



Gilbert ARSAC
Gisèle CHAPIRON
Alain COLONNA
Gilles GERMAIN
Yves GUICHARD
Michel MANTE

INITIATION AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF *au collège*

□ PRESSES
□ UNIVERSITAIRES
□ DE LYON

Gilbert ARSAC,
Professeur à l'Université Claude Bernard - Lyon 1

Gisèle CHAPIRON,
Professeur au Collège Honoré de Balzac, Vénissieux

Alain COLONNA,
Professeur au Collège Jean Vilar, Villeurbanne

Gilles GERMAIN,
Maître de Conférences à l'Université Claude Bernard - Lyon 1

Yves GUICHARD,
Professeur au Lycée Récamier, Lyon

Michel MANTE,
Professeur au Collège Jean Vilar, Villeurbanne

Gilbert ARSAC
Gisèle CHAPIRON
Alain COLONNA
Gilles GERMAIN
Yves GUICHARD
Michel MANTE

INITIATION AU RAISONNEMENT DÉDUCTIF AU COLLÈGE

Une suite de situations permettant
l'appropriation des règles
du débat mathématique

Presses Universitaires de Lyon
I.R.E.M.

Nous tenons à remercier M.-J. Pieri qui a assuré la frappe et la mise en page de ce document, et R. Lhomme pour ses conseils sur le contenu et la présentation.

© Presses universitaires de Lyon, 1992
86, rue Pasteur – 69365 Lyon Cedex 07

ISBN : 2 - 7297 - 0422 - 1

Sommaire

Introduction	1
--------------------	---

Première partie

LES EXPÉRIMENTATIONS EN CLASSE ET LEUR ANALYSE

Chapitre 1	
Problématique	5

1. Notre conception de la démonstration	5
2. Notre conception de l'apprentissage	10
Bibliographie	16

Chapitre 2	
Caractéristique des situations d'enseignement mises en place	17

1. Les principes de fonctionnement de la situation	17
2. La gestion de la classe	18
3. Conclusion	21

Chapitre 3	
Les situations expérimentées	23

<i>Nombres et démonstrations</i>	
1. L'expression $n \times n - n + 11$	25
2. Le carré d'un nombre pair	49

Figures et démonstrations

3. Un dessin suffit-il à prouver ? Le triangle aplati	65
4. Comment remettre en cause les mesures sur un dessin ? Le rectangle d'Euclide	89
5. La somme des angles d'un triangle	105

Chapitre 4

D'autres énoncés : pour construire d'autres situations	121
---	-----

Chapitre 5

Le questionnaire	131
1. Les objectifs	131
2. Le dispositif expérimental mis en place	132
3. Justification du choix des exercices	135
4. Analyse des réponses	135
5. Conclusion.....	138
Bibliographie	138

Deuxième partie

RÉFLEXIONS THÉORIQUES

Chapitre 6

Typologie des preuves	141
1. Les preuves pragmatiques	142
2. Les preuves intellectuelles	147
3. Des constatations	150
4. Conclusion	153
Bibliographie	154

Sommaire

Chapitre 7	
Histoire de la démonstration	155
Comment le problème a-t-il pu se poser ?	158
Comment la contradiction a-t-elle été levée ?.....	160
D'un programme à sa réalisation	162
Conclusions	163
Bibliographie	164
Guide de lecture	165
 Chapitre 8	
Le problème de la figure	167
1. Le problème d'enseignement	167
2. Essai de réflexion théorique	168
3. Conclusion	175
Bibliographie	176
 Chapitre 9	
Rôle des conflits socio-cognitifs	177
1. Intérêt de la coopération dans la résolution d'un problème.....	178
2. Les conflits observés	179
3. Issue des conflits	181
4. Mécanismes des conflits	183
5. Quelques hypothèses sur les origines des phénomènes observés	184
 Conclusion	187

INTRODUCTION

Le but de ce livre est de proposer aux enseignants de collège en France (qui s'adressent aux élèves de 11 à 15 ans) une série de situations d'apprentissage visant à initier progressivement les enfants au raisonnement déductif en vue de l'apprentissage ultérieur de la démonstration. Plus précisément, il s'agit, au niveau des classes de sixième et de cinquième (enfants de 11 et 12 ans), de permettre aux élèves de s'approprier les règles du débat mathématique que nous énonçons à ce niveau sous la forme suivante :

- Un énoncé mathématique est soit vrai soit faux.
- Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.
- En mathématiques, pour débattre on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord (axiomes).
- En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai.
- En mathématiques, une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.

Cette proposition répond à une demande actuelle des enseignants de collège liée à l'apparition dans les programmes en 1986 d'une rubrique "Initiation au raisonnement déductif" dès la première année (enfants de 11 ans). Cette rubrique remplace l'introduction brutale de l'apprentissage de la démonstration en quatrième. Elle vise à en atténuer la difficulté pour les élèves mais pose une question aux enseignants : comment donner un contenu précis à "l'introduction au raisonnement déductif" ? Nous donnons ici une réponse possible à cette question en précisant à la fois le but visé et les moyens d'y parvenir :

- ⇒ le but visé est l'apprentissage des règles du débat énoncées plus haut ;
- ⇒ le moyen est une série de situations d'enseignement que nous décrivons minutieusement.

Pour nous, ces situations ne sont pas des situations modèles en ce sens que d'une part elles ne résolvent pas tous les problèmes (et nous avons tenu dans la description de chaque situation à préciser ses réussites et ses échecs et l'une des situations est là surtout pour témoigner d'un échec et l'expliquer : voir chapitre 3, "la somme des angles d'un triangle") et que d'autre part, il ne s'agit pas pour nous d'obtenir que tous les professeurs de France et de Navarre les reproduisent textuellement. Il s'agit pour nous d'amener nos lecteurs à comprendre le fonctionnement de ces situations afin de pouvoir ensuite les modifier suivant leur goûts et les besoins de leurs élèves. C'est ce qui justifie l'analyse détaillée produite dans les chapitres 1 et 2 de la première partie et les réflexions théoriques de la deuxième partie. Concrètement, un lecteur intéressé pourra dans un premier temps reproduire "telles quelles" les situations proposées, ne serait-ce que pour se convaincre que "ça marche" et que les phénomènes décrits apparaissent bien, puis dans un deuxième temps, en utilisant les textes de la brochure en décortiquer le mécanisme et en inventer d'autres.

Quelques mots pour terminer pour présenter l'équipe de rédaction de cet ouvrage et son histoire : pour l'essentiel, c'est-à-dire au renouvellement près de certains participants, cette équipe est celle qui, partant de l'innovation "problème ouvert", s'est naturellement intéressé au problème de la preuve et de l'enseignement de la démonstration avec Nicolas Balacheff, puis à celui de l'initiation au raisonnement étudié par ailleurs à l'IREM de Grenoble à travers les travaux sur le "débat scientifique". C'est pourquoi on retrouve dans cet ouvrage la gestion de la classe mise en place à l'occasion du "problème ouvert", la notion de "règles du débat" introduite à l'IREM de Grenoble (avec des écarts sur le contenu de ces règles que nous laissons au lecteur le soin de découvrir), et certaines notions théoriques introduites par Nicolas Balacheff.

Ce travail a pu être réalisé grâce à la diversité des membres de l'équipe, universitaires, professeurs de collèges et de lycées, et aux moyens fidèlement attribués par l'IREM de Lyon dans le cadre de ses groupes de recherche.

PREMIÈRE PARTIE

LES EXPÉRIMENTATIONS
EN CLASSE
ET LEUR ANALYSE

Chapitre 1

Problématique

Comment a-t-on abordé le problème ?

Notre but est donc en particulier de favoriser l'apprentissage ultérieur de la démonstration chez nos élèves. Pour aborder ce problème il nous a d'abord fallu clarifier nos conceptions¹ de la **démonstration** et de l'**apprentissage**.

Ce sont ces conceptions que nous allons maintenant expliciter.

1 Notre conception de la démonstration

1.1 Explication, preuve, démonstration, raisonnement

Notre conception de la démonstration est directement issue des travaux de Nicolas Balacheff qui distingue les explications, les preuves et les démonstrations (Balacheff, 1982) :

► Nous appellerons "explication" tout discours tenu par une personne ou un groupe dont l'objectif est de communiquer à d'autre le caractère de vérité d'un énoncé mathématique.

¹ Ici ce terme est pris au sens naïf.

➤ Les preuves sont des explications acceptées par d'autres, à un moment donné. Ainsi une explication peut avoir le statut de preuve pour un groupe social donné, mais pas pour un autre.

➤ Les démonstrations sont des preuves particulières qui possèdent les caractéristiques suivantes :

- Une caractéristique sociale : ce sont les seules preuves acceptées par la communauté des mathématiciens !
- Une caractéristique sur la forme : elles respectent certaines règles : un certain nombre d'énoncés sont considérés comme vrais (axiomes), les autres sont déduits de ceux-ci ou d'énoncés précédemment démontrés à partir de règles de déductions prises dans un ensemble de règles logiques.
- Les objets mathématiques sur lesquels ces preuves opèrent ont un statut théorique, ils n'appartiennent pas au monde sensible, bien qu'ils y fassent évidemment référence.

Ce problème de la nature des objets mathématiques, sur lequel il n'est pas question de tenir aux élèves de collèges un discours théorique, soulève des difficultés d'enseignement bien connues, en particulier en géométrie. Dans ce cas, une étude plus approfondie est proposée au chapitre 8.

Les distinctions relatives aux preuves peuvent être schématisées de la manière suivante :

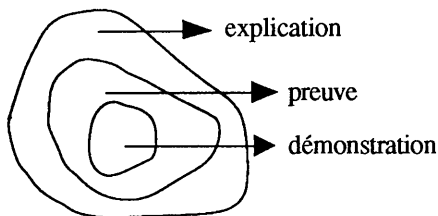
Explications

Preuves :

explications acceptées par un groupe social.

Démonstrations :

preuves acceptées par les mathématiciens.



1.2 Pourquoi vouloir démontrer ?

Ici nous rejoignons l'analyse de nos collègues de l'IREM de Poitiers (Poitiers, 1988) qui distinguent deux fonctions de la démonstration :

➤ **Démontrer pour convaincre :** C'est-à-dire proposer une argumentation que le locuteur ne peut remettre en cause. Il s'agit dans ce cas de répondre à la question :

"Est-ce que c'est vrai ?"

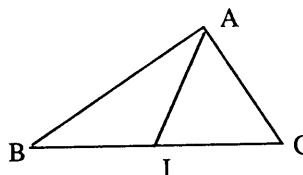
➤ **Démontrer pour comprendre** : Il s'agit ici de répondre à la question :

"Pourquoi est-ce vrai ?"

Prenons deux exemples :

Exemple n° 1

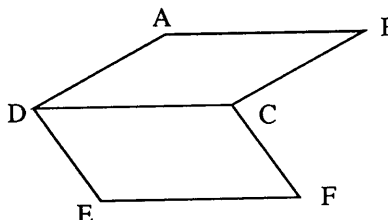
Les triangles ABI et AIC ont-ils même aire ?



Dans cet exemple il y a une incertitude pour la majorité des élèves quant au résultat, la démonstration sert donc ici à se convaincre ou (et) convaincre les autres de la validité du résultat.

Exemple n° 2

ABCD et CDEF sont deux parallélogrammes, les droites (AB) et (EF) sont-elles parallèles ?



Dans cet exemple, pour la majorité des élèves il n'y a pas d'incertitude quant au résultat. La démonstration dans ce cas sert à comprendre en un sens mathématique, c'est-à-dire à établir un lien entre cette évidence et les propriétés de géométrie connues de l'élève.

Notons que cette distinction dépend des personnes : des résultats peuvent paraître évidents pour certains et pas pour d'autres ; ce qui signifie qu'une démonstration qui aura pour effet de convaincre certains apparaîtra pour d'autres comme un outil pour comprendre.

Notre groupe ne s'est intéressé qu'à la première fonction de la démonstration : *Démontrer pour convaincre*. Ce choix s'inscrit logiquement dans le travail que nous avons mené dans le cadre de la pratique du problème ouvert (Arsac et al, 1988). D'autre part, cette approche nous semble plus accessible pour des élèves de 6ème, 5ème. Il nous semble que c'est seulement

à partir de la classe de 4ème que les élèves pourront véritablement s'approprier la deuxième fonction.

Compte-tenu de la conception de la démonstration sur laquelle nous nous appuyons, "démontrer pour convaincre", il nous semble nécessaire ici de clarifier les distinctions entre argumenter, prouver et démontrer.

Nous allons tout d'abord définir ce que nous entendons par argumenter. Pour cela nous reprendrons les définitions proposées par Oleron et Perelman. Pour le premier l'argumentation *"c'est une démarche par laquelle toute personne - ou un groupe - entreprend d'amener un auditoire à adopter une position par le recours à des présentations ou assertions -arguments- qui visent à en montrer la validité ou le bien-fondé"* (Oleron, 1983 p. 4) et pour Perelman : *"le but de toute argumentation [...] est de provoquer ou d'accroître l'adhésion des esprits aux thèses qu'on présente à leur assentiment"* (Perelman, 1970, p. 59).

Prouver, comme nous le précisons précédemment, c'est un processus qui vise à assurer la validité d'une assertion ou d'une décision. On peut donc souligner une différence importante entre prouver et argumenter : on peut parfaitement argumenter sans se soucier du caractère de vérité de la conclusion à laquelle on désire que l'auditoire adhère, parce que dans une situation donnée d'argumentation, il se peut que ce qui importe pour celui qui argumente soit l'adhésion de l'auditoire à la thèse mais pas forcément sa validité. Cette différence entre argumenter et prouver est reprise par Moschler : *"Un discours argumentatif n'est pas un discours apportant à proprement parler des preuves, ni un discours fonctionnant sur les principes de la déduction logique. En d'autres termes, argumenter ne revient pas à démontrer la vérité d'une assertion, ni à indiquer le caractère logiquement valide d'un raisonnement."* (Moschler, 1985, p. 46).

Par contre, produire une preuve au sens où nous l'avons défini précédemment oblige son auteur à produire des raisons, donc des arguments, qui l'amènent à conclure à la validité de son (ses) assertions(s). On peut donc dire que prouver est un cas particulier d'argumenter. En ce sens, nous rejoignons Perelman pour qui : *"la preuve de la vérité, si elle doit être administrée dans un domaine formellement, scientifiquement ou techniquement circonscrit, de commun accord par tous les interlocuteurs"* (Perelman, 1970, p. 61) (c'est le cas des mathématiques) doit être considérée comme un cas particulier de l'argumentation. Entre argumentation et démonstration il y a bien sûr beaucoup de différences. Nous en citerons ici trois qui nous semblent essentielles :

- Nous pouvons dire en principe qu'une démonstration est correcte ou incorrecte en vérifiant qu'elle est conforme aux règles énoncées précédemment (tout au moins en ce qui concerne les démonstrations que

nous demandons de faire à nos élèves). Comme le précise Blanché : *"Une démonstration formelle est correcte ou incorrecte, il n'y a pas de milieu. Et si elle est correcte elle se suffit à elle-même, il n'y a rien à y ajouter. Par contre, une argumentation n'a jamais cette rigueur contraignante d'une bonne démonstration. Sa validité est affaire de degré : elle est plus ou moins forte. Et c'est pourquoi elle n'est jamais close : on peut toujours viser à la renforcer en accumulant des arguments convergents [...] tandis que la faiblesse d'un seul de ces chaînons affecte la solidité de toute chaîne déductive, l'argumentation serait plutôt comparable à un tissu dont la solidité dépasse de loin celle de chacun des fils qui le composent."* (Blanché, 1973, p. 223).

- D'autre part, les différentes propriétés utilisées dans une démonstration sont explicites et s'enchaînent logiquement au sens de la logique formelle. Par contre, dans une argumentation, les arguments reposent sur des prémisses souvent équivoques et implicites. L'enchaînement des arguments fait référence à la logique naturelle qui est très différente de la logique formelle (nous reviendrons plus loin sur ce point).
- Enfin : *"Une démonstration est quelque chose d'intemporel, d'impersonnel"* (Blanché, 1973, p. 224). Par contre, l'argumentation s'adresse à une ou des personne(s) qu'il s'agit de persuader. Les phénomènes sociaux et psychologiques qui interviennent dans la communication sont alors à prendre en compte, de même que le déploiement de l'argumentation dans le temps.

1.3 Incertitude et enjeu

S'engager dans une démarche de preuve pour convaincre suppose qu'il y ait une incertitude quant à la validité de la conjecture produite mais cette incertitude ne suffit pas : au cours de la recherche d'un problème il nous est tous arrivé de conjecturer un résultat dont nous n'étions pas sûrs, sans pour autant sentir la nécessité d'aller plus loin, c'est-à-dire de prouver ce résultat. Pour s'engager dans une démarche de preuve il faut qu'il y ait un enjeu qui nous incite à lever l'incertitude.

1.4 Et le raisonnement ?

Suivant une définition classique de Peirce, le but du raisonnement est de découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore ... Comme ce programme très vaste peut être atteint par des moyens fort variés, le mot raisonnement est susceptible de multiples définitions, il présente par ailleurs une ambiguïté (qui est aussi une

commodité) : il désigne à la fois l'activité intellectuelle qui aboutit au but visé et le résultat écrit ou oral de cette activité.

En fait, nous nous intéressons au raisonnement seulement dans le domaine des mathématiques, ce qui va déjà restreindre le problème. Il est important de noter que le raisonnement mathématique emploie d'autres outils que la logique formelle : le raisonnement par récurrence, mais aussi le calcul algébrique, sont des moyens typiques pour arriver en mathématiques au but défini par Peirce. Cependant, l'appellation de raisonnement déductif, que nous avons reprise du libellé des programmes, la volonté de préparer l'apprentissage futur de la démonstration, limitent encore le champ, et nous rapprochent des considérations développées dans les paragraphes précédents. Mais le choix final des règles du raisonnement mathématique sur lesquelles nous avons finalement décidé de travailler est aussi d'origine pragmatique : il s'agit de règles dont on sait, à la fois par des recherches antérieures et par l'expérience des enseignants, qu'elles sont à l'origine de difficultés pour les élèves, tout en ne faisant pas toujours l'objet d'un enseignement explicite. Ainsi le lecteur retiendra que les règles dont nous visons l'apprentissage (cf. introduction) ne recouvrent évidemment pas le champ beaucoup plus vaste du raisonnement mathématique.

2 Notre conception de l'apprentissage

Ici, nous nous référons aux hypothèses constructivistes que nous allons essayer d'explicitier tout d'abord à l'aide d'une métaphore : Imaginons un bricoleur confronté à un problème de bricolage qui est nouveau pour lui. Sa première réaction, face à ce problème, est d'ouvrir sa boîte à outils et d'essayer de trouver l'outil qui lui semble le plus adapté à la situation. Si cet outil ne convient pas (c'est-à-dire s'il ne lui permet pas de résoudre son problème ou si l'utilisation de l'outil risque d'être très coûteuse en temps) il va alors en chercher un autre et l'essayer... C'est seulement après plusieurs tentatives infructueuses qu'il va prendre conscience que, dans sa boîte à outils, il n'y a pas l'outil adéquat et qu'en conséquence il va falloir, pour résoudre son problème, construire un outil nouveau, ou bien s'approprier celui que lui proposera un ami ou un spécialiste!

Cette métaphore va nous permettre d'explicitier un certain nombre d'hypothèses que nous empruntons au constructivisme :

- Tout d'abord, contrairement à ce qu'on pourrait penser, la tête de l'élève n'est jamais vide de connaissance (de même que la boîte à outils du bricoleur n'est pas vide). Comme le dit Bachelard : *"Quel que soit son*

âge, l'esprit n'est jamais vierge, table rase ou cire sans empreinte." (Bachelard, 1975). Pour un concept donné, l'ensemble des connaissances que l'on attribue à l'élève et qui nous permettent de rendre compte des processus qu'il utilise, des réponses qu'il fournit, et de les expliquer, est appelé conception ou représentation.

