0$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(t)f'(t)\operatorname{cotan} t\,\mathrm{d}t$.
2. Établir l'égalité : $\displaystyle\int_0^\pi f(t)f'(t)\operatorname{cotan} t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi f^2(t)(1+\operatorname{cotan}^2 t)\ \mathrm{d}t$.
3. En déduire l'inégalité de Wirtinger : $\displaystyle\int_0^\pi f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^\pi f'^2(t)\,\mathrm{d}t$.
4. Étudier les cas où l'égalité a lieu.

5 **Inégalité de Gronwall.**

1. Soit c un réel, $u, v : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ deux fonctions continues vérifiant :
   $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad u(x) \leqslant c + \displaystyle\int_0^x u(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad u(x) \leqslant c\exp\left(\displaystyle\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$.
2. Soit $\varphi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ une fonction continue et intégrable et soit f une solution de l'équation différentielle $(\mathbf{E})\quad y'' + (1+\varphi(x))y = 0$. Pour $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose : $g(x) = f(x) + \displaystyle\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*,\ g''(x) + g(x) = 0$.
   (b) En déduire que toute solution de $(\mathbf{E})$ est bornée sur $\mathbf{R}_+$.

6 **Inégalité de Hardy.**

Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que f^2 soit intégrable.
On note g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x > 0 \\ f(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que g est continue sur $\mathbf{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^x g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t - xg^2(x)$.
2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t \leq 4\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$.