- L'apprentissage de connaissances ne se fait ni par empilement, ni de manière linéaire : tant que l'élève, par rapport à une notion donnée, ne prend pas conscience de l'insuffisance de ses conceptions, il les gardera. Même si on réussit à lui vendre un nouvel outil (même s'il donne l'impression de l'avoir acquis) il reviendra à l'ancien plus économique pour lui (au sens de "plus sûr") s'il n'a pas pris lui-même conscience de son insuffisance. Voici une citation qui résume bien cette hypothèse : *"Apprendre c'est autant perdre les idées qu'on se faisait qu'en acquérir de nouvelles."* (Hameline)
- Le bricoleur (pardon l'élève) n'arrive véritablement à donner du sens à un outil (un concept) que s'il lui apparaît nécessaire c'est-à-dire s'il lui apparaît d'abord comme un outil qui lui permet de résoudre un problème qu'il s'est approprié.
- Enfin, dernière hypothèse qui n'est pas mise en évidence à travers la métaphore précédente : la mise en place de conflits, portant sur des connaissances, entre les élèves peut faciliter leur acquisition. On parle ici de conflits socio-cognitifs. Nous reprenons ici les résultats des travaux de l'école genevoise de psychologie sociale génétique (Mugny, 1985). Le travail de groupe peut favoriser la mise en place de ces conflits. L'intérêt et les limites de ces conflits sont étudiés dans le chapitre 9.

Ainsi, si l'on se réfère à ces hypothèses, l'acquisition d'une connaissance passe, dans un premier temps, par la prise de conscience par l'élève de l'insuffisance de ses connaissances antérieures.

Cela suppose qu'il faut trouver des situations qui permettent aux élèves :

- d'utiliser leurs propres connaissances.
- de prendre conscience qu'elles sont insuffisantes.
- d'acquérir des connaissances nouvelles mieux adaptées à la situation.

Ces connaissances sont, soit construites par l'élève², soit apportées par le professeur. Dans tous les cas l'acquisition de connaissances nouvelles vient après la prise de conscience par l'élève de l'insuffisance de ses connaissances anciennes.

² Ce qui est bien sûr l'idéal, mais nous verrons que pour certaines connaissances, cela ne nous semble pas possible.

Quelles sont les conséquences de cette théorie par rapport à l'apprentissage de la démonstration ? Compte-tenu de nos conceptions de l'apprentissage et de la démonstration, cette dernière ne prendra donc son sens que si elle apparaît pour l'élève comme un outil indispensable de preuve. Ceci suppose une remise en cause des outils que l'élève utilise spontanément pour se convaincre ou convaincre les autres de la validité d'un résultat. Or l'élève (ou l'adulte) placé dans une situation de validation produira des preuves différentes suivant les exigences de cette situation. On parle de principe "d'économie de logique". Voici une métaphore de Popper qui illustre ce point (Popper, 1972 p. 89-90).

"Lorsque j'achète un livre et que le libraire me rend 20 pences de monnaie, je suis "tout à fait certain" que les deux pièces ne sont pas des contre-façons [...]. Si quelqu'un me demandait : "êtes-vous certain que la pièce dans votre main est une pièce de 10 pences ?", je lui jetterais peut-être à nouveau un coup d'œil et lui dirais "oui" mais si quelque chose d'important dépendait de la vérité de mon jugement, je pense que je prendrais la peine de me rendre dans la banque la plus proche et demanderais au caissier d'examiner la pièce ; et si la vie d'un homme en dépendait, j'essayerais même de voir le responsable de la banque d'Angleterre et lui demanderais de certifier l'authenticité de la pièce."

Ainsi l'élève, placé dans une situation de validation n'utilisera pas naturellement comme preuve la démonstration. Il nous faut donc étudier les différents outils de preuve que les élèves emploient plus ou moins spontanément.

2.1 Typologie des preuves

Placé face à une situation de validation, l'élève dispose de deux outils de preuve que nous connaissons tous très bien :

- En ce qui concerne les problèmes numériques, l'élève se contente de vérifier la conjecture dans quelques cas particuliers pour conclure qu'elle est vraie.
- En géométrie, il se contente de voir ou de mesurer sur le dessin pour conclure.

En étudiant de plus près ces différents types de preuve, Nicolas Balacheff a amorcé une typologie (Balacheff, 1987). Il distingue :

➤ **Des preuves pragmatiques** : Ce sont des preuves intimement liées à l'action et à l'expérience. Les deux outils de preuves cités ci-dessus sont des exemples de preuves pragmatiques.

➤ **Des preuves intellectuelles** qui montrent que leurs auteurs ont pris du recul par rapport à l'action. La démonstration est une preuve intellectuelle particulière.

Nicolas Balacheff a distingué plusieurs types de preuves pragmatiques. Pour plus de détail sur ce point nous vous renvoyons à la deuxième partie de ce document. Il nous suffit de savoir ici que cette typologie ne prend pas en compte les phénomènes sociaux qui interviennent dans tout débat d'argumentation et donc en particulier dans les débats de validation. Ainsi, en classe, les arguments du type : *"Je suis sûr que ce résultat est juste parce que X, qui est le meilleur de la classe, pense que le résultat est juste"* ou encore *"la majorité de la classe pense que le résultat est juste donc c'est juste"* sont fréquemment avancés par les élèves.

Nous avons vu, d'autre part, que la démonstration s'appuie sur des règles de "logique formelle" (principe du tiers exclu, règles relatives à l'implication...). Or les élèves n'ont pas attendu d'arriver au collège pour débattre de la validité d'une affirmation. Ces débats (entre copains, en famille...) s'appuient sur un certain nombre de règles rarement explicitées qui constituent ce qu'on appelle "la logique naturelle". Ces règles sont souvent très différentes de celles du débat mathématique, en particulier elles sont généralement floues, elles varient dans le temps et suivant les objets sur lesquels porte le débat.

Spontanément, l'élève placé devant une conjecture à valider va utiliser la "logique naturelle", alors que nous voulons l'amener à utiliser les règles de la "logique formelle".

Il ne s'agit pas de nous engager dans un enseignement de la logique comme on l'a connu il y a quelques années. Toutes les expériences de ce type se sont soldées par un échec entre autres parce que cet enseignement était déconnecté de tout contenu.

Nous avons plutôt essayé de repérer un certain nombre de règles de logique, qui sont en rupture avec les règles utilisées spontanément par les élèves. Notre objectif est que les élèves se les approprient, c'est-à-dire sachent les utiliser en mathématiques.

2.2 Les règles du débat mathématique

Nous énonçons ci-dessous les règles du débat mathématique dont l'appropriation par les élèves nous semble nécessaire. Ces règles sont énoncées comme nous les leur présentons.

→ **Un énoncé mathématique³ est soit vrai soit faux.**

C'est bien sûr le principe du tiers exclu. Ce principe n'est pas toujours appliqué dans la vie pratique. Pour un élève un énoncé peut être parfois vrai, parfois faux, vrai à 90 % ... (Voir à ce propos les résultats de notre questionnaire chapitre 5 et les travaux de l'IREM de GRENOBLE, 1985).

→ **Un contre-exemple suffit pour invalider un énoncé.**

Ce n'est évidemment pas le cas dans la logique naturelle où une "exception", comme on le dit souvent, "confirme la règle". C'est pour cela qu'il nous semble important d'explicitier le terme technique de "contre-exemple".

→ **En mathématiques pour débattre on s'appuie sur un certain nombre de propriétés ou définitions clairement énoncées sur lesquelles on s'est mis d'accord.**

Dans les débats sociaux, les assertions, les conventions de langage, les résultats déjà acquis sont rarement explicités.

A ces trois règles, directement liées à la logique formelle, nous en ajoutons trois autres :

⇒ **En mathématiques, on ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai.**

Cette règle n'est pas de même nature que les trois règles précédentes, car elle ne correspond pas à une règle de logique formelle. Mais il nous semble essentiel de l'énoncer car souvent en classe lorsque des élèves constatent qu'ils ne sont pas d'accord sur la validité d'un énoncé, proposent de voter : "pour savoir qui a raison". Ici il y a évidemment l'utilisation d'une règle de la démocratie : se plier aux décisions votées par la majorité.

⇒ **En mathématiques, des exemples qui vérifient un énoncé ne suffisent pas à prouver qu'il est vrai⁴.**

⇒ **En mathématiques une constatation sur un dessin ne suffit pas pour prouver qu'un énoncé de géométrie est vrai.**

³ Nous appelons énoncé mathématique, toute proposition (au sens mathématique) dont le domaine de validité est un ensemble dont le cardinal est infini.

⁴ Rappelons que nous travaillons qu'avec des énoncés dont le domaine de validité est un ensemble infini.

Ces deux dernières règles correspondent bien sûr à la remise en cause des preuves spontanées que les élèves utilisent et dont nous avons parlé dans le paragraphe 2.1.

Il y a enfin des règles qui gèrent l'implication. Ce connecteur logique est abondamment utilisé au collège sous la forme "Si... alors..." La présentation des propriétés mathématiques sous cette forme est préconisée par les programmes (cf. compléments de programmes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème). Les élèves (comme les adultes d'ailleurs) rencontrent beaucoup d'obstacles pour utiliser convenablement ce connecteur. Ils confondent "Si a alors b" avec "Si b alors a" ou avec "a équivaut à b" (voir à ce propos IREM de Grenoble, 1985, Oléron 1977, p. 79 et suivantes, et notre questionnaire, chapitre 5).

Toutes ces règles ne sont donc pas naturelles pour les élèves. Il est nécessaire de les aider à se les approprier. Pour cela il ne suffit pas de les expliciter. En accord avec les hypothèses d'apprentissage citées ci-dessus, nous pensons qu'il faut trouver des situations dans lesquelles l'élève sentira leur nécessité et leur intérêt. Une des difficultés ici, c'est que la plupart de ces règles ne sont nécessaires que dans le cadre des mathématiques. Les méthodes de raisonnement de la vie courante qui sont jugées comme inacceptables dans les débats mathématiques sont souvent très utiles. C'est le cas par exemple de ce que Oléron appelle "l'induction floue" : *"C'est par l'induction floue que se dépose la masse considérable d'impressions et d'appréciations que la suite des jours conduit à accumuler sur le monde, les personnes, soi-même en fonction des expériences, des observations, des incidents, dont chacun est auteur, témoin ou acteur... et cette induction est floue dans la mesure où elle ne développe pas systématiquement et elle ne se soumet pas à la vérification."* (Oléron, 1977). Cette induction n'est donc pas un raisonnement mathématique et pourtant elle s'avère indispensable dans la vie de tous les jours. Ces règles du débat mathématique que nous avons citées sont finalement des conventions qui ont fait la preuve de leur efficacité mais qui ne sont pas pour autant indispensables. Certaines écoles mathématiques et philosophiques de l'antiquité ne s'appuyaient pas sur ces règles de logique ; c'est le cas par exemple des mathématiciens chinois qui n'utilisaient pas le principe du tiers exclu. Actuellement tout un courant de recherche en mathématiques s'appuie sur d'autres logiques que la logique formelle dont nous venons de parler, par exemple la logique floue, les logiques polyvalentes

2.3 Conclusion

En accord avec notre conception de l'apprentissage et notre conception de la démonstration nous pensons que, pour que l'élève donne du sens à la démonstration comme outil de preuve, il est nécessaire qu'elle apparaisse pour lui comme un outil plus performant que les autres outils de preuve dont il dispose. Cela suppose donc, dans un premier temps, que l'élève prenne conscience de l'insuffisance des preuves pragmatiques qu'il produit et qu'il s'approprie des règles du débat mathématique énoncées ci-dessus.

Pour cela, nous avons proposé aux élèves un certain nombre de situations problèmes dont nous allons expliciter les caractéristiques au chapitre suivant.

Bibliographie

- ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M., 1988, *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon.
- BALACHEFF N., 1982, *Preuves et démonstrations en mathématiques au collège*. Recherche en didactique des mathématiques Vol. 3-3.
- BALACHEFF N., 1987, *Processus de preuve et situations de validation*. Educational studies, Vol. 18 n°2.
- BLANCHE R., 1973, *Le Raisonnement*. Ed PUF.
- BOURDIEU P., 1980, *Le Sens pratique*. Ed. Minuit.
- HAMELINE D., DARDELIM M.J., 1977, *La Liberté d'apprendre*. Ed. Ouvriers.
- IREM de GRENOBLE, 1985, *Apprentissage du raisonnement*.
- MOSCHLER J., 1985, *Argumentation et conversation*. Ed. Hatier.
- OLERON P., 1977, *Le Raisonnement*. Ed. PUF.
- OLERON P., 1983, *L'Argumentation*. Ed. PUF.
- PERELMAN C., 1970, *Traité de l'argumentation*. Ed. Université de Bruxelles. 2e éd. 1983.
- POPPER KR (1972), *La Connaissance objective*. Ed. Complexe, Bruxelles, 1978.

Chapitre 2

Caractéristiques des situations d'enseignement mises en place

Vers un débat sur les arguments

Ces situations se caractérisent par :

- un certain type de problème,
- une gestion de la classe que nous allons maintenant expliciter.

1 Les principes de fonctionnement de la situation

Pour tous les problèmes choisis, l'élève doit produire un résultat et une explication pour convaincre les autres de son exactitude (on retrouve ici la conception de la preuve précédemment décrite).

Dans ces activités, il est nécessaire qu'il y ait une incertitude quant au résultat, et un enjeu qui incite les élèves à valider ce résultat.

Au cours de ces activités, les élèves doivent avoir la responsabilité de ce qu'ils produisent : ce sont eux qui décideront ce qui est vrai, ce qui est faux. On dit que **le problème est dévolu aux élèves**. Si ce n'est pas le cas, l'élève risque de résoudre le problème pour le professeur. A ce moment-là, il ne fera pas émerger ses conceptions de la preuve et donc ne pourra pas en voir l'insuffisance, car il risque de rentrer dans un jeu qui consiste

simplement à répondre en fonction des attentes du professeur (tout au moins celles qu'il perçoit).

Assurer la dévolution du problème à la classe suppose pour nous deux types de conditions :

Conditions sur l'énoncé

- Il nous semble nécessaire que l'élève puisse s'approprier le problème, c'est-à-dire que ce problème, qui au départ est celui de l'enseignant, devienne le sien.
 - Les élèves doivent facilement entrer dans sa résolution. Cela suppose qu'ils peuvent imaginer ce qu'est une solution, ils peuvent faire des essais, construire et manipuler des conjectures et des contre-exemples.
 - Les élèves peuvent fournir des explications à l'appui de leur conjectures. Ces explications feront l'objet du débat.

Conditions sur la gestion de la classe

- Il doit y avoir un enjeu qui incite les élèves à s'assurer de la validité du résultat produit. Cet enjeu, qui ne doit pas être lié à l'enseignant, est généralement lié à la compétition entre les groupes qui s'instaure naturellement.
- Le professeur, par son attitude, n'induit ni méthode ni résultat. Entre autres, il ne dit pas si les solutions proposées sont exactes ou pas : c'est la classe qui en débattrait. Evidemment après le débat, le professeur dira si les solutions, les explications retenues sont correctes ou pas.

Nous allons maintenant présenter la gestion de la classe que nous avons mise en place.

2 La gestion de la classe

Cette gestion reprend les caractéristiques énoncées précédemment et correspond globalement à celle de la pratique du problème ouvert (Arsac et al., 1988 ; cf. bibliographie du chapitre 1).

L'activité se déroule en quatre temps :

- 1er temps : Recherche individuelle.
- 2ème temps : Recherche en groupe. Cette recherche s'achève par la production d'une affiche présentant le ou les résultat(s) ou les idées du groupe et une explication pour convaincre les autres de la validité de leur(s) résultat(s).
- 3ème temps : Débat sur les affiches.
- 4ème temps : Synthèse sur les règles du débat et (ou) sur l'insuffisance de certaines preuves qui ont été mises en évidence au cours du 3ème temps.

Avant de distribuer l'énoncé aux élèves, le professeur leur présente le déroulement de l'activité en notant au tableau⁵ les trois premiers temps présentés ci-dessus. Il insiste auprès des élèves sur le fait qu'au cours de cette activité il ne précisera pas si les résultats trouvés sont exacts ou pas, c'est la classe qui décidera au moment du débat.

Nous allons commenter ces différents temps.

1er temps : Travail individuel. Nous laissons ce temps pour que chaque élève puisse s'approprier le problème sans être perturbé par des élèves plus rapides.

2ème temps : Recherche en groupe de 4 élèves. L'obligation de produire une réponse unique favorise l'apparition d'un débat dans les groupes ; ce qui permet à certains arguments de se consolider et à d'autres de disparaître. La rédaction d'une affiche peut présenter plusieurs intérêts :

- Elle assure le passage à la formulation écrite des solutions, ce qui est important pour le débat.
- Elle favorise la cohérence du groupe dans la mesure où elle lui fournit un but commun.
- Elle renforce l'enjeu pour les élèves car ils savent que leur affiche sera lue et critiquée par leurs camarades.

⁵ Nous notons ce déroulement au tableau, car l'expérience nous a montré que le discours de l'enseignant n'était pas suffisant pour que les élèves s'approprient cette organisation souvent nouvelle de la classe.

- Elle facilite l'organisation pratique de la phase de débat dans la mesure où il y a moins de propositions de solutions à débattre.

Au cours de ce temps le professeur n'intervient pas. En cas de question des élèves sur le contenu mathématique du problème, il renvoie la question au groupe. En cas de questions sur l'organisation de la classe, il renvoie les élèves aux consignes écrites au tableau.

3ème temps : Temps de débat. Le professeur choisit une première affiche. Ce choix n'est pas fait au hasard : au fur et à mesure que les élèves finissent leur production, l'enseignant en prend connaissance et essaie d'imaginer la nature du débat qui sera provoqué par chaque affiche. Généralement *nous prenons comme première affiche un texte qui est tout à la fois clair et faux*. Ce type d'affiche provoque un débat très riche dans la mesure où le problème de la pertinence des différents types de preuve est posé.

Le professeur présente l'affiche à la classe. Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser éventuellement des questions liées à la compréhension du texte. Ce temps relativement bref évite ensuite l'apparition d'arguments de la forme: "nous ne sommes pas d'accord avec cette affiche parce qu'on n'a rien compris" ou encore "nous ne sommes pas d'accord parce qu'elle est mal écrite...". Les élèves doivent préciser ensuite s'ils sont d'accord ou pas avec le résultat et l'explication produits. Ce travail se fait au niveau des groupes, les élèves ne sont pas obligés de se mettre d'accord. Ensuite, un porte-parole⁶ rapporte la position de chaque membre du groupe. Le professeur note au tableau les arguments exprimés, puis le débat s'instaure au niveau de la classe. Il porte sur la validité des arguments produits et non sur l'affiche elle-même. Le choix nous semble absolument nécessaire pour permettre un travail sur les règles du débat mathématique qui sont l'enjeu de l'apprentissage visé. Il présente d'autre part l'avantage de dépersonnaliser le débat, dans la mesure où les arguments sont moins associés à un (des) élèves(s) que ne l'est l'affiche.

Une ou deux autres affiches peuvent être débattues de cette façon. Mais l'expérience nous a montré qu'il était inutile de débattre ainsi de toutes les affiches. En effet rapidement, l'insuffisance de certaines preuves ou au contraire l'utilité des règles du débat qu'on voulait mettre en évidence, peuvent-être pointées au cours de la discussion. Ceci est d'autant plus

⁶ Le rôle du porte-parole est important pour nous : c'est lui qui va inciter ses camarades à prendre position, il va aider à clarifier la 1ère partie du débat (présentation des arguments) dans la mesure où au cours de ce temps il est le seul à prendre la parole.

important que dans des classes chargées il n'est pas possible, pour des raisons de temps, de débattre de toutes les affiches en utilisant la gestion présentée précédemment. Mais cela ne signifie pas pour autant que nous ne prenons pas en compte les autres affiches : nous les utilisons pour savoir comment les élèves se sont appropriés les règles du débat ou l'insuffisance de certaines preuves qui ont été mises en évidence au cours de la discussion des (ou de la) premières affiches. Par exemple le professeur peut demander aux élèves de se prononcer individuellement et par écrit sur chacune des affiches restantes et de donner une réponse et une explication au problème proposé.

4ème temps : Synthèse. Suivant le problème proposé, suivant la tournure que prend le débat, le professeur met en évidence certaines règles du débat mathématique et (ou) l'insuffisance de certaines preuves pragmatiques (c'est un temps d'institutionnalisation).

Par exemple, si des élèves s'appuient sur quelques exemples pour prouver la validité d'une conjecture, et si à l'issue du débat la classe est d'accord sur le fait que la conjecture débattue est fausse à cause d'un contre-exemple, l'enseignant relève le fait que quelques exemples ne permettent pas de prouver la validité générale d'un énoncé.

Voici un autre exemple : si au cours d'un débat la discussion s'enlise parce que les élèves ne sont pas d'accord sur certaines définitions ou propriétés, le professeur en profite pour leur montrer qu'à ce point de la discussion il est nécessaire que la classe se mette d'accord sur le sens des termes qu'elle utilise, sur les propriétés sur lesquelles elle s'appuie. C'est l'occasion de préciser la règle suivante : "Dans le cadre d'un débat mathématique il est nécessaire de se mettre d'accord sur les propriétés et les définitions que l'on utilise". Le professeur fait écrire ces règles dans le cahier des élèves.

3 Conclusion

Cette organisation de classe n'est pas simple à mettre en place dans la mesure où, souvent, ni le professeur ni les élèves ne sont habitués à ce genre de travail. Le premier débat ainsi organisé dans la classe est souvent jugé décevant par l'enseignant (alors que les élèves sont enthousiasmés). Celui-ci en effet a été plus sensible au bruit qu'il y a eu dans sa classe qu'aux preuves produites.... Il faut bien comprendre que ce type d'activité est source

de davantage de bruit que le cours traditionnel. Mais le bruit produit n'est pas celui occasionné par le chahut mais c'est celui qu'il y a dans toute assemblée lors d'un débat où chacun a à cœur de défendre sa position. Notons aussi qu'avec un peu d'expérience, les élèves apprennent à s'auto-discipliner, à s'écouter, à prendre en compte l'avis des autres... Voici à ce propos la réaction d'un groupe d'élèves de 5ème qui, à l'issue d'un débat de validation, a conclu : "On a compris que pour convaincre les autres il faut d'abord bien les écouter."

Certains débats peuvent tourner court, soit parce que les élèves sont rapidement d'accord, soit parce qu'ils n'arrivent pas à produire de preuves. Il est donc nécessaire, avant de proposer à la classe une situation de validation, d'essayer de prévoir ce qui va se passer, ce travail n'est pas toujours facile. C'est ce que nous appelons *l'analyse a priori de la situation*.

Voici quelques questions que nous nous posons au cours de cette analyse :

- ⇒ Quels objectifs visons-nous en proposant cette situation à nos élèves ?
- ⇒ Les élèves peuvent-ils facilement s'engager dans la résolution du problème? Peuvent-ils faire des essais ? Peuvent-ils conjecturer ? Quelles conjectures vont-ils mettre en place ? Y a-t-il une incertitude par rapport aux conjectures produites ? Les élèves ne risquent-ils pas de produire tous la même conjecture ?...
- ⇒ Quel(s) enjeu(x) va pousser les élèves à valider leurs conjecture?
- ⇒ Les élèves ont-ils les moyens de prouver leurs conjectures ? Quels sont les types de preuves qu'ils vont produire ? Les élèves ne risquent-ils pas de produire tous la même conjecture ? Vont-ils pouvoir prendre conscience de l'insuffisance des preuves pragmatiques qu'ils vont produire ?...
- ⇒ Quelles règles du débat vont pouvoir être institutionnalisées ?

Dans nos classes nous utilisons trois ou quatre activités de ce type en 5ème (élèves de 12 ans). Cela nous semble suffisant, car du fait de leur gestion inhabituelle, ces activités deviennent pour les élèves des **situations** de référence. Ainsi, par exemple, en 4ème nous avons constaté que, lorsque des élèves sont tentés d'utiliser le dessin pour prouver une conjecture en géométrie, leurs camarades leur rappellent des activités de 5ème qui ont été utilisées pour mettre en évidence l'insuffisance de la figure pour prouver : "Rappelle-toi le problème du triangle aplati !" (cf. chapitre 3, p. 65).

Chapitre 3

Les situations expérimentées

Cinq situations de classe
pour un apprentissage des règles
du débat mathématique.

Comptes rendus d'expérience

Nombres et démonstrations

1. Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver : $n^2 - n + 11$.
2. Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver : le carré d'un nombre pair.

Figures et démonstrations

3. Un dessin suffit-il à prouver ?
4. Comment remettre en cause les mesures sur un dessin ?
5. Comment aider les élèves à remettre en cause la valeur de preuve d'un instrument de mesure : le rapporteur.

Nombres et Démonstrations

Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver.

1

Dans l'expression $n \times n - n + 11$,
si on remplace n par n'importe quel entier naturel,
obtient-on toujours un nombre
qui a exactement deux diviseurs ?

Ce problème a été expérimenté deux années successives : une première année dans une seule classe de 5ème, et la seconde année dans toutes les classes de cinquième d'un même collège.

Nous avons utilisé quatre séances d'une heure :

- une séance préliminaire sur la recherche de diviseurs,
- une séance de recherche du problème en groupe,
- un débat collectif entre élèves sur les solutions trouvées,
- un retour individuel.

Dans certaines classes, la dernière séance n'a pas eu lieu.

OBJECTIFS SPÉCIFIQUES QUE NOUS VISIONS À TRAVERS CETTE ACTIVITÉ

En plus des objectifs généraux visés à travers toutes les activités décrites dans ce document, nous visions avec ce problème les objectifs spécifiques suivants :

- Institutionnalisation de la règle : "un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé mathématique est faux."
- Institutionnalisation de la règle : "Des exemples même nombreux ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé mathématique est vrai."

LE CHOIX DE L'ÉNONCÉ

Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?"¹

Rappelons que pour $n = 0, 1, \dots, 10$ le nombre $n \times n - n + 11$ est premier, alors que pour $n = 11$, il est égal à 11^2 et n'est donc pas premier.

Il nous a semblé d'autre part que la règle du contre-exemple est plus facile à appréhender en arithmétique qu'en géométrie.

Mais la recherche de ce problème peut être freinée par des difficultés que les élèves sont susceptibles de rencontrer au cours de la recherche systématique des diviseurs d'un nombre ; en effet, cette technique n'est plus explicitement au programme de cinquième.

Ainsi, nous avons d'abord proposé aux élèves l'activité décrite ci-dessous dont l'objectif est non seulement de les entraîner à la recherche systématique des diviseurs d'un nombre, mais aussi d'attirer leur attention sur le fait que certains nombres ne possèdent que deux diviseurs.

¹ Nous n'avons pas utilisé l'expression "nombre premier" qui ne figure plus au programme des classes de collège.

Séance préliminaire sur la recherche de diviseurs

Cette séance peut se dérouler de la manière suivante :

- ***Bilan des connaissances***

L'enseignant vérifie que les élèves savent ce que sont les diviseurs d'un nombre et qu'ils savent les trouver.

Pour faire cette vérification, le professeur demande, par exemple, de citer des diviseurs de 75, et de justifier les réponses.

Des phrases telles que les suivantes semblent acceptables :

"5 est diviseur de 75 car $5 \times 15 = 75$ "

"5 est diviseur de 75 car $75 : 5 = 15$ "

"Les divisions se terminent, sans continuer après la virgule".

- ***Recherche systématique des diviseurs d'un nombre***

Le professeur distribue à chaque élève une feuille sur laquelle sont notés dix nombres : il doit chercher leurs diviseurs et ensuite les compter.

Les élèves se mettent en groupe et comparent leurs résultats. Ils se mettent d'accord sur une solution et la copient sur une affiche.

La totalité des résultats affichés est discutée. Le professeur est à l'écoute des commentaires des élèves :

"Certains nombres ont beaucoup de diviseurs"

"D'autres n'en ont que deux"

"Tous ont 1 comme diviseur"

"Chaque nombre est diviseur de lui-même"

"1 est particulier".

Le professeur peut dire aux élèves qu'un nombre qui n'a que deux diviseurs s'appelle un nombre premier (ce n'est pas indispensable).

Il est intéressant de mettre en évidence une méthode systématique pour trouver rapidement tous les diviseurs d'un nombre (par exemple s'arrêter

à $\frac{n}{2}$).

LE SCÉNARIO

Nous détaillons ci-dessous les trois premiers temps du scénario que nous avons choisi et décrit précédemment. Nous analysons ensuite dans le paragraphe suivant quelles hypothèses on peut faire sur le comportement des élèves vu l'énoncé et le scénario choisis.

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Pendant 5 minutes environ, les élèves sont invités à rechercher le problème dont ils ont reçu chacun un énoncé. Le professeur passe dans les groupes et fait reformuler s'il y a lieu, l'énoncé. Si beaucoup d'élèves ont des difficultés avec l'énoncé, une reformulation sera faite pour toute la classe.

Nous pensons que chaque élève va faire des essais avec certains nombres. Si ce n'est pas le cas, c'est pour nous un indice de non compréhension du problème.

Le passage à la recherche en groupe se fait au moment où tous les élèves ont fait au moins un essai.

TRAVAIL EN GROUPE ET RÉDACTION DES AFFICHES

Le professeur annonce la fin du travail individuel et le passage au travail en groupe dont le but, rappelle-t-il, est de se mettre d'accord sur la rédaction d'une affiche.

Nous pensons que les élèves vont comparer leurs résultats. L'intérêt de ce travail provient du fait que certains groupes peuvent organiser leurs calculs, multiplier le nombre d'exemples, essayer de trouver un raisonnement.

Nous faisons l'hypothèse que, majoritairement, les élèves vont répondre "oui" (le résultat est un nombre qui n'a que deux diviseurs), mais que

quelques-uns vont trouver un contre-exemple : c'est là le critère de choix du problème.

DÉBAT

Le professeur choisit une première affiche. Il la présente à la classe.

- *Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser des questions liées à la compréhension du texte (en classe entière).*
- *Il invite chaque groupe, à donner son avis, par l'intermédiaire du porte-parole du groupe, sous forme d'une phrase commençant par :*
 - *Nous sommes d'accord car ...*
 - ou* • *Nous ne sommes pas d'accord car ...*
- *Il note au tableau les arguments de chaque groupe, en regroupant les "pour" et les "contre".*
- *Le débat s'instaure au niveau de la classe sur la validité des arguments produits.*

Au moment opportun (c'est un choix décisif), le professeur arrête le débat et propose une deuxième affiche.

Suivant les réponses fournies par les groupes, trois cas peuvent se produire :

- 1- Tous les groupes répondent "oui" à la question " $n \times n - n + 11$ a-t-il exactement deux diviseurs ?"
- 2- Certains répondent "oui", d'autres "non".
- 3- Tous répondent "non". Nous considérons ce cas comme fort peu probable, donc nous ne l'envisageons pas.

Tout l'intérêt du problème est l'apparition du deuxième cas.

Si le premier cas apparaissait souvent, ceci voudrait dire que le problème est mal choisi.

1- Premier cas : tous les groupes ont répondu "oui"

Le professeur choisira un ordre de passage pour les affiches :

- en premier celles où les élèves se seront appuyés sur un seul exemple et auront affirmé qu'on obtient toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs. A priori, nous ne nous attendons pas à voir apparaître ce comportement ;
- ensuite celles où il y aura quelques exemples pour appuyer l'affirmation précédente ;
- enfin celles où il y aura à la fois des exemples et un texte montrant le souci des élèves de généraliser.

Lorsque toutes les affiches auront été discutées (ou que tous les cas auront été envisagés), il sera demandé aux élèves de se prononcer sur l'explication qui leur semble la plus convaincante. Les élèves auront deux minutes de réflexion et ils s'exprimeront à bulletin secret sur la question suivante :

"Quelle explication (numéro de l'affiche) vous semble la plus convaincante et pourquoi ?"

L'objectif de cette activité est d'obliger chaque élève à prendre position par rapport aux affiches. Elle peut aussi donner des renseignements au professeur sur ses élèves.

Afin de ne pas laisser les élèves sur un résultat faux, et s'il reste du temps (ou sinon lors du cours suivant), une "fausse" affiche sera présentée à la classe. Le professeur peut expliquer que cette affiche a été produite par les élèves d'une autre classe. Voici un texte possible :

"Non, $n \times n - n + 11$ n'a pas toujours exactement deux diviseurs, car on a essayé 11 et ça ne marche pas".

Cette affiche sera débattue comme les précédentes.

A l'issue de ce débat, le professeur, en plus des règles citées, pourra institutionnaliser la règle suivante :

"En mathématiques, on ne peut pas décider de la validité d'un énoncé en s'appuyant sur le fait que la majorité des personnes présentes sont persuadées que cet énoncé est vrai".

2- Deuxième cas : certains groupes ont répondu "oui", d'autres "non"

Le professeur choisira en premier les affiches avec la réponse "oui".

Nous pensons que, dès la première affiche exposée, l'argument : "Nous ne sommes pas d'accord avec la phrase, car nous avons essayé 11 et ça ne marche pas", sera présenté par des élèves.

Lors du débat, il est souhaitable de ne pas commencer par cet argument, afin qu'il n'apparaisse pas privilégié par l'enseignant.

Au moment où il sera discuté, nous laisserons un moment de réflexion aux élèves, afin qu'ils aient le temps de faire le calcul avec 11 et de s'approprier cet argument.

Il se peut qu'à cette occasion, des élèves affirment que cet énoncé est tantôt "vrai" tantôt "faux", alors que d'autres élèves tiennent ferme sur le contre-exemple. Comme il s'agit de la première affiche, le professeur ne tranchera pas.

Le professeur pourra, éventuellement faire remarquer que certains groupes ont essayé plusieurs nombres, alors qu'ici seul le nombre 11 est proposé. "Alors qu'en pensez-vous ?"

Les autres affiches sont débattues : le même type de travail sera proposé. Ceci permettra de voir si les élèves réinvestissent le contre-exemple 11.

DÉROULEMENT EFFECTIF ET ANALYSE

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Les élèves font majoritairement des essais non systématiques. Dans de nombreux cas, le fait de faire un, deux ou trois essais suffit pour emporter leur conviction.

Malgré l'utilisation de calculatrices, des erreurs de calcul sont faites. Cependant les élèves remplacent bien "n" par un nombre, preuve que l'énoncé est compris.

Par contre, dans des classes faibles, certains élèves ont des difficultés à comprendre l'énoncé :

- le nombre d'informations contenu dans la phrase est très important, ils ont du mal à les utiliser simultanément ;
- le mot "exactement" est mal interprété : est-ce seulement deux diviseurs ? ou au moins deux diviseurs ?
- la question : "doit-on mettre le même nombre à la place de "n", pour un calcul ?", est posée de temps en temps.

Dans ces cas de non compréhension de l'énoncé, le professeur intervient "en mettant les élèves sur la voie" : de fait il incite souvent les élèves à prendre des exemples.

RECHERCHE EN GROUPE

En général, tous les cas possibles se présentent dans les groupes :

- ceux qui trouvent des exemples et qui en restent là :
"on marque les calculs comme preuve".
- ceux qui ont trouvé plusieurs nombres et qui de plus cherchent une explication :
"Il faut trouver une explication, on ne va pas mettre sur l'affiche : parce que j'ai fait un exemple, j'ai trouvé un nombre premier !"
*"On a fait **plusieurs** exemples"*
*"On n'a pas pris **tous** les nombres"*
*"Mais on ne va pas les convaincre avec des exemples, ça ne marche pas des exemples, il faut **trouver une règle**"*
- ceux qui trouvent des exemples et qui pensent que "ça vient de 11". Le nombre 11 apparaît comme un nombre exceptionnel (appel à l'histoire de la classe où, aux dires du professeur, 11 et 1 sont des nombres exceptionnels).
"Tous les autres, ça va".
- ceux qui changent 11 en 12 afin de vérifier que "11" est la cause du phénomène.
"Que se passe-t-il si on remplace le "11" par un autre nombre ?"
Le fait de marquer sur le tableau (dans les consignes) : "donner une explication" entraîne un essai de justification.
- ceux qui trouvent un contre-exemple :
"Ca ne marche pas, car pour $n = 11$, on n'obtient pas un nombre premier : on obtient 121 qui se divise par 11".

Textes d'affiches élaborées dans une classe

Voici des exemples d'affiches écrites dans une même classe :

➤ Affiche contenant deux exemples et un essai d'explication du résultat impair (il y a confusion entre impair et premier) :

A **OUT**

Le résultat n'a toujours que 2 diviseurs car c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est $N \times N - N$) est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que $N \times N - N$ égale N multiplié par son premier nombre inférieur :

example :

$$5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31 \quad 5 \times 4$$

$$8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67 \quad 8 \times 7$$

➤ Affiches contenant deux exemples et une remarque sur le fait que le résultat est premier car 11 est premier (d'où l'idée de changer 11 en 12) ;

B

Exemples $17 \times 17 - 17 + 11 = 303$

$$10 \times 10 - 10 + 11 = 79$$

Réponse : on obtient toujours un résultat qui n'a que deux diviseurs (lui-même et 1).

Remarque : 11 est un nombre premier. Avec 11, le résultat est un nombre premier. Si on change 11 avec un nombre pair comme 12, le résultat sera un nombre pair (le résultat aura plusieurs diviseurs).

1) ex : $17 \times 17 - 17 + 12 = 288$
 nombres pairs

2) ex : $10 \times 10 - 10 + 12 = 88$
 nombres pairs

C

On trouvera toujours un nombre qui a deux diviseurs car 11 est un nombre premier et donnera toujours comme résultat un nombre se divisant seulement par lui-même et par 1.

exemple :

* avec 11 : $15 \times 15 - 15 + 11 = 221$

nombre premier

* avec 12 : $15 \times 15 - 15 + 12 = 222$

nombre qui n'est pas premier

Nombres : 1 ; 222 ; 2 ; 3 ; 6 ; 37 : ...

➤ Affiche pour laquelle le groupe s'appuie sur des exemples pour prouver que le résultat est premier, et à la fin de la rédaction s'aperçoit que 11 ne convient pas (le début ne sera pas pour autant changé) :

D

Oui car un entier a au moins deux diviseurs (lui-même et 1). 1 est le seul nombre qui a un seul diviseur (1),

Là, ils auront seulement 2 diviseurs car il faut additionner 11 au nombre choisi pour remplacer n et cela donnera un nombre premier, sauf pour 11.

Ex : $5 \times 5 - 5 + 11 = 31$ ici $5 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 31

Ex : $1 \times 1 - 1 + 11 = 11$ ici $1 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 11

Ex : $3 \times 3 - 3 + 11 = 17$ ici $3 = n$
il aura comme diviseurs 1 et 17

Avec 11, le nombre final ne sera pas un nombre premier.

Ex : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ ici $11 = n$
il aura comme diviseurs 1 ; 121 ; 11.

➤ Affiche pour laquelle
le groupe a trouvé un
contre-exemple :

E

On n'obtient pas toujours un nombre premier.

Exemple : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ qui est
divisible par plus de deux nombres : 11 ;
121; 1.

ARGUMENTS AVANCÉS PAR LES ÉLÈVES

Ces arguments sont écrits par le professeur au tableau.

POUR L'AFFICHE A

A : OUI

Le résultat n'a toujours que 2 diviseurs car c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est $N \times N - N$) est égal à un nombre pair donc celui-ci $+ 11 =$ un nombre premier (impair).

1er résultat = un nombre pair parce que $N \times N - N$ égale N multiplié par son premier nombre inférieur :

exemple :

$$5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31$$

$$8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67$$

$$5 \times 4$$

$$8 \times 7$$

Non nous ne sommes pas convaincus :

- car si on remplace n par 11, 121 a trois diviseurs ;
- car il n'y a que deux exemples, rien ne prouve qu'avec d'autres nombres, cette théorie marche ;
- car le premier paragraphe est mal rédigé, mais l'idée est bonne ;
- car l'explication n'est pas claire.

POUR L'AFFICHE B**B**

Ex : $17 \times 17 - 17 + 11 = 303$
 $10 \times 10 - 10 + 11 = 79$

Réponse : on obtient toujours un résultat qui n'a que deux diviseurs (lui-même et 1).

Remarque : 11 est un nombre premier. Avec 11, le résultat est un nombre premier. Si on change 11 avec un nombre pair comme 12, le résultat sera un nombre pair (le résultat aura plusieurs diviseurs).

1) ex : $17 \times 17 - 17 + 12 = 288$

nombre pairs

2) ex : $10 \times 10 - 10 + 12 = 88$

nombre pairs

Oui nous sommes convaincus,

- car le raisonnement est bon,
- car nous avons trouvé la même chose.

Non nous ne sommes pas convaincus,

- car la dernière opération est fausse,
- car on ne comprend pas le changement de 11 en 12,
- car 303 se divise par 3,
- car entre 284 et 303, il devrait y avoir 1 d'écart,
- car les opérations sont fausses,
- car on ne demande pas de changer 11 en 12.

POUR L'AFFICHE C**C**

: même genre d'affiche que B

On trouvera toujours un nombre qui a deux diviseurs car 11 est un nombre premier et donnera toujours comme résultat un nombre se divisant seulement par lui-même et par 1. exemple :

* avec 11 : $15 \times 15 - 15 + 11 = 221$ nombre premier

* avec 12 : $15 \times 15 - 15 + 12 = 222$ nombre qui n'est pas premier

Nombres : 1 ; 222 ; 2 ; 3 ; 6 ; 37 : ...

Oui nous sommes convaincus,

- car les opérations sont bonnes,
- car c'est le même raisonnement que nous.

Non nous ne sommes pas convaincus,

- car on ne demande pas de changer 11 en 12,
- car on ne trouve pas toujours un nombre premier, (peu de chose à reprocher car on a mis la même chose),
- car si $n = 11$, le résultat aura plusieurs diviseurs, (mais la rédaction est bonne),
- car le "toujours" est faux,
- car on ne demande pas de mettre 12 à la place de 11.

POUR L'AFFICHE D**D**

Oui car un entier a au moins deux diviseurs (lui-même et 1). 1 est le seul nombre qui a un seul diviseur (1).

Là, ils auront seulement 2 diviseurs car il faut additionner 11 au nombre choisi pour remplacer n et cela donnera un nombre premier, sauf pour 11.

Ex : $5 \times 5 - 5 + 11 = 31$ ici $5 = n$ il aura comme diviseurs 1 et 31

Ex : $1 \times 1 - 1 + 11 = 11$ ici $1 = n$ il aura comme diviseurs 1 et 11

Ex : $3 \times 3 - 3 + 11 = 17$ ici $3 = n$ il aura comme diviseurs 1 et 17

Avec 11, le nombre final ne sera pas un nombre premier.

Ex : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ ici $11 = n$
il aura comme diviseurs 1 ; 121 ; 11.

Non nous ne sommes pas convaincus,

- car c'est incompréhensible : le groupe est d'abord d'accord, puis change d'avis,
- car c'est mal rédigé,
- car dans l'énoncé, il n'est pas demandé d'exception,
- car c'est mal expliqué,
- car il y a plusieurs exceptions et ils n'en marquent qu'une,
- car il ne fallait pas mettre "oui", alors qu'il y a un contre-exemple 11,
- car ils disent "oui" et après ils donnent un contre-exemple.

POUR L’AFFICHE E**E**

On n’obtient pas toujours un nombre premier.

Exemple : $11 \times 11 - 11 + 11 = 121$ qui est divisible par plus de deux nombres : 11 ; 121 ; 1.

Non nous ne sommes pas convaincus,

- car la rédaction est trop courte (malgré la bonne réponse),
- car il manque des exemples.

Oui nous sommes convaincus,

- mais il manque des nombres pour lesquels ça ne marche pas,
- car ils ont bien répondu et ils ont mis la preuve,
- car ils ont trouvé une exception.

**UN EXEMPLE DE DÉBAT
SUR LES ARGUMENTS RELATIFS À UNE AFFICHE**

LE RÔLE DES EXEMPLES

Ces extraits de débat correspondent à la discussion des arguments à propos de l’affiche A citée ci-dessus.

Le professeur donne tout d’abord la parole à chaque porte-parole :

Prof. *Bon alors ... chut ... vous vous taisez ... donc je vais donner la parole à chacun des porte-parole des groupes pour me dire, je l’ai marqué au tableau, s’ils sont convaincus ou pas. Alors, peu importe. Oui, Géraldine ?*

Géraldine *Nous ne sommes pas convaincus car si on remplace ...*

- Prof. *Chut ... non alors, on essaie d'écouter.*
- Géraldine *Nous ne sommes pas convaincus car si on remplace n par 11, cela donnera $11 \times 11 - 11 + 11$ qui est égal à 121 et qui a trois diviseurs : 11 ; 121 et 1.*
- Prof. *Oui (le prof note ce qui est dit au tableau). Ensuite ? Paul ?*
- Paul *Nous ne sommes pas convaincus, car il n'y a que deux exemples. Rien ne prouve qu'avec les autres nombres cette théorie marche. (le prof. écrit)*
- ...
- Prof. *Oui, là, qui est le porte-parole ? J'aimerais bien, quand il y en a un qui parle, on apprenne à écouter les autres, c'est plus agréable.*
- Cédric *Nous ne sommes pas convaincus, car la première affiche est mal exprimée, le premier paragraphe ...*
- ...
- Prof. *Donc l'explication n'est pas claire. (le prof. note au tableau).*

Le professeur, après avoir entendu chaque porte-parole et noté les arguments, donne la parole aux élèves du groupe qui a rédigé l'affiche (Marie est une élève de ce groupe) :

- Prof. *Bon, ensuite, on va donner, on va donner la parole au groupe qui a écrit cette affiche. Alors qu'est-ce que vous avez à ajouter à tout ça ? Est-ce que vous avez des réponses à donner ou quelque chose à dire ?*

Le groupe auteur se défend.

- Marie *Bon, pour ce qu'a dit l'autre là ...*
- Prof. *Paul*
- Marie *Paul et bien, il faut qu'il nous prouve qu'il y a d'autres ... non quand Géraldine ...*
- Prof. *Chut ...*
- Marie *... a dit pour 11, il faut qu'il en donne d'autres.*
- Prof. *Oui.*
- Marie *Il faut qu'il en trouve d'autres, à part celui-ci.*
- Paul *Un ça suffit*

...

- Marie *Il faut qu'il trouve d'autres exemples pour ce qu'il a dit, parce qu'on n'est pas obligé de mettre une tonne d'exemples, deux c'est suffisant pour ... expliquer.*
- Prof. *Bon alors deux c'est suffisant pour ...*
- Marie *expliquer.*
- Géraldine *Moi aussi, je suis d'accord avec ce groupe. Il ne faut pas mettre non plus trop d'exemples ... d'explications.*
- Paul *Deux exemples, c'est pas très convaincant quand même deux exemples !*

Ici les élèves ne sont pas d'accord sur le nombre d'exemples nécessaires pour invalider une propriété. Mais les derniers échanges mettent en évidence que les élèves n'attribuent pas la même fonction aux exemples : pour Marie, les exemples servent à **expliquer** tandis que pour Paul, c'est pour **convaincre**.

Le débat continue.

- Prof. *C'est ça qui ne te convainc pas : donc les deux exemples.*
- Paul *Oui, il peut y avoir des nombres avec lesquels ça ne marche pas.*
- Prof. *Alexandra ?*
- Alexandra *$11 \times 11 - 11 = 110$ et $11 \times 10 = 110$*
- Géraldine *$11 \times 11 - 11 + 11$ ça revient à 11×11 , alors c'est pour ça qu'il y aura trois diviseurs.*
- Stéphanie *Oui, mais il y a peut-être que cette exception. Il faut qu'il nous en trouve d'autres alors.*
- Prof. *Alors donc là Stéphanie ...*
- Marie *On n'a pas pensé à 11 mais ... s'il y en a d'autres, on serait d'accord avec ce qu'il dit, mais ...*
- Prof. *Et s'il n'y en a pas d'autres ça ... ça ne vaut pas le coup.*
- Sélim *Une exception !*
- Prof. *Une exception.*
- Cécile *Ben ça peut tout changer. Si on dit oui ... si on dit non, si on dit oui et qu'il y a une exception, ça veut dire que c'est non sinon ...*

...

Les élèves ne sont donc pas d'accord sur le nombre d'exceptions nécessaire pour invalider un énoncé mathématique.

Géraldine *C'est vrai, il n'y a que 11 comme exception. Mais c'est pas entièrement juste, mais pas entièrement faux non plus.*

Prof. *Alors, c'est pas entièrement juste, et pas entièrement faux.*

Ainsi pour Géraldine, un énoncé mathématique peut être à la fois vrai et faux.

Élève *Dans l'énoncé, c'est marqué toujours. On peut pas dire que c'est toujours.*

Géraldine *S'il y a une exception.*

Élève *Y a une exception, donc c'est pas toujours !*

Marie *Çà a été reconnu. A part çà, c'est toujours un nombre premier. Si on éliminait 11 ben ... (rires de la classe)*

Prof. *On élimine l'exception!*

Élève *Oui*

Cécile *La question était : "est-il un nombre qui a toujours exactement deux diviseurs ?". On répond à la question : il y a une exception. Y a ... donc c'est pas juste.*

Élève *C'est pas toujours juste.*

Prof. *Alors est-ce que c'est faux, est-ce que c'est pas toujours faux ? Est-ce que c'est ... parfois faux, parfois vrai ?*

Élève *C'est faux.*

Prof. *Toi tu penses que c'est faux.*

Élève *C'est marqué toujours, donc on répond non, c'est pas toujours.*

Prof. *Géraldine*

Géraldine *Çà peut être autant oui que non, je pense, parce que tous les autres nombres, c'est oui, alors pourquoi ...*

Sébastien *Oui, y a quand même une exception de toutes manières, hein,*

Prof. *Sébastien ?*

Sébastien *Puisqu'il y a une exception, de toutes manières !*

Prof. *Attends, qu'est-ce que tu penserais ?*

Sébastien *Je dirais plutôt que c'est faux, puisque ... S'ils mettent que le résultat n'a toujours que deux diviseurs, c'est faux, puisqu'ils ont dit qu'il y avait des exceptions, c'est pas toujours.*

Prof. *Tu as une autre exception ?*

Élève *J'ai pris avec 22.*

Prof. *Avec ... avec 22.*

Élève *C'est un multiple.*

...

Cécile *Peut-être que maintenant qu'ils ont entendu une phrase, peut-être qu'ils sont d'accord de dire : faux. Parce qu'une exception peut faire tout basculer.*

Prof. *Oui.*

Marie *Oui, mais 22, c'est le double de 11, on peut peut-être essayer 33, à mon avis ce sera aussi une exception.*

...

Marie n'est donc toujours pas convaincue que sa production est fausse. Mais quelques instants après un élève estime que 25 est aussi une exception.

Marie *Je crois qu'ils ont gagné, parce qu'il y a aussi 25 comme exception.*

Prof. *Comment ?*

Maris *Il y a 25.*

Prof. *Il y a 25 exceptions. Attends, je n'ai pas compris. Pourquoi tu dis qu'ils ont gagné ?*

Sélim *Ils ont gagné.*

Prof. *Parce que quand il y avait une exception, tu n'étais pas convaincue. C'est ça ? Et à partir de combien tu es convaincue ?*

Marie *A partir de trois ou quatre.*

Prof. *Trois ou quatre. (rires de la classe)*

Géraldine *Nous, on devrait être convaincus par deux et elle devrait être convaincue par quatre ?*

Élève *Quel rapport ? Qu'est-ce qu'elle raconte, elle ? (rires)*

Prof. *Toi, tu as été convaincue à partir du moment où il y a eu deux exceptions ?*

- Géraldine *Non ... oui deux.*
- Marie *Ça devient plus des exceptions, parce que 22, 33 c'est tous des multiples.*
- Prof. *Oui, tu considères que ça ... ça n'en fait qu'une. Ce n'est qu'un nombre. A partir du moment où on a trouvé un autre nombre, qui n'était pas un multiple de 11 .*
- Élève 25
- Prof. *Donc tu penses maintenant, donc, ce n'est pas toujours vrai.*
- Sébastien *De toutes manières, à partir du principe où il y a qu'une seule exception, c'est non, carrément !*
- Prof. *Donc à partir du moment où il n'y a qu'une exception, c'est non.*
- Sébastien *Ça en fait une, ça fait qu'une mais ...*
- Prof. *Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?*
- Élève *Oui.*
- Géraldine *Non, je ne suis pas d'accord.*
- Sébastien *Géraldine, elle n'est jamais d'accord. (rires)*
- Géraldine *Une seule exception, s'il n'y a que ça, c'est vrai que c'est ... c'est pas entièrement faux ni entièrement vrai.*
- Élèves *Bien si (brouhaha). Y a une exception, y a une exception ! Même s'il y en a qu'une, hein.*
- Prof. *Ce qu'on pourrait peut-être poser comme question là, je crois que c'est ce qui intervient ici. Est-ce que vous pensez qu'une propriété ou une phrase peut être à la fois vraie et à la fois fausse en mathématiques ?*
- Élève *Non.*
- Marie *A mon avis, pour qu'il n'y ait pas d'exception, le résultat ne devait pas être supérieur à 100.*
- Prof. *Bon, tu ne réponds pas à ce que j'ai demandé. J'ai demandé donc, si une propriété en mathématiques, une phrase en mathématiques peuvent être à la fois vraies ou à la fois fausses. Parce que c'est ça, en fait, qui est discuté. Géraldine a l'air de dire, ma foi, que de temps en temps c'est vrai, c'est faux.*
- Élève *Oui parce qu'il suffit d'une exception pour ... tout changer.*
- Prof. *Alexandre, tu veux dire quelque chose ?*
- Alexandre *C'est ou vrai ou faux, ça peut pas être les deux à la fois.*
- Élèves *Ouais.*
- Sébastien *En maths, c'est comme ça ! (rires)*

Prof. *Donc tout le monde est d'accord avec ça. En mathématiques, Sébastien a dit en mathématiques, c'est soit vrai, soit faux, ça ne peut pas être les deux en même temps. Est-ce que tout le monde est d'accord avec ça ?*

Élève *Oui.*

A noter tout au long de ce débat le rôle du professeur : il reste neutre, relance éventuellement le débat en reformulant des réactions d'élèves. Puis à la suite de ce débat, le prof institutionnalise le principe du tiers exclu.

Prof. *Alors effectivement c'est une règle, comme a dit Sébastien, je trouve qu'il l'a bien dit. En mathématiques, pour que tout le monde soit d'accord, on s'est mis d'accord, les propriétés ne sont jamais à la fois vraies, à la fois fausses. Elles sont soit vraies, soit fausses. On en peut pas avoir à la fois vrai et à la fois faux. Alors, ce qui nous reste à discuter, peut-être c'est ... bon, est-ce qu'un seul exemple, comme par exemple on avait trouvé 11 est-ce qu'un seul exemple permet de décider ?*

À la suite de ce débat, au cours d'une troisième séance, le professeur propose à ces élèves un travail individuel en trois temps :

- Il demande à chaque élève de préciser par écrit l'affiche qui lui paraît la plus convaincante.
- Il demande à chacun de rédiger une solution au problème.
- Il leur demande enfin d'avoir un regard critique sur la production de leur groupe en précisant pourquoi l'explication produite par leur groupe était juste ou fausse.

L'objectif de ce travail est d'évaluer la manière dont les élèves se sont appropriés les règles mises en évidence au cours du débat.

Voici une synthèse des réponses des élèves à ces différentes questions.

◇ L'affiche la plus convaincante

Un travail individuel écrit est demandé aux élèves. Ainsi, chacun peut se situer par rapport au travail précédent :

"Quelle est pour toi, maintenant, l'affiche la plus convaincante ? Pourquoi ?"

Les 21 élèves sont convaincus par l'affiche E.

Voici pour quelles raisons :

- bien rédigée : 5
- courte : 6
- claire : 9
- c'est juste : 9
- il y a un contre-exemple suffisant : 13
- c'est la seule qui prouve qu'on n'obtient pas toujours un nombre premier et ils l'ont prouvé par une opération : 2
- ils notent dès le début que la réponse est "non" : 1

Il y a cependant quelques réserves :

- mais il aurait fallu des exemples avec lesquels cela donne un nombre premier : 1
- mais il manque d'exemples : 1
- la rédaction est peut-être un peu courte : 4.

✧ Rédaction personnelle d'une nouvelle affiche

Un travail personnel est ensuite demandé aux élèves pour voir comment chacun a évolué au cours du travail de groupe et du débat et où il en est actuellement :

"Quelle solution donnerais-tu à présent au problème ? Rédige ta réponse."

11 élèves ont répondu NON en mettant le seul contre-exemple "11".

1 élève a répondu NON en mettant le seul contre-exemple "25".

7 élèves ont répondu NON en mettant plusieurs contre-exemples : "11, 22, 33, 44, 25".

2 élèves ont répondu NON, mais ils ont mis un exemple où le résultat était premier, et le contre-exemple 11.

✧ Retour sur les preuves

Un dernier travail individuel est proposé aux élèves afin de savoir s'ils arrivent à mettre le doigt sur leurs erreurs :

"L'explication que ton groupe a donné, était fausse (ou juste), essaie d'expliquer pourquoi?"

Voici les réponses des élèves des cinq groupes A, B, C, D et E :

A) Fausse car :

- nous n'avons pas pensé qu'il puisse y avoir des contre-exemples ;
- nous n'avions trouvé que des nombres avec lesquels cela donnait des nombres premiers ;
- nous avons mis que le résultat était toujours un nombre premier, ce qui n'est pas vrai (2 élèves).

B) Fausse car :

- nous avons répondu "oui" (3 élèves);
- il y avait aussi des exceptions (3);
- les opérations étaient fausses (2);
- nous avons cherché avec 12 aussi (c'était une bonne idée) (2).

C) Fausse car :

- on a pris 15 et 15 n'est pas une exception (1 élève);
- nous avons mis que c'était toujours un nombre premier, et il y a un contre-exemple (2 élèves);
- nous n'avons pas pensé à 11 dans nos exemples (1 élève);
- nous avons remplacé 11 par 12 pour prouver que cet exemple ne marchait qu'avec 11 et nous nous sommes trompés (1 élève).

D) Fausse car :

- nous avons mis "oui" alors que nous avons mis une exception (2 élèves).

Un élève pense que le "oui" du début est faux, mais le reste (opérations, exceptions, ...) est juste.

Un élève pense que l'explication de son groupe n'est ni fausse, ni juste : fausse car il aurait fallu répondre "non" au début, mais juste car ils ont mis le contre-exemple.

E) Juste car :

- le contre-exemple prouve que la propriété est fausse ;
- nous avons donné de bons résultats suffisant à une bonne réponse ;
- nous avons prouvé qu'il n'y avait pas toujours exactement 2 diviseurs ;

- nous avons trouvé un contre-exemple et il suffit d'un contre-exemple pour tout changer ;
- nous avons dit qu'on n'obtenait pas toujours un nombre premier en donnant un contre-exemple.

CONCLUSION

Défauts de ce problème

- ★ Les nombres premiers ne figurent plus explicitement dans le programme de la classe de 5ème.
- ★ Les confusions constatées entre " n " premier et " $n \times n - n + 11$ " premier sont gênantes car il est alors difficile de savoir quel problème cherchent les élèves.
- ★ Les arguments avancés dans les débats sont plutôt pauvres dans le domaine mathématique.
- ★ La confusion des deux termes "impair" et "premier" est souvent constatée.

Intérêt de ce problème

- ✪ Il semble plus facile de débiter l'initiation au raisonnement déductif à partir d'un problème d'arithmétique ; les élèves peuvent faire des essais à partir de calculs simples, si bien que très vite tous cherchent quelque chose
- ✪ La notion de contre-exemple pour réfuter une affirmation semble bien acceptée par la majorité des élèves. Bien sûr, il faudra vérifier s'ils la réinvestissent dans d'autres situations.
- ✪ C'est avec ce problème que nous avons la meilleure qualité de débat.
- ✪ Le débat entre la logique naturelle et la logique mathématique est intéressant.

Nombres et Démonstrations

Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver.

2

Le carré d'un nombre pair.

Si n est un nombre pair,
 $n \times n$ est-il toujours un nombre pair ?
Justifie ta réponse.

Ce problème a été expérimenté dans une classe de cinquième avec une observation minutieuse. Plusieurs expérimentations ont eu lieu aussi dans d'autres classes de cinquième avec un énoncé légèrement différent :

"Si n est impair, $n \times n$ peut-il être un nombre pair ? Justifie ta réponse."

Dans tous les cas, ce problème est proposé après le problème " $n \times n - n + 11$ ".

LES OBJECTIFS

L'objectif spécifique visé à travers cette activité est de vérifier le réinvestissement par les élèves de la règle : "Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé mathématique est vrai".

Cette règle du débat mathématique a été mise en place (institutionnalisée) au moment de l'activité sur le problème $n \times n - n + 11$.

Le professeur peut aussi revenir sur la notion de contre-exemple si cette dernière apparaît dans le débat et faire sentir aux élèves la nécessité de se mettre d'accord sur les propriétés ou définitions de départ sur lesquelles on s'appuie pour argumenter, par exemple ici : "un nombre pair est un nombre qui se termine par 0, 2, 4, 6, 8".

LE CHOIX DE L'ÉNONCÉ

Nous avons choisi cet énoncé car nous pensons que les élèves entreverraient rapidement une réponse. D'autre part il existe une preuve mathématique à leur portée. Elle consiste à remarquer que les nombres pairs sont ceux dont le chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8, et à en déduire que le chiffre des unités du carré d'un nombre pair est 0, 4, 6.

Nous avons d'abord choisi l'énoncé suivant :

| *Si n est un nombre impair, $n \times n$ peut-il être un nombre pair ?*

qui a été utilisé dans plusieurs classes. Cette formulation ne permet pas de voir apparaître clairement le réinvestissement de la règle ci-dessus car la réponse oui à la question serait justifiée par des exemples. L'énoncé "Si n est impair, $n \times n$ est-il toujours impair ?" nous semble plus propice à un tel réinvestissement. Nous avons aussi remplacé impair par pair à cause de la confusion faite par certains élèves entre impair et premier.

LE SCÉNARIO

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Pendant 5 minutes environ, les élèves sont invités à rechercher le problème dont ils ont reçu chacun un énoncé. Le professeur passe dans les groupes et fait reformuler l'énoncé, s'il y a lieu. Si beaucoup d'élèves ont des difficultés avec l'énoncé, une reformulation sera faite pour toute la classe.

Nous pensons que les élèves vont faire des essais avec quelques nombres, à la main ou avec leur calculatrice pour se faire une idée de la réponse ou confirmer celle qu'ils entrevoyaient a priori.

TRAVAIL EN GROUPE ET RÉDACTION DES AFFICHES

Le professeur annonce la fin du travail individuel et le passage au travail en groupe dont le but, rappelle-t-il, est de se mettre d'accord sur la rédaction d'une affiche.

Il est pratiquement certain que tous les groupes vont répondre oui à la question posée.

Il est aussi fortement probable que les deux types suivants d'arguments vont apparaître :

- une liste d'exemples plus ou moins longue (1er type);
- la liste des calculs des carrés des chiffres pairs accompagnée des deux affirmations suivantes : 1) les nombres pairs sont ceux qui se terminent par un chiffre pair ; 2) le carré d'un nombre pair se termine par le même chiffre que le carré de son chiffre des unités. (2ème type).

DÉBAT

Le professeur choisit une première affiche. Il la présente à la classe.

- Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser des questions liées à la compréhension du texte (en classe entière).*
- Il invite ensuite chaque groupe à donner son avis, par l'intermédiaire du porte-parole du groupe, sous forme d'une phrase commençant par :*
 - Nous sommes d'accord car ...*
 - ou • Nous ne sommes pas d'accord car ...*
- Il note au tableau les arguments de chaque groupe, en regroupant les "pour" et les "contre".*
- Le débat s'instaure au niveau de la classe sur la validité des arguments produits.*

Au moment opportun (c'est un choix décisif), le professeur arrête le débat et propose une deuxième affiche.

Deux affiches seulement seront débattues : la première présentant un argument du premier type, la deuxième un argument du second type (voir Recherche en groupe ci-dessus).

Le but du débat est d'amener les élèves à confronter ces deux types d'arguments. On peut prévoir une difficulté pour les élèves à reconnaître l'argumentation mathématiquement valable (argument du second type) car les deux type d'arguments conduisent à la même réponse, de plus exacte.

DÉROULEMENT EFFECTIF ET ANALYSE

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Chacun des élèves est rapidement persuadé que la réponse est oui après quelques essais :

Vincent fait des essais avec 2, 4, 16, 894, 778 et il écrit 100.004 mais il ne fait pas le calcul avec ce nombre. Il écrit ensuite : " $n \times n$ est toujours pair car on peut le diviser par 2, 4, 6 ou 8".

Stéphane fait des essais avec 4, 2, 6, 8, 10, 582, 786 et écrit : " $n \times n$ donne un nombre pair".

Mustapha écrit : "oui car 0 - 2 - 4 - 6 - 8, si je les multiplie par eux-même donneront des nombres pairs et tous les autres nombres pairs sont terminés par ces chiffres donc si " n " est un nombre pair, " $n \times n$ " sera toujours un nombre pair".

Julie commence par écrire "oui, $n \times n$ sera toujours un nombre pair car les chiffres (0 - 2 - 4 - 6 - 8 $\times$ 0 - 2 - 4 - 6 - 8)" puis elle s'arrête. Elle finira sa rédaction après.

RECHERCHE EN GROUPE

Les élèves ont des difficultés à trouver une explication. De plus comme ils sont tous d'accord sur la réponse ils n'éprouvent pas le besoin d'en chercher une. Dans certains groupes un débat a lieu sur ce qu'est un nombre pair ; ce débat étant provoqué par la recherche-rédaction d'une justification. En voici un exemple :

Au cours d'un débat autour de la preuve proposée par Mathieu celui-ci précise ce qu'est un nombre pair : "*c'est un nombre qui se divise par 0, 2, 4, 6 ou 8*".

René lui demande : *et aussi par 3 ?*

Mathieu *Mais pas par 3, c'est une vérification.*

Janne *On peut très bien diviser par un nombre impair.*

Kadija pense que la définition donnée par Mathieu d'un nombre pair n'est pas correcte et elle propose de faire un essai

Regarde tu fais 16×16 , tu fais le résultat 256 et tu divises par un nombre pair

Mathieu *Par 2 par exemple ?*

Kadija *Pourquoi par 2 ?*

Mathieu *Comme ça !*

Kadija *Tu mets 8 ?*

Mathieu *Comme tu veux !*

Kadija effectue la division par 8 et constate que le résultat est un entier, elle est étonnée :

Je suis d'accord, ça donne toujours un nombre pair le résultat mais"

Mathieu *Et alors ?*

Kadija *Bon d'accord.*

Ce débat montre que les élèves sentent le besoin d'être d'accord sur une définition claire d'un nombre pair pour pouvoir étayer leur argumentation. C'est un exemple de débat sans conclusion nette comme c'est souvent le cas lorsque le débat n'est pas finalisé par une production écrite. Les traces de ce débat n'apparaissent pas dans la rédaction de l'affiche (voir texte de l'affiche C).

Nous avons remarqué que certains élèves pensent que justifier la réponse et convaincre les autres ce n'est pas la même chose comme le suggère la remarque d'Antoine "*Ce qui est dit là, dans l'énoncé, c'est justifie la réponse. Cà, ça justifie. Maintenant il faut convaincre les autres*". Peut-être, dans l'énoncé faudrait-il supprimer "justifie ta réponse" car, au cours de la présentation de l'activité aux élèves, le professeur précise que chaque groupe doit convaincre les autres.

Le fait d'avoir à écrire une affiche dans un temps assez bref incite parfois les élèves d'un même groupe à choisir l'une des explications fournies par l'un d'entre eux pendant la recherche individuelle sans que tous soient d'accord sur cette formulation (il arrive même qu'ils aient des difficultés à la comprendre).

Finalement les affiches produites correspondent bien à ce qui a été prévu dans l'analyse a priori, sauf l'affiche A sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Textes d'affiches élaborées dans une classe

A

Si on remplace "n" par un nombre pair et qu'on le multiplie par lui-même cela donnera toujours un nombre pair car si on multiplie

$28 \times 28 = 784$ le dernier chiffre étant 4 : $8 \times 8 = 64$. Donc quand on multiplie un nombre pair, par lui-même, on trouvera toujours un nombre pair.

Exemples :

$$0 \times 0 = 0 ;$$

$$2 \times 2 = 4 ;$$

$$8 \times 8 = 64 ;$$

$$10 \times 10 = 100 ;$$

$$12 \times 12 = 144 ;$$

$$22 \times 22 = 484 ;$$

$$30 \times 30 = 900 ;$$

$$284 \times 284 = 80\ 256$$

B

OUI, comme les nombres pairs sont obligatoirement terminés par 0, 2, 4, 6, 8 et que :

$$0 \times 0 = 0 ;$$

$$2 \times 2 = 4 ;$$

$$4 \times 4 = 16 ;$$

$$6 \times 6 = 36 ;$$

$$8 \times 8 = 64 .$$

Avec la multiplication de 2 de ces chiffres identiques, le résultat est toujours égal à un nombre pair.

C

OUI, le produit donnera toujours un nombre pair (n : nombre pair) car on le multiplie par lui-même.

Exemples :

$$8 \times 8 = 64 \text{ nombre pair}$$

$$12 \times 12 = 144 \text{ nombre pair}$$

$$0 \times 0 = 0 \text{ nombre pair}$$

$$n \text{ (nombre pair)} \times n \text{ (nombre pair)} = \text{nombre pair}$$

D

OUI, $n \times n$ donne toujours un nombre pair car : 0, 2, 4, 6, 8 (et tous les nombres (pairs) se terminent par ces chiffres), en les multipliant par eux-mêmes, donnent un nombre terminé par 0, 4, 6 donc pair.

Exemples :

$$22 \times 22 = 484$$

$$1234 \times 1234 = 1\,522\,756$$

$$14 \times 14 = 196$$

E

OUI, n est toujours pair. Si on multiplie un nombre pair (n) par lui-même, le résultat sera toujours un nombre pair.

Exemples :

$$2 \times 2 = 4$$

$$6 \times 6 = 36$$

$$44 \times 44 = 1936$$

$$8 \times 8 = 64.$$

nombre
pairs

ARGUMENTS AVANCÉS PAR LES ÉLÈVES

Ces arguments sont écrits par le professeur au tableau.

POUR L'AFFICHE A

A

Si on remplace "n" par un nombre pair et qu'on le multiplie par lui-même cela donnera toujours un nombre pair car si on multiplie

$28 \times 28 = 784$ le dernier chiffre étant 4 : $8 \times 8 = 64$. Donc quand on multiplie un nombre pair, par lui-même, on trouvera toujours un nombre pair.

Exemples :

$0 \times 0 = 0$	$2 \times 2 = 4$
$8 \times 8 = 64$	$10 \times 10 = 100$
$12 \times 12 = 144$	$22 \times 22 = 484$
$30 \times 30 = 900$	$284 \times 284 = 80\ 256$

- *Oui, car compréhensible.*
- *Oui, car l'affiche est bien expliquée.*
- *Non car l'explication sur 28 est mal rédigée.*
- *Non, car il n'y a pas d'explication, ils mettent des exemples.*

POUR L'AFFICHE B

B

OUI, comme les nombres pairs sont obligatoirement terminés par 0, 2, 4, 6, 8 et que :

$0 \times 0 = 0$	$2 \times 2 = 4$	$4 \times 4 = 16$
$6 \times 6 = 36$	$8 \times 8 = 64$	

Avec la multiplication de 2 de ces chiffres identiques, le résultat est toujours égal à un nombre pair.

- *Non, car la dernière phrase est confuse, car il n'y a pas obligatoirement ces nombres qui sont pairs.*
- *Non, car confus : on dirait qu'il n'y a que ces nombres qu'on peut prendre.*

- *Oui, car il y a une preuve puis la conclusion.*
- *Non, car la dernière phrase est mal expliquée : imprécision des "deux chiffres".*
- *Oui, car le texte est plus simple et compréhensible que le précédent. Il y a assez d'exemples pour prouver.*

POUR L'AFFICHE C

C

OUI, le produit donnera toujours un nombre pair (n : nombre pair) car on le multiplie par lui-même.

Exemples : $8 \times 8 = 64$ nombre pair
 $12 \times 12 = 144$ nombre pair
 $0 \times 0 = 0$ nombre pair
 n (nombre pair) $\times n$ (nombre pair) = nombre pair.

- *Oui, car la phrase et les exemples sont compréhensibles.*
- *Non, c'est juste mais ils n'ont pas expliqué pourquoi ils trouvaient un nombre pair.*
- *Non, car pas de justification.*
- *Non, car ils ont répondu à la question sans justifier la réponse.*
- *Non, car il n'y a ni explication ni justification.*

DÉBAT SUR LES ARGUMENTS

Le professeur expose au tableau l'affiche A.

Il l'a choisie en premier à cause de la liste d'exemples qui fait penser au premier coup d'œil à une argumentation du premier type et l'affiche B en deuxième car elle présente une argumentation du deuxième type, celle qui est mathématiquement valable. A posteriori, on peut dire que le choix de commencer le débat par l'affiche A n'est pas pertinent car elle ne correspond pas aux critères fixés affiche qui doit être à la fois claire et fausse (voir § 2-2). Elle n'est pas claire car sa première partie ne l'est pas et elle présente des

arguments des deux types. Certains élèves ne voyant pas la différence entre des exemples de l'affiche A et la liste des produits des chiffres par eux-mêmes de l'affiche B, le professeur a été amené à proposer l'affiche C, en demandant aux élèves de la comparer avec l'affiche B :

Professeur *Ce qu'on pourrait regarder c'est quelle différence il y a entre ces deux affiches, la B et la C, puisqu'il y a au départ une phrase à peu près pareille, ensuite une série d'exemples, puis une conclusion avec des lettres. Est-ce que c'est la même chose ou pas ? Qu'est-ce que vous percevez comme différences ?.*

Pour amener les élèves à percevoir la différence entre l'argumentation de l'affiche B et celle de l'affiche C le professeur demande si, étant donné un nombre pris au hasard, chacune des deux affiches permet de conclure sur la parité du produit de ce nombre par lui-même :

Prof. *Est-ce qu'il peut y avoir une exception là (affiche B) ?*

Élève *Non.*

Prof. *Pourquoi ? Est-ce qu'il y a quelqu'un qui peut m'expliquer ?*

Prof. *Est-ce qu'on a atteint tous les nombres comme ça ?*

Élève *Oui (en chœur).*

...

Prof. *Tandis que là (affiche C) quand on met simplement trois exemples, est-ce que ça suffit ces trois exemples ?*

Élève *Il n'y a pas besoin d'en mettre trois kilos.*

Prof. *Alors si je prends 32 il doit marcher comme exemple.*

Élève *Ben non.*

Commentaire : Ici on est confronté à un problème langagier : le mot exemple est employé par le professeur et par l'élève avec deux sens différents. Pour le professeur la question est "est-ce que trois exemples ça suffit pour *prouver* ?", pour l'élève sa réponse semble signifier que trois exemples, c'est suffisant pour *comprendre*.

Prof. *Alors, je ne sais pas ce qu'il faut faire ! Alors que là si je prends 32 est-ce que je sais quel résultat je vais avoir ?*

Élève *Oui.*

Prof. *Oui ! Par quoi ça va se terminer, par 4 ?*

Prof. *Est-ce que vous sentez la différence entre les deux affiches ?
Non ? Toujours pas ?*

Enfin le débat est clos par l'enseignant car la situation n'a pas permis aux élèves de distinguer les deux types de preuves. Il prend ainsi acte de l'échec de la situation. Il donne alors son point de vue sur la nature des "exemples" de l'affiche B.

Prof. *On a bien choisi les exemples. On n'a pas mis n'importe quoi.
On a mis de zéro à huit, et ça c'est pas vraiment des exemples.
Ça fait partie de la preuve. Ils ont un rôle particulier, les
terminaisons ce n'est pas les nombres.*

Commentaire : cette intervention très lourde du professeur dans le débat n'est pas habituelle dans la gestion de la classe que nous utilisons pour ce type d'activité (voir § 2-2).

Travail individuel sur les affiches D et E.

Chaque élève a répondu individuellement et par écrit à la question suivante portant sur les affiches D et E.

Êtes-vous d'accord avec la réponse ? Si non, pourquoi ? Si oui, est-ce que l'explication est convaincante ?

15 élèves ont été convaincu par D et 4 par E. Certains déclarent être convaincu par les deux ce qui montre que pour ces élèves là le débat ne leur a pas permis de voir que la preuve proposée par l'affiche E est constituée uniquement d'une liste d'exemples.

Travail individuel 4 jours après

À la question : *Quelle serait à présent ta rédaction personnelle d'une réponse au problème ?*

15 élèves ont rédigé une réponse analogue aux affiches B ou D.

À la question : *Quelle serait à présent, pour toi, l'affiche qui te semble la mieux répondre à la question posée ? Pourquoi est-elle convaincante pour toi ?*

13 élèves ont choisi l'affiche B, 5 ont choisi l'affiche D, 1 l'affiche A, 1 la C, 1 a choisi la E et la B.

Il semble donc que le débat ait permis à la plupart des élèves (18/21) de choisir comme affiche, répondant le mieux à la question celles qui sont mathématiquement correctes. C'est un effet positif de cette situation d'apprentissage. Cependant, les justifications qu'ils fournissent de leur choix montrent que le réinvestissement de la règle "plusieurs exemples ne suffisent pas pour prouver qu'un énoncé mathématique est vrai", qui a été mise en évidence par le professeur au cours de l'activité $n \times n - n + 11$, ne s'est pas vraiment réalisé. Voici quelques-unes des réponses à la question : *Pourquoi est-elle convaincante pour toi ?*

- Des exemples sans trop.
- L'essentiel des exemples.
- Utilisation des exemples comme preuve.
- Ils ont mis les exemples qu'il fallait, ces exemples montrent que le résultat est pair.
- Juste le nombre d'exemples qu'il faut.
- Ils prouvent pourquoi $n \times n$ est pair en donnant des exemples.

Commentaires : Ce type de réponse ne permet pas de savoir si la règle est réinvestie et souligne à nouveau l'ambiguïté du sens du mot exemple.

Nous pensons que le problème lui-même ne favorise pas la manifestation claire du réinvestissement de la règle visée. Cela vient du fait qu'il est difficile pour les élèves de faire la distinction entre les raisonnements du type de l'affiche B (liste exhaustive de tous les cas possibles) et ceux du type de l'affiche C (qui s'appuient sur une liste d'exemples). Pour les élèves, il s'agit dans les deux cas d'une preuve fondée sur des exemples.

CONCLUSION

Avantages de ce problème

- ✧ Comme dans tout problème d'arithmétique, le problème de la généralisation est posé ; c'est-à-dire que les élèves se rendent compte que la réponse oui implique que l'affirmation doit être vraie pour tous les entiers pairs.
- ✧ Les élèves peuvent trouver une réponse dans un temps court.

- ✪ Il y a une preuve qui est à leur portée.
- ✪ L'argumentation la plus économique (quelques exemples) conduit à la bonne réponse. C'est ce qui fait que c'est une situation de réinvestissement : l'utilisation de plusieurs exemples pour prouver ne conduit pas à une réponse fausse et ne peut donc être rejeté que sur la base de la connaissance de la règle "Plusieurs exemples ne suffisent pas à prouver".

Inconvénients de ce problème

- ★ La réponse oui à la question, évidente pour les élèves, ne les incite pas à s'investir dans la recherche d'arguments pour convaincre les autres. Il y a un manque d'enjeu à la recherche d'une preuve.
- ★ Les élèves ont des difficultés à percevoir la différence entre les deux types de preuve : liste d'exemples et preuves intellectuelles.
- ★ Ce problème met en évidence la difficulté que l'on rencontre lorsque dans un problème une preuve "fausse" conduit à une réponse exacte. C'est un point supplémentaire à prendre en compte dans l'analyse a priori.

Figures et Démonstrations

Un dessin suffit-il à prouver ?

3

Le triangle aplati

Existe-t-il un triangle
dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?

Ce problème a été expérimenté dans deux classes avec une observation minutieuse. À titre de test de faisabilité, il a aussi été observé dans cinq classes de cinquième d'un même collège. Il a donné lieu en général à une séance de recherche et une de débat, chacune d'une heure. Éventuellement a eu lieu ensuite un contrôle individuel de ce que les élèves avaient retenu.

LES OBJECTIFS

En plus des objectifs généraux visés à travers toutes les activités décrites dans ce document, nous avons dans ce problème les objectifs spécifiques suivants :

- remise en cause par les élèves de la lecture directe du dessin comme outil de preuve en géométrie ;
- prise de conscience par les élèves de la nécessité de se mettre d'accord sur certaines conventions pour pouvoir mener un débat : il s'agit ici de convenir si un triangle "aplati" est, ou n'est pas, un triangle ;
- remise en cause par les élèves de la conception suivant laquelle l'existence d'un triangle dépend de l'ordre de construction de ses côtés.

Il est à noter que le premier objectif est l'objectif principal. Le traitement du deuxième est une possibilité offerte à l'enseignant par la situation, qu'il peut exploiter ou non suivant les buts qu'il vise. Le troisième objectif est un produit inévitable de la situation, que nous n'avions pas prévu.

LE CHOIX DE L'ÉNONCÉ

Vous pensez sans doute : pourquoi diable n'ont-ils pas posé tout simplement le problème général de l'inégalité du triangle, par exemple sous la forme :

Choisis trois nombres a, b, c ; est-il toujours possible de trouver un triangle dont les mesures des côtés soient ces trois nombres ?

Sous cette forme, ce problème a été expérimenté à Lyon dans le cadre de l'innovation "problème ouvert" de l'IREM de Lyon (cf. Arsac et al., 1988). Il a aussi été expérimenté à l'IREM de Poitiers. Nous avons alors observé un fait qui nous avait intrigués : les élèves produisent diverses conjectures, parmi lesquelles l'inégalité du triangle, mais butent, lors du débat qui suit la

recherche, sur la question suivante : cette inégalité doit-elle être large ou stricte ? Autrement dit, lorsque $a=b+c$, ce que nous appelons le cas du triangle aplati, ils n'arrivent pas à décider collectivement s'il existe un triangle de côtés a, b, c : les avis sont partagés. Ceci s'explique par le fait que les élèves cherchent en général à construire le triangle. Ils sont amenés pour cela à tracer d'abord un côté, puis à chercher l'intersection de deux cercles centrés aux extrémités du sommet tracé. Ces cercles sont tangents extérieurement ou intérieurement et il y a ambiguïté sur l'existence, l'emplacement et l'unicité du point commun. C'est ici que les positions des élèves divergent :

- vu l'imprécision du tracé d'un élève de cinquième, beaucoup trouvent que dans ce cas il existe réellement un triangle (non aplati).
- d'autres dépassent les incertitudes du tracé en remarquant que les deux cercles ne peuvent se couper qu'au point A du segment BC de longueur a tel que $AB = c$ et $AC = b$. Ils en déduisent que le triangle n'existe pas (ou est aplati).



Il s'agit là d'un raisonnement sur la figure qui permet à ces élèves de conclure, même face à une constatation contraire lue sur le dessin. Ainsi, ce problème apparaît bien comme le lieu d'une remise en cause possible de la constatation directe sur le dessin comme outil de preuve.

D'autre part, une préexpérimentation nous avait conduit à observer chez les élèves un phénomène qu'apparemment personne n'avait signalé auparavant : des élèves considéraient que l'existence du triangle pouvait dépendre de l'ordre des côtés et répondaient par exemple que, quand on prend pour base 5, le triangle existe, alors que si l'on prend pour base 9, il n'existe pas.

Ainsi, nous savions que le problème permettait de remettre en cause la vérification par la figure dans le cas du triangle aplati, que la conception sur le rôle de l'ordre des côtés apparaissait chez certains élèves (chez d'autres elle n'apparaît absolument pas) et il nous semblait probable que le problème de savoir si un triangle aplati existe ou n'existe pas surgirait vraisemblablement. Mais nous avons pu observer aussi que, contrairement à ce qu'on aurait pu penser, la situation associée à ce problème était très ouverte : de nombreux débats autres que ceux que nous venons de signaler pouvaient apparaître qui risquaient de les noyer. Par exemple, les débats se tournaient volontiers vers l'arithmétique dans la mesure où spontanément, lorsqu'on dit aux élèves de choisir trois nombres, ils choisissent des nombres entiers. Ils

cherchent alors à relier les propriétés géométriques de constructibilité des triangles à des propriétés de ces nombres n'ayant rien à voir avec l'inégalité triangulaire, par exemple le fait qu'il s'agit ou non d'entiers consécutifs.

De façon à centrer le débat sur les questions qui nous intéressent et d'abord sur la remise en cause de la figure comme outil de preuve, nous avons choisi finalement de poser l'énoncé suivant qui, on le verra, donne déjà lieu à un débat suffisamment riche:

| *"Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm et 4 cm ?"*

Dans cet énoncé, le choix de l'ordre des nombres nous semble important : mettre 9 en premier ou en dernier induirait presque à coup sûr l'idée que $5+4=9$ et donc que cette égalité doit jouer un rôle dans la réponse. De même, il nous semble important de demander "existe-t-il..." et non pas "peut-on construire..." qui conduirait à une question ambiguë.

LE SCÉNARIO

Quatre temps :

- La Recherche individuelle
- Le Travail en groupe et la rédaction des affiches
- Le Débat
- La synthèse sur les règles du débat.

Nous détaillons ci-dessous les quatre temps du scénario que nous avons choisi. Nous analysons ensuite dans le paragraphe suivant quelles hypothèses on peut faire sur le comportement des élèves vu l'énoncé et le scénario choisis.

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Pendant 5 minutes environ, les élèves sont invités à rechercher le problème dont ils ont reçu chacun un énoncé. Le professeur passe dans les groupes et fait reformuler s'il y a lieu, l'énoncé. Si beaucoup d'élèves ont des difficultés avec l'énoncé, une reformulation sera faite pour toute la classe.

Nous pensons que la plupart des élèves, dans cette phase, vont se contenter de chercher à construire le triangle car il s'agit d'un exercice dont ils ont l'habitude. C'est pour ne pas renforcer cette tendance que nous avons choisi d'écrire : "existe-t-il" et non pas "peut-on construire". Pour maintenir tout son intérêt au problème, il nous semble également préférable de fournir du papier non quadrillé.

TRAVAIL EN GROUPE ET RÉDACTION DES AFFICHES

Le professeur annonce la fin du travail individuel et le passage au travail en groupe dont le but, rappelle-t-il, est de se mettre d'accord sur la rédaction d'une affiche.

Ici, la situation devrait être différente dans chaque groupe suivant que les élèves sont d'accord sur une solution ou non. Comme l'usage dans la classe est que lorsque le professeur demande de construire un triangle, il existe, nous pensons que les groupes qui s'appuient sur le dessin pour conclure à l'existence du triangle vont se trouver un peu désarçonnés pour trouver des arguments, le résultat leur semblant évident. Les groupes pensant que le triangle n'existe pas (est aplati) devraient eux, au contraire, être amenés à argumenter leur position. Bien entendu, c'est dans les groupes où il y a désaccord sur la réponse, et donc en général sur le mode de preuve (appel au dessin ou raisonnement) que le débat devrait être le plus ardent et donc les arguments les plus élaborés.

Nous faisons l'hypothèse que les deux positions (le triangle existe, le triangle n'existe pas) vont apparaître dans toutes les classes, c'est là le moteur de la situation et la raison du choix du problème.

DÉBAT

Le professeur choisit une première affiche. Il la présente à la classe.

- *Il demande aux élèves d'en prendre connaissance et de poser des questions liées à la compréhension du texte (en classe entière). Le groupe auteur apporte les éclaircissements nécessaires.*
- *Il invite chaque groupe, à donner son avis, après un travail de 5 à 10 minutes, par l'intermédiaire du porte-parole du groupe, sous forme d'une phrase commençant par :*
 - *Nous sommes d'accord car ...*
 - ou • *Nous ne sommes pas d'accord car ...*
- *Il note au tableau les arguments de chaque groupe, en regroupant les "pour" et les "contre".*
- *Le débat s'instaure au niveau de la classe sur la validité des arguments produits.*

Au moment opportun (c'est un choix décisif et délicat), le professeur arrête le débat et propose une deuxième affiche.

Analyse préalable de ce qui peut se produire

A priori trois cas peuvent se produire :

- tous les groupes ont répondu "OUI le triangle existe".
- certains ont répondu OUI, d'autres NON.
- tous ont répondu "NON le triangle n'existe pas".

Nous les envisageons tous les trois bien que nous n'ayions jamais rencontré que le deuxième. Cependant ce classement est brouillé par l'apparition de l'idée que la réponse dépend de l'ordre des côtés, qui conduit en général à des affiches OUI : le triangle existe si l'on commence par 9, mais NON si l'on commence par 5 ou 4. Nous indiquerons une possibilité de traitement de ces affiches, que nous classons dans le groupe OUI. Nous

pensons a priori que la réponse OUI devrait être majoritaire par suite des habitudes scolaires : l'exercice est assimilé à une construction de triangle et les enseignants donnent en général des constructions "possibles".

*** RIEN QUE DES OUI**

Le professeur classera les affiches pour leur ordre de passage. Si le problème de l'ordre des côtés intervient, il ne commencera pas par les affiches correspondantes. Nous indiquerons comment les traiter à l'occasion du deuxième cas (des OUI et des NON).

Une première affiche est mise au tableau et les élèves débattent en groupe et écrivent leur position. Puis, suivant la procédure habituelle (cf. chapitre 2), a lieu l'écriture des arguments au tableau par le professeur et un débat sur leur validité. Un travail analogue est ensuite fait sur chaque affiche et le professeur veille à limiter le temps des débats. Le choix décisif de l'enseignant est ici l'ordre de présentation des affiches : ce choix repose sur l'analyse préalable que fait l'enseignant de l'intérêt du débat provoqué par chaque affiche. Il n'existe pas pour ce choix de critère absolu et l'erreur est possible : elle sert de leçon pour d'autres débats...

Lorsque toutes les affiches auront été discutées, il sera demandé à chaque élève de se prononcer sur l'explication qui lui semble la plus convaincante. Les élèves auront deux minutes de réflexion, et ils voteront à bulletins secrets sur : "quelle explication (n° de l'affiche), vous semble la plus convaincante et pourquoi ?"

On décomptera en classe le nombre de voix pour chaque affiche, les commentaires ne seront pas utilisés en classe, mais permettront ensuite à l'enseignant de savoir ce qui convainc chaque élève.

S'il reste du temps, ou sinon lors d'une autre séance, une affiche faite par des élèves d'une autre classe (ou apportée par un collègue) sera montrée aux élèves, du type :

"NON, le triangle n'existe pas car on obtient trois points alignés, car $5+4=9$ "

Cette affiche permettra de relancer le débat comme dans le cas de réponses OUI et NON (cf ci-dessous)

Ensuite, il serait intéressant de faire un retour sur les preuves apportées par chaque groupe : "Votre explication est fausse, essayez de trouver pourquoi".

Chaque élève note par écrit ses raisons et le professeur ramasse tous les papiers. Si besoin est, on pourra reprendre ensuite le débat pour arriver à la règle : en géométrie, une constatation sur la figure ne suffit pas pour conclure.

*** DES OUI ET DES NON**

Le professeur commencera par une affiche répondant OUI le triangle existe. Les arguments contraires ne manqueront pas de sortir. Il faudra, avant de débattre de leur validité, laisser un temps de réflexion suffisamment important aux élèves pour qu'ils puissent les assimiler : en effet nous avons vu que dans certains groupes il est probable que l'idée même que le triangle puisse ne pas exister n'a même pas été envisagée.

On continuera ensuite par une deuxième affiche OUI, s'il y en a une, car il importe de vérifier la stabilité des arguments apparus à propos de la première affiche ; si la rédaction de cette deuxième affiche est très différente, sa parenté avec la première peut ne pas être évidente pour les élèves. Il se peut aussi que les élèves ne rentrent complètement dans le débat que sur cette deuxième affiche : le professeur aura dû se retenir d'intervenir trop dans le débat sur la première affiche !

On arrivera ensuite au problème de l'ordre des côtés. Comme nos expérimentations nous montrent que les positions des élèves sont très tranchées (cela leur semble évidemment vrai ou évidemment faux) et que le traitement mathématique de la question renvoie pratiquement au "troisième cas d'égalité des triangles", nous préférons traiter ce problème de façon "expérimentale", en demandant aux élèves de construire un triangle dans un cas non ambigu (par exemple, 10, 5 et 8) en commençant successivement par les trois côtés puis de comparer les résultats (les élèves vont sans doute procéder par découpage ou par transparence, sans qu'il soit nécessaire de prévoir du papier calque). Il faudra bien entendu que le professeur demande d'admettre que ce qui a été constaté dans un cas particulier vaut dans tous les cas, sauf à être en contradiction avec les règles qu'il a lui-même édictées. Naturellement, ce procédé, qui revient en somme à dégager des axiomes à partir de constatations expérimentales, conformément à l'esprit du programme, pose des problèmes sur lesquels nous reviendrons en concluant sur les avantages et défauts de cette situation.

*** RIEN QUE DES NON**

Le débat sur les affiches se fera dans l'ordre suivant : de la moins convaincante à la plus convaincante du point de vue de l'enseignant, c'est-à-dire des mathématiques, ce ne sera pas forcément le point de vue des élèves.

La discussion se fera ici sur le degré de conviction des élèves par rapport à telle ou telle affiche.

DÉROULEMENT EFFECTIF ET ANALYSE

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Comme nous l'avions prévu, dans leur très grande majorité les élèves font des essais en traçant un côté, le plus souvent le plus grand, puis en cherchant l'intersection de deux cercles. Cependant, nous avons observé aussi des cas d'élèves (trois) qui ne font pas de dessin, étant persuadés pour l'un que le triangle existe, pour l'autre qu'il n'existe pas. Voici quelques réflexions à voix haute à propos de ces cas exceptionnels :

- E 1 *"Ca existe pas, je sais pas pourquoi je dis ça, mais ça existe pas" [...] "comment veux tu faire ça ?"*
- E 2 *Et comment tu fais d'habitude ?*

Peu après, ayant dessiné le triangle, E2 ajoute :

- E 2 *Ben si, ça existe, regarde !*

Commentaire : on voit comment chez E2, la conviction due au dessin vient renforcer l'idée a priori que l'on va faire "comme d'habitude" et aussi que E1 et E2 n'ont pas entièrement respecté la consigne de travail individuel.

Dans un autre groupe, un élève, sans faire de dessin, écrit directement sur son brouillon : *"oui, on peut former le triangle"*. En l'absence d'autre information (car pendant cette phase, sauf exception, les élèves ne parlent pas) on peut penser que sa conviction a la même source que celle de E2, il l'étayera d'ailleurs de même en faisant le dessin.

Voici une autre réflexion montrant que les élèves persuadés que le triangle existe s'appuient parfois sur le fait qu'il suffirait de le construire, c'est-à-dire finalement sur l'idée qu'un triangle est toujours constructible, ce qui doit correspondre à leur expérience d'élève :

"il suffit de le faire, c'est idiot, qu'est-ce que c'est que ce problème ?"

Cette conviction conduit naturellement à privilégier les constructions conduisant plutôt à la réponse oui, ce qui est facilité par le fait qu'il semble que l'imprécision des constructions des élèves amène plus souvent à des dessins où le triangle existe qu'à des dessins où il n'existe pas. Certains

tombent pourtant sur ce cas d'impossibilité, mais alors en général ils refont leur dessin et trouvent que le triangle existe, conclusion qui l'emporte toujours sur la précédente comme nous l'avions prévu : d'une manière générale, on sait qu'il est difficile de remettre en cause ses convictions initiales. Dans ce même cas, ils peuvent aussi refaire un dessin en commençant par un autre côté et conclure alors que le résultat dépend de l'ordre des côtés mais nous avons observé ce cas une seule fois et nous verrons ci-dessous que cette idée que le résultat dépend de l'ordre des côtés peut avoir d'autres origines.

RECHERCHE EN GROUPE¹

Le temps de recherche sur ce problème est en général d'environ trois-quarts d'heure. Pour vous donner une idée de l'activité des élèves, nous relatons deux exemples pris dans la même classe : un groupe qui est unanime pour l'existence, et un groupe divisé sur le résultat.

Ces relations ont pour but de vous montrer qu'il est nécessaire de laisser suffisamment de temps aux élèves (pratiquement une séance, à quelques minutes près) pour que la situation puisse mûrir. Ceci est parfois pénible pour l'enseignant qui, dans cette situation en particulier, a souvent l'impression au début qu'il ne se passe rien.

➔ *un groupe unanime sur l'existence* : ils s'en sont tous convaincus au cours de la recherche individuelle bien que l'un d'eux soit tombé d'abord sur un dessin où le triangle n'existe pas. Du coup ils ne savent trop que mettre sur l'affiche : trois d'entre eux proposent (élèves 3, 4, 5) :

On dit juste ce qu'on a fait.

mais le mot "existe" qui figure dans l'énoncé appelle pour (l'élève) 1 des preuves plus élaborées. Cependant ils butent sur le fait que pour eux pour le moment aucune question ne se pose :

E 1 *Il faut convaincre les autres.*

E 4 *Mais pour convaincre, y faut qu'y nous aient demandé pourquoi !*

E 1 *Justement, il faut écrire quelque chose.*

¹ Vous pouvez éventuellement en première lecture laisser tomber ce paragraphe.

Ce débat montre bien la perplexité d'élèves qui sont d'accord sur la réponse à apporter et la méthode de découverte et n'en envisagent manifestement pas d'autres. Pour le moment, la justification demandée n'apparaît que comme une exigence de l'enseignant. Mais en discutant sur la rédaction de leur affiche ils vont tomber sur la question de l'ordre des côtés :

E 4 *On commence toujours par la mesure la plus grande.*

E 1 *Il faut essayer avec les autres, il se pourrait que ça ne marche pas !*

Ils décident donc de vérifier pour les autres côtés, c'est à dire en prenant pour base 4 et 5. A un certain moment E1 construit un triangle de base 4 ou 5 avec une grosse erreur de mesure (1 cm) mais le fait qu'il soit manifestement très différent du précédent de base 9 ne semble pas le gêner. Finalement, E4 tombe sur un cas de figure où "ça se touche", "ça se frôle" (il s'agit des deux cercles de la construction) sans se couper, ceci amène un long débat ponctué par des constructions contradictoires et par l'idée de prendre "l'endroit où ça se touche en premier" ... mais ce débat avorte à la suite d'une intervention du professeur qui amène E3, jusque là absent du débat à exprimer une opinion qui ne sera plus remise en question : *"les triangles existent quelle que soit la base par laquelle on commence la construction"*. Pour l'affiche ils retrouvent leur perplexité initiale, (c'est-à-dire que le problème est relancé, ce qui est un effet classique de l'obligation d'écrire une affiche), puisque pour eux il n'y a pas matière à débat. L'un des élèves exprimera d'ailleurs cette perplexité au professeur qui, conformément au scénario, renvoie aux instructions initiales écrites au tableau : rédaction d'une affiche par le groupe, avec des explications pour convaincre les autres que la réponse est exacte. Après le départ du professeur, E1 ajoute :

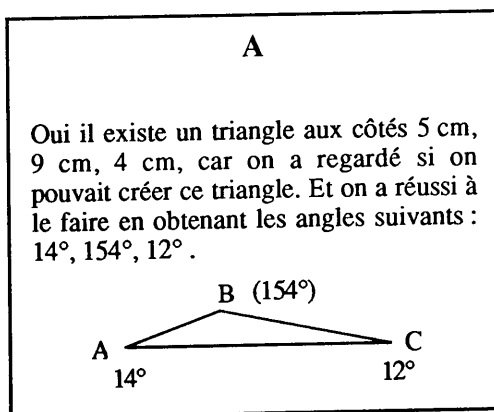
Les autres qu'est-ce que tu crois qu'ils ont fait ? Y z'ont pris leur compas, y z'ont fait un triangle et y z'ont dit que c'était bon.

Cette intervention montre bien qu'ils n'arrivent pas à concevoir un comportement différent du leur, donc un motif à débat. Cependant E4 voudrait faire ressortir leurs recherches sur l'ordre des côtés :

Y faudrait quand même une explication : que l'on commence par le côté de 5, celui de 4, ou celui de 9, le triangle est le même,... non ! Est possible !

Mais cette position, où l'on notera la correction explicite - le triangle n'est pas le même - ne sera pas retenue pour la rédaction de l'affiche. Pour celle-ci,

ils songent à mesurer les angles dans le but de reproduire le triangle et aboutissent finalement au texte A ci-dessous.



➔ **un groupe divisé** : Dès la phase de recherche individuelle, deux comportements étaient apparus: alors que trois élèves se lancaient dans une construction effective, l'élève 4, sans faire de figure, avait déclaré : *"il n'y a pas besoin de le faire pour savoir"* et était convaincu que le triangle était aplati. Les trois autres élèves avaient construit un triangle, bien que, comme dans le groupe précédent, l'un d'entre eux soit d'abord tombé sur un cas de figure où les arcs de cercles ne se coupaient pas. Le passage au travail en groupe fait immédiatement éclater le débat entre l'élève 4 et les autres. Notons que E4 hésite par ailleurs sur la question de savoir si un triangle "aplati" est ou n'est pas un triangle.

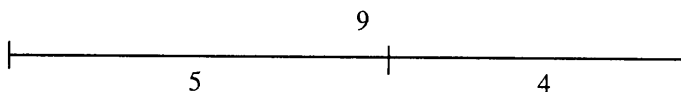
Il argumente de deux manières pour amener les autres sur sa position :

Ben regarde, déjà $5+4 = 9$, donc normalement ça devrait faire le même segment, hein ?

Mais aussi *C'est pas assez précis.*

Commentaire : Dans la première phrase, B donne l'argument qui l'a convaincu lui, alors que dans la deuxième, il prend en compte, pour le réfuter, l'argument qui a convaincu les autres, c'est-à-dire le dessin.

Ensuite seulement, E4 tracera la figure suivante :



Remarquons que ce tracé n'utilise pas le compas. Ce dessin permet à E4 d'illustrer sa pensée. Selon lui, le résultat du tracé devrait être celui-là et non pas les triangles obtenus par ses camarades.

Il semble que deux des autres élèves soient convaincus par E4. Mais E3 reste sur sa position. Après avoir trouvé son triangle, il affirme :

si c'est possible : regarde !

S'engage alors un dialogue entre cet élève et les autres

E 1 *mais c'est pas précis*

E 3 *regarde, si (il mesure à nouveau)*

E 4 *Je suis sûr que ce n'est pas précis, sûr, mais vraiment sûr. Même s'il y a un demi millimètre de décalage, c'est faux. Là ça fait déjà 9,1*

E 3 *tu vas pas discuter pour ça, ça donne tout de même un triangle .*

Ce dialogue est intéressant en ce sens qu'on y remarque que l'affirmation de E4 est plus forte que celle de E1, fraîchement convaincue de la non-existence du triangle : E4 est sûr que ce n'est pas précis. Sa certitude est manifestement "au dessus" de tout dessin, mais pour convaincre les autres, ici E3, il doit se placer de leur point de vue, c'est-à-dire faire appel au dessin, ce qui, d'une certaine manière, affaiblit sa position : la discussion sur la précision de fait des dessins réalisés est sans issue si elle ne débouche pas sur la référence à un dessin infiniment précis : le segment tracé par E4 n'a pas de raison de résister mieux à l'épreuve du contrôle des mesures que les triangles tracés par les autres élèves.

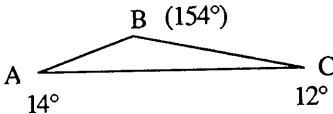
Au total, le groupe rédige l'affiche F (ci-dessous). On notera que E3, qui n'est pas convaincu, a participé à la rédaction de l'affiche. Nous pensons qu'il s'agit de sa part d'une volonté de ne pas s'isoler du groupe.

Textes d'affiches élaborées dans une classe

Voici le texte des six affiches élaborées dans la classe dont font partie les deux groupes ci-dessus (il s'agit des groupes A et F).

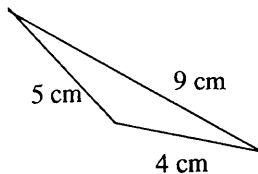
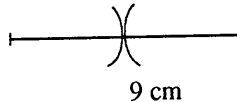
A

Oui il existe un triangle aux côtés 5 cm, 9 cm, 4 cm, car on a regardé si on pouvait créer ce triangle. Et on a réussi à le faire en obtenant les angles suivants : 14° , 154° , 12° .



B

Trois élèves pensent que le triangle est possible si on commence par tracer le segment de 4 cm, mais qu'il est impossible si on trace le segment de 9 cm en premier.



C

Nous trouvons que ce triangle n'est pas réalisable car : nous prenons pour base le côté de 9 cm, puis nous additionnons les deux autres côtés ($5 + 4 = 9$), puis nous superposons ces deux segments.

Si le total des deux autres avait été supérieur à la base, (ex base 14, côtés $9 + 7 = 16$). Dans ce cas, ils ne se seraient pas superposés, ce qui aurait voulu dire que le triangle était réalisable. (position de deux élèves)

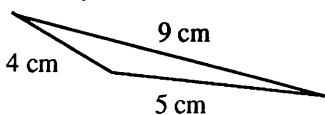
On a réussi à faire ce triangle mais au pif, on n'a pas de preuves. (position de deux élèves)

D

Non, il n'existe pas car si on additionne les deux plus petits nombres des trois, cela donne le même nombre que le troisième.

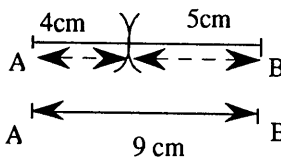
Il faudrait que les deux plus petits nombres donnent un chiffre plus grand que le troisième. Exemple : 9 cm, 5 cm, 6 cm ($5+6=11$).

Un élève du groupe : je ne suis pas d'accord avec eux, parce qu'en faisant le triangle avec ces mesures, j'arrive à le faire.

**E**

Non, il n'existe pas de triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm.

Raison :

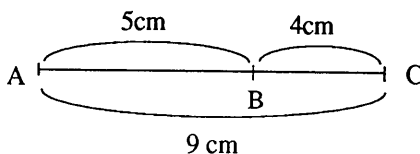


On trace un segment $[AB]$ de 9 cm. On part de A, on trace un arc de cercle de 4 cm de rayon et on part de B, on trace un arc de cercle de 5 cm de rayon. Le point de rencontre est C, il se retrouve sur le segment $[AB]$. On n'obtient pas un triangle.

F

Oui, il existe pas un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm.

Dessin



Échelle : $\frac{1}{2}$

Conclusion : on constate que c'est un triangle plat.

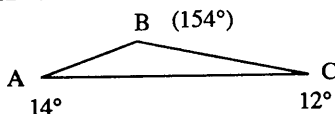
Le triangle ABC a trois côtés ($BC = 9$ cm ; $BA = 5$ cm ; $AC = 4$ cm) et trois sommets : A, B, C. Les angles ont une somme de 180° .

ARGUMENTS AVANCÉS PAR LES ÉLÈVES ET ÉCRITS PAR LE PROFESSEUR

Pour l'affiche A

A

Oui il existe un triangle aux côtés 5 cm, 9 cm, 4 cm, car on a regardé si on pouvait créer ce triangle. Et on a réussi à le faire en obtenant les angles suivants : 14° , 154° , 12° .

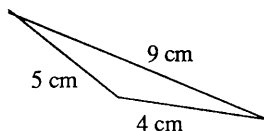
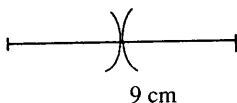


- *Non, car ils n'expliquent pas comment trouver les angles (E).*
- *Non, car on a réalisé le dessin et on n'a pas trouvé les mêmes longueurs des côtés.*
- *Non, car le trait de 5 et le trait de 4, si on les additionne, ça donne le trait de 9, donc ça ferait une ligne droite, il faudrait que les deux plus petits nombres, si on les additionne tous les deux, il faudrait qu'y donnent un nombre plus grand que le plus grand nombre des trois (D).*
- *Non, car le dessin est faux, il n'y a pas d'échelle, et le dessin n'est pas une preuve (F).*
- *Non, car on voit pas pourquoi y z'ont mis les angles.*
- *Oui, car le dessin nous a prouvé que c'était bon, les mesures sont bonnes.*

Pour l'affiche B

B

Trois élèves pensent que le triangle est possible si on commence par tracer le segment de 4 cm, mais qu'il est impossible si on trace le segment de 9 cm en premier.



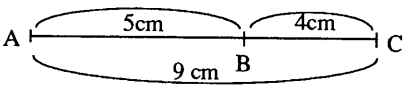
- Non, parce que quand on fait un triangle, on peut commencer par n'importe quel côté, on obtient le même triangle (argument énoncé trois fois, aux détails de rédaction près).
- Non, car pour le trait de 9, j'ai essayé, ça marche, on peut le faire.
- Non, car si on commence par 4, le triangle est irréalisable.
- Non, car on a obtenu 3 solutions en commençant par 5, 4, 9 et ça marchait pour les trois.
- Oui, on n'obtient pas la même chose en commençant par 9 et par 4.

Pour les affiches C, D, E, F

Le professeur décide d'afficher F à la suite de A et B afin de régler la question de savoir si un triangle aplati est ou non un triangle.

F

Oui, il existe pas un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 9 cm, 4 cm.
Dessin



Échelle : $\frac{1}{2}$

Conclusion : on constate que c'est un triangle plat.

Un triangle ABC a trois côtés (BC = 9 cm ; BA = 5 cm ; AC = 4 cm ; et trois sommets : A, B, C. Les angles ont une somme de 180°.

- Un triangle plat, ça n'existe pas.
- Si un triangle est plat, c'est une droite.
- Un triangle peut être plat.
- Avec 9 ; 5 et 4, un triangle n'existe pas.
- Un triangle plat existe car il a trois côtés.
- Dans un angle plat, on ne voit qu'une droite ; ça peut être pareil dans un triangle.
- Un triangle c'est fermé, pas une droite.
- Un triangle plat, c'est fermé, mais ça ne se voit pas.
- Dans un triangle plat, on ne peut pas tracer les hauteurs, les médianes.

Quant aux affiches C, D, E, elles ne seront pas débattues une par une, faute de temps : le professeur distribue aux élèves un texte où sont reproduites toutes les affiches, il organise ensuite le débat sur la dernière question à régler : le problème de l'ordre des côtés suivant le scénario prévu

(construction du triangle 10 ; 5 ; 8 comparaison expérimentale des résultats). Pendant ce débat, tous les élèves ont sous les yeux l'ensemble des affiches.

UN EXEMPLE DE DÉBAT SUR LES ARGUMENTS RELATIFS À UNE AFFICHE

Nous allons décrire un exemple de débat qui s'est déroulé dans une classe où tous les groupes sauf un, ont trouvé que le triangle est aplati avec bien entendu des divergences sur le fait qu'un triangle aplati est ou n'est pas un triangle. Le débat porte donc d'abord sur une seule affiche qui affirme l'existence du triangle en expliquant comment le tracer avec la règle et le compas :

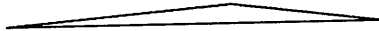
Voici cette affiche :

OUI

Oui, il existe un triangle dont les côtés mesurent 5 cm, 4 cm et 9 cm.

Explication : Nous traçons une hypoténuse de 9 cm. Nous mettons la pointe du compas sur l'hypoténuse, puis nous traçons un arc de cercle de 5 cm et nous faisons la même chose pour 4 cm. Les deux arcs de cercle forment un point et nous n'avons plus qu'à rejoindre le point de l'hypoténuse au point des arcs de cercle pour tracer le triangle.

Exemple :



Divers types d'arguments apparaissent que l'on peut classer suivant qu'ils sont pour ou contre l'existence du triangle (nous entendons par là pour le moment exclusivement l'existence d'un vrai triangle, non aplati), mais aussi suivant qu'ils s'appuient ou non uniquement sur la lecture du dessin.

Arguments de type "intellectuel", c'est-à-dire ne s'appuyant pas uniquement sur la lecture d'un dessin effectif, mais faisant appel aux propriétés qu'aurait un dessin idéalement précis :

- *si ça devait se croiser au-dessus de la base, les traits seraient plus grands, obligatoirement ;*
- *si on fait à partir des mesures, normalement, ça doit tomber pile dessus ;*
- *de toute manière, c'est pas possible, parce qu'y faudrait que les deux traits qui se touchent au dessus de la base, y soient plus grands que la base, et 5 et 4, ça fait 9.*

On voit ici ressortir des arguments qui sont cohérents avec le rapport au dessin que l'on voudrait installer chez les élèves : la certitude est plus forte que la lecture sur le dessin, elle s'appuie sur l'énoncé. Ces arguments visent tous à prouver que les points sont, ou plutôt devraient être, alignés.

Arguments de type "technique", s'appuyant sur le dessin.

- appel aux mesures, soit pour prouver que le triangle tracé par le groupe A est faux, soit au contraire (groupe A) pour montrer qu'il est juste ;
- arguments techniques : les deux arcs de cercle se touchent pendant un long moment, ce qui amène à diverses positions :
 - il faut prendre le premier point où ça se touche (donc le triangle existe);
 - il faut prendre le milieu du segment où ça se touche (donc le triangle est aplati);
 - pour faire un triangle, il faudrait que ça se croise, et non que ça se touche (donc le triangle n'existe pas);
 - en fait ça se croise bel et bien, ça ne se touche pas (donc le triangle existe);
 - on arrive à faire un dessin où les arcs se coupent exactement sur le segment (donc le triangle n'existe pas : c'est exactement l'opposé de l'argument de l'affiche A).

On voit que ces arguments techniques fonctionnent dans les deux sens : on peut pratiquement les appairer par paires d'arguments semblables mais menant à des conclusions opposées comme : je mesure et je trouve que les mesures sont fausses ou au contraire justes (sur le même dessin).

Dans certaines phases du débat on voit un enlèvement dans ces considérations techniques : faut-il prendre le milieu du segment où ça se touche, faut-il prendre le premier point où ça se touche, etc...L'un des buts de la situation est ainsi atteint : montrer que la lecture sur le dessin n'apporte pas d'argument décisif.

En revanche, la confrontation est beaucoup plus difficile entre les arguments de type "intellectuel" et les autres : a priori, ils ne se situent pas sur le

même terrain, donc ne se confrontent pas vraiment. Il y a peut-être ici une question de temps : le temps disponible en classe ne permet pas d'aller jusqu'au point où les élèves s'apercevraient spontanément que la discussion fondée uniquement sur la lecture du dessin ne peut pas déboucher, c'est en général l'enseignant qui doit mettre en évidence cette situation (le même phénomène se rencontre dans la gestion de la situation n^2-n+11). Il apparaît cependant un type d'argument qui est susceptible des deux lectures, technique et intellectuelle, c'est celui de la précision, du dessin qu'on obtiendrait avec une mine bien taillée :

- pour certains élèves, il s'agit manifestement d'un dessin imaginaire, idéal à tous les sens du terme..
- pour d'autres, il s'agit d'une technique graphique raffinée, mais qui ne peut servir de preuve qu'en étant effectivement exécutée, donnant ainsi un dessin sur lequel on pourra lire légitimement, vu sa qualité.

Les échanges sur ce sujet sont donc particulièrement ambigus, les deux points de vue apparaissant simultanément. En voici des exemples :

Si on avait une mine bien taillée, ça se rejoindrait sur la base. (cette phrase exprime une certitude, sans nécessité de "passer à l'acte").

E *Si on fait à partir des mesures, normalement ça doit tomber pile dessus.*

P *Qu'est-ce que ça veut dire, "normalement" ?*

E *Si c'est bien précis, que c'est bien taillé, qu'on part bien sur le bon point.*

E' *Oui, oui, mais y z'y sont pas arrivés.*

(Ici, l'intervention du professeur oblige l'élève E à transformer sa certitude "intellectuelle" en prédiction de réalisation effective sur le dessin, qui tombe sous la critique de E' qui dénie la possibilité technique de réalisation)

Au total, l'enseignant ne peut pas tabler à coup sûr sur le triomphe de la conception "intellectuelle" tout au moins dans un temps compatible avec la gestion de sa classe. Mais en général, les élèves se trouvent bien devant l'impossibilité de conclure à partir des arguments tirés seulement de l'observation du dessin et c'est cela qui est essentiel (de même que dans la situation " n^2-n+11 " les élèves n'arrivent pas à conclure en l'absence de la règle du tiers exclu).

Bien entendu, le débat doit également aborder le problème de l'ordre des côtés d'un triangle et des conventions à faire pour décider si un triangle aplati est ou non un triangle. Pour ces deux débats leur déroulement est exactement celui prévu dans l'analyse a priori :

- quand le problème de l'ordre des côtés est soulevé, que ce soit par une affiche ou dans le cours du débat (cf 3.4 : arguments sur l'affiche B) le professeur l'isole, c'est-à-dire souligne officiellement qu'il y a là un point à débattre. Au bout d'un certain temps, il propose de contrôler sur un exemple et institutionnalise le résultat : le résultat est valable pour tout triangle. Il nous est cependant arrivé d'observer que cette démarche n'est pas suffisante : le problème reparaît dans le débat. Ce fut le cas dans la classe productrice des affiches A, B, C, D, E, F citées en exemple ci-dessus : il n'est pas évident pour les élèves que l'indépendance par rapport à l'ordre des côtés soit vraie pour le triangle "exceptionnel" (5 ; 9 ; 4). Ceci souligne à la fois la richesse de la situation et la difficulté de la mise en place de la notion de figure (cf. chapitre 8).

- quand apparaît le problème de savoir si un segment peut être considéré ou non comme un triangle, le professeur laisse le débat s'engager puis explique aux élèves, après un temps dont il est juge, qu'il faut conclure par une convention et qu'il s'agit là d'un phénomène usuel en mathématiques. Les arguments avancés par les élèves sont toujours les mêmes : un triangle aplati a-t-il ou non trois côtés, trois hauteurs, trois angles dont la somme vaut 180° , etc. (cf. les arguments sur l'affiche F).

CONCLUSION

Disons d'abord que du point de vue des enseignants qui ont utilisé ce problème dans leur classe, il s'agit d'une situation relativement agréable à gérer, à condition de savoir attendre, d'une part quand les groupes commencent la recherche, car pendant un certain temps "il ne se passe rien", d'autre part au cours du débat sur la première affiche qui a souvent du mal à s'instaurer. Mais la situation est agréable en ce sens qu' "il sort des tas de choses" comme le disait un collègue.

Allons maintenant plus loin que ces observations de surface en comparant les résultats de ces séances avec les objectifs visés, il suffit ici de résumer ce que nous avons vu.

- Il y a bien remise en cause de la lecture directe sur le dessin comme seul moyen de preuve : les élèves ne peuvent que constater que ce procédé mène à des débats qui n'arrivent pas à se conclure. Cette impossibilité de conclure à partir du dessin les marque et même peut les choquer momentanément ("qu'est-ce qu'on peut bien trouver comme preuve alors ?" "ça fait un choc").
- En revanche, la certitude fondée sur le raisonnement chez certains élèves ne se transmet pas toujours à ceux qui a priori faisaient confiance au dessin. Notons ici que cet "échec" est lié fortement au temps très court de notre observation. Les observations non systématiques faites par les enseignants montrent que cette évolution nécessite un mûrissement chez certains élèves.
- Le problème de l'ordre des côtés est, on l'a vu, en partie traité : il est intéressant de remarquer que même après institutionnalisation par l'enseignant du fait qu'un triangle ne dépend pas de l'ordre de construction des côtés, ce fait peut être remis en cause quand il rentre en conflit avec la confiance au dessin, tant celle-ci est grande parfois.
- Le fait que le débat sur "un triangle aplati est ou non un triangle" se règle par une convention, n'a jamais soulevé de difficulté.

En conclusion globale, soulignons le fait que le problème du rôle du dessin en géométrie ne se règle pas avec une, ni même deux, situations problèmes. Il s'agit d'un apprentissage long mais dans lequel ce problème (et celui du rectangle) ou tout autre problème présentant des caractéristiques analogues vont servir ensuite de situation de référence quand la difficulté réapparaîtra.

Figures et Démonstrations

Comment remettre en cause les mesures sur un dessin ?

4

Le rectangle d'Euclide

Ce problème a été expérimenté dans une classe de quatrième et dans une classe de cinquième.

Les descriptions et analyses faites concernant essentiellement le travail fait dans la classe de cinquième. Cette classe comporte 21 élèves repartis en cinq groupes. Le travail s'est déroulé sur deux séances. Un problème de réinvestissement a été proposé au cours d'une séance ultérieure.

Nous avons proposé ce problème après le problème sur le triangle aplati.

LES OBJECTIFS SPÉCIFIQUES QUE NOUS VISIONS À TRAVERS CETTE ACTIVITÉ

Comme dans l'activité triangle aplati, nous visions l'objectif suivant :

- ⇒ remise en cause par les élèves de la lecture directe du dessin comme outil de preuve en géométrie. Il s'agira en partie d'un réinvestissement dans la mesure où cette activité vient après l'activité triangle aplati où l'on a énoncé la règle suivante : une constatation sur un dessin ne permet pas de prouver en géométrie.

Or cette constatation peut être la conséquence de la lecture du dessin ou de mesures faites sur le dessin. Ici, c'est ce deuxième aspect qui est privilégié. L'objectif principal est donc : remise en cause par les élèves des conséquences tirées de mesures effectuées sur le dessin.

Un objectif secondaire lui est lié :

- ⇒ prise de conscience par les élèves de l'impossibilité de faire un dessin "infiniment précis".

LE CHOIX DE L'ÉNONCÉ

Problème du rectangle

Trace un rectangle ABCD tel que $AB = 8 \text{ cm}$ et $BC = 5 \text{ cm}$.

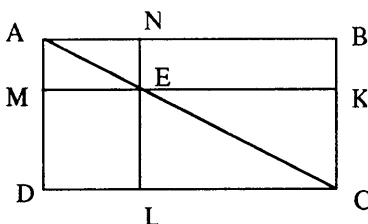
Place un point E sur [AC] tel que $AE = 3 \text{ cm}$.

Trace la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe [AB] en N et [DC] en L.

Trace la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe [AD] en M et [BC] en K.

Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Cet énoncé peut être illustré par le dessin suivant qui ne figurait pas avec la feuille remise aux élèves :



Le recours à la mesure ne permettant pas de conclure, notre objectif est que les élèves cherchent une méthode ne faisant pas appel aux mesures.

Nous avons voulu mettre en conflit deux conceptions :

- une conception intellectuelle : "faire un raisonnement",
- une conception pragmatique : "mesurer, puis calculer", celle-ci devant conduire à des résultats contradictoires.

Cette contradiction peut être levée par une preuve, à la portée des élèves, qui s'appuie sur une propriété admise (la diagonale d'un rectangle partage celui-ci en deux triangles d'aires égales) et sur l'additivité des aires.

Cette contradiction doit aussi conduire à la remise en cause de la méthode "dessiner/mesurer".

Nous avons été amenés à faire plusieurs choix pour la rédaction de l'énoncé :

*** *L'énoncé comporte des mesures*** (longueur des côtés du rectangle ABCD, position de E sur [AC]). Il aurait été possible de proposer un énoncé sans mesure. La diversité des dessins faits dans ces conditions aurait pu amener à des débats liés, en particulier, aux dimensions du rectangle dessiné ou à la longueur de [AE]. Des résultats différents n'auraient pas semblé contradictoires pour les élèves. Ils auraient pu attribuer ces écarts au fait qu'ils n'avaient pas dessiné le même rectangle.

Nous pensons que la contradiction sera plus évidente dans la mesure où tous les élèves ont le même dessin. C'est pour cela que nous avons choisi de préciser des mesures.

Un énoncé sans mesure pourrait être proposé à des élèves plus âgés.

*** *Le choix des mesures proposées.***

Il conduit à l'impossibilité d'avoir des mesures exactes. Les dimensions des rectangles EMDL et NEKB sont des nombres irrationnels, ce qui doit avoir pour conséquence une plus grande divergence des résultats obtenus pour les aires des deux rectangles, et donc de faire apparaître des contradictions à l'intérieur des groupes. Comme les deux rectangles obtenus ne sont pas superposables, l'égalité de leurs aires n'est pas évidente.

*** *La formulation de la question.***

La question posée aurait pu être : "*Comparer les aires des deux rectangles EMDL et ENBK*". Dans ce cas, un consensus en faveur de l'égalité des aires risquait de s'établir dans la classe sans aucun débat. C'est en effet la réponse usuelle à ce genre de question dans les problèmes de mathématiques.

LE SCÉNARIO

Nous détaillons ci-dessous les trois temps du scénario que nous avons choisi. Nous analysons ensuite dans le paragraphe suivant quelles hypothèses on peut faire sur le comportement des élèves vu l'énoncé et le scénario choisis.

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Le professeur remet à chaque élève le texte de l'énoncé et une feuille non quadrillée. le temps de recherche individuelle prévu est plus long que dans le cas des autres problèmes. Le professeur ne l'arrête que lorsque chaque élève a une réponse au problème.

Nous pensons que les élèves vont mesurer, calculer les aires et les comparer. Comme il s'agit de mettre en évidence que l'on obtient ainsi des résultats contradictoires, il faut que les différences de mesures soient grandes, d'où le choix du papier non quadrillé, il faut aussi que chaque élève ait un résultat à confronter aux autres, d'où l'ouverture du temps.

TRAVAIL EN GROUPE ET RÉDACTION DES AFFICHES

Après être passé dans chaque groupe pour vérifier que tous les élèves ont une réponse, le professeur propose de passer au travail en groupe. Il donne les consignes habituelles. En cas de désaccord persistant, il peut accepter la production de deux affiches.

Nous prévoyons que les élèves vont en majorité effectuer des mesures et obtenir des résultats contradictoires. Un débat doit alors s'instaurer dans les groupes entre ceux qui estiment que EMDL a la plus grande aire, ceux qui pensent que c'est ENBK, et éventuellement ceux qui estiment que les deux rectangles ont la même aire.

DÉBAT

À la différence du scénario habituel, après rédaction des affiches, celles-ci seront exposées simultanément au tableau pour mettre davantage en évidence les contradictions ...

Notre objectif est ici de lancer le débat.

Le point crucial est l'apparition ou non de la preuve explicitée précédemment ; nous avons donc envisagé que deux cas pouvaient se produire :

- la preuve apparaît dans au moins un des groupes ;
- la preuve n'apparaît pas.

Si la preuve apparaît, nous pensons qu'un autre groupe, au moins, aura produit une affiche comportant une explication avec des mesures. Le débat va donc pouvoir s'instaurer entre ces deux groupes et s'étendre à toute la classe.

Si la preuve n'apparaît pas, c'est que tous les groupes s'appuient sur des mesures pour conclure. Deux situations sont possibles :

- les groupes ne trouvent pas tous le même résultat ;
- tous les groupes trouvent le même résultat.

Dans le premier cas, le débat portera sur les mesures. Un conflit doit apparaître du fait que l'aire de l'un des deux rectangles ne peut être à la fois "plus petite" et "plus grande" que celle de l'autre.

Si aucun accord n'apparaît dans la classe, le professeur peut intervenir et proposer aux élèves de trouver une autre méthode sans utiliser les mesures, puisque celles-ci ne permettent pas de se mettre d'accord. Cette recherche se fera alors à nouveau en groupe.

Dans le deuxième cas (tous les groupes trouvent le même résultat), l'un des deux rectangles (le même pour tous les groupes) a la plus grande aire.

Il n'y a pas, alors, de contradiction. L'enseignant proposera une affiche à la classe sur laquelle figurera :

- un dessin,
- une explication prouvant que les aires des rectangles EMDL et ENBK sont égales.

En voici le texte :

"Les aires sont égales :

* l'aire du triangle ENA est égale à l'aire du triangle EMA ;

* l'aire du triangle EKC est égale à l'aire du triangle ELC ;

* l'aire du triangle ABC est égale à l'aire du triangle ADC.

Et par soustraction, les aires des deux rectangles sont égales.

Il précisera que cette affiche a été produite par une autre classe.

L'affiche peut être utilisée également si le débat s'enlise ou si les élèves se mettent d'accord sur un résultat faux.

Quelles réactions sont prévisibles face à cette affiche ?

- une remise en cause de la précision du dessin : "Mon dessin n'est pas assez précis".
- un accord sans véritable conviction avec le texte de l'affiche : "c'est vrai, mais avec mon dessin, les mesures et les calculs que j'ai faits sont aussi justes". (cas peu probable).
- accord de tous avec l'affiche ; l'enseignant propose alors aux élèves de revenir sur leur propre affiche et de voir ce qui doit être remis en cause.

En cas de désaccord avec l'affiche, on laisse la classe débattre.

Après ce débat, il est prévu un retour dans le groupe. Chaque groupe devra répondre, par écrit, aux questions suivantes :

- Êtes-vous d'accord ou non avec l'affiche ? Pourquoi ?
- Qu'est-ce que vous pensez maintenant de votre affiche ?

Comme nous l'avons indiqué, le débat peut donc se terminer par une intervention de l'enseignant et un retour au travail en groupe.

DÉROULEMENT EFFECTIF ET ANALYSE

RECHERCHE INDIVIDUELLE

Les élèves respectent scrupuleusement la consigne : le travail est entièrement individuel. Les interventions du professeur sont peu nombreuses. La durée de cette phase est d'environ 25 minutes.

Les élèves dessinent la figure, font des mesures, puis calculent les aires des rectangles.

Dans l'un des groupes, un élève rédige un texte concluant à l'égalité des aires, en utilisant la preuve que nous attendions.

La majorité des élèves conclut que l'un des deux rectangles a une aire plus grande que l'autre. Deux seulement, dans des groupes différents (D et E), concluent à l'égalité des aires.

RECHERCHE EN GROUPE

Après comparaison des résultats obtenus et constat des différences, les élèves des groupes A, B, C et D vont refaire leurs mesures et leurs calculs sur les dessins déjà tracés, puis ils vont faire de nouveaux dessins pour lesquels ils appliqueront la même méthode. Les discussions portent sur la précision des mesures, la justesse des dessins, la recherche de l'origine des écarts constatés entre les résultats.

Ainsi le groupe A va faire un inventaire des sources d'erreurs possibles.

Les groupes A et C vont rechercher et trouver un moyen de contrôler leurs résultats numériques : le rectangle ABCD est décomposé en rectangles, donc la somme des aires de ceux-ci doit être égale à 40 cm^2 (aire du rectangle ABCD). Un autre procédé est proposé par un élève du groupe A en additionnant les longueurs des segments, on doit retrouver les longueurs (8 cm et 5 cm) des côtés de ABCD.

Dans le groupe A cette activité de contrôle va fonder la décision du groupe. Elle va permettre de lever les contradictions, en renforçant le rôle des mesures et sans remettre en cause cette méthode.

Pour les élèves du groupe C, il faut trouver, conformément aux consignes, une justification. Une des élèves a une idée qui sera expliquée dans le groupe en utilisant mesures et calculs mais qui sera rédigée sur l'affiche sous forme d'un court raisonnement : enlever la même aire à des rectangles d'aires différentes (voir affiche C plus loin).

Les élèves du groupe B vont rapidement décider de travailler sur un seul dessin pour lequel chacun fait les mesures et ils se mettent d'accord sur le rectangle qui a la plus grande aire. La confection de l'affiche va être pour ce groupe l'occasion de discussions (retour sur la compréhension de l'énoncé ; respect de la consigne : "il faut justifier" ; choix de l'échelle pour le dessin). Les mesures faites sur le dessin de l'affiche vont les amener à changer d'avis sur le résultat. Un élève semble percevoir les contradictions entre les différents résultats obtenus ; il s'étonne que les autres ne les perçoivent pas et propose d'essayer un raisonnement ("il faut réfléchir"), mais il n'arrive pas à imposer son point de vue et se rallie à la position des autres (Il ne parvient pas à formuler que tous devraient obtenir le même résultat puisqu'ils partent tous des mêmes mesures).

Les élèves du groupe D auront aussi au départ comme objectif d'être plus précis. Un des élèves, J, va alors élaborer le raisonnement qui sera écrit sur l'affiche, prouvant l'égalité des aires des deux rectangles. Les autres vont à nouveau refaire des mesures. J est sûr de son raisonnement, il affirme que les mesures et les calculs ne servent à rien. Son autorité de "bon élève" va emporter la décision du groupe sans vraiment convaincre.

Dans le groupe E, dès le début, un élève propose "la solution idéale", en contradiction avec celles trouvées par les trois autres. La discussion va porter sur cette solution, mais va amener le groupe à se mettre d'accord sur une autre solution, affirmant l'égalité des aires à l'aide d'un raisonnement incorrect (voir affiche E) et qui s'appuie sur une lecture erronée de la figure.

Finalement trois groupes (A, B et C) vont conclure que ENBK a la plus grande aire. Les deux autres vont conclure à l'égalité des aires.

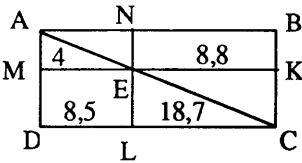
Cette phase de recherche en groupe va mettre en évidence deux sortes de conflits :

- conflits entre élèves qui font confiance aux mesures
- conflits entre élèves qui font confiance aux mesures et élèves qui font un raisonnement.

Certains élèves vont opérer un retour aux mesures après des ébauches de raisonnement.

Textes d'affiches élaborées dans une classe

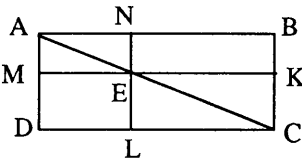
A



Le rectangle BENK a une aire de 8,8 centimètres carrés et MELD de 8,5 centimètres carrés.

Conclusion : le rectangle BENK a la plus grande aire. Pour la vérification, on additionne toutes les aires du rectangle. Le résultat sera égal à 40, c'est-à-dire l'aire du grand rectangle.

B



Le rectangle qui a la plus grande aire est ENBK.

$ME = 5 \text{ cm}$; $EL = 6,8 \text{ cm}$

$NB = 11,1 \text{ cm}$; $NE = 3,3 \text{ cm}$

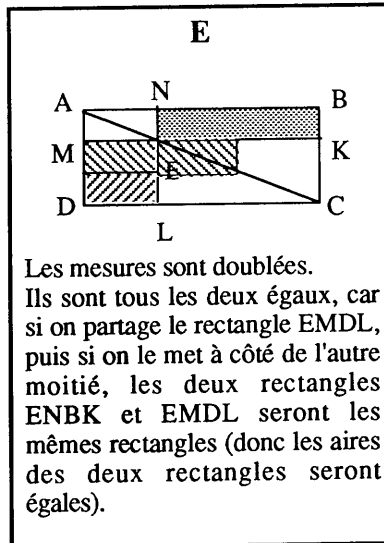
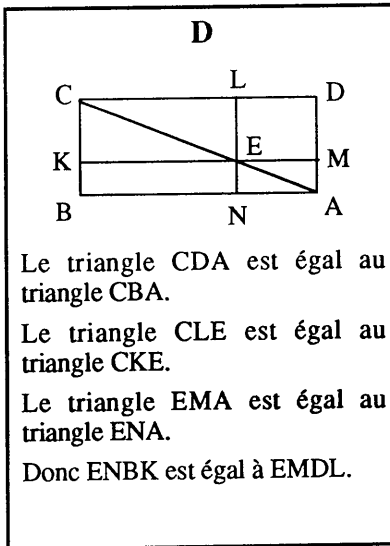
Aire ENBK $= 11,1 \times 3,3 = 36,63 \text{ cm}^2$

Aire EMDL $= 5 \times 6,8 = 34 \text{ cm}^2$

C'est ENBK car si on additionne la longueur et la largeur du rectangle ENBK, le résultat sera plus grand que si on additionne la longueur et la largeur du rectangle EMDL.

C

Le rectangle qui a la plus grande aire est ENBK, car AMBK a une plus grande aire que ANLD et si on relève le rectangle ANEM à NBKE, le résultat sera plus grand que si on enlève ANEM à ANLD.



Deux affiches comportent des mesures : A (celles de l'énoncé), B (celles du dessin figurant sur l'affiche).

L'affiche E comporte l'indication de l'échelle du dessin.

L'affiche C ne comporte pas de mesures. Cependant toute la discussion dans le groupe s'est appuyée sur les mesures faites. L'affiche D reflète en fait la position d'un seul élève du groupe, à laquelle se sont ralliés les autres sans qu'il y ait eu vraiment débat.

Quatre affiches proposent des dessins. Trois proposent des raisonnements qui ne font pas appel à des mesures.

DÉBAT

Comme prévu, les affiches sont présentées simultanément aux élèves. Ce qui met en évidence les contradictions. Elles seront examinées, malheureusement rapidement, sans véritable appropriation. On n'a pas choisi de porte-parole. Les élèves ont des difficultés à se remettre dans le bain après une

interruption¹. Ils ont tendance à papillonner d'une affiche à l'autre, ce qui a pour conséquence des difficultés de compréhension des textes. Dans les groupes, il est difficile d'avoir un véritable débat car les élèves souvent ne parlent pas de la même affiche.

Les élèves ne perçoivent pas de contradiction entre la méthode de l'affiche D et celles par exemple reposant sur des mesures.

Les échanges portent sur la forme du texte des affiches ou sur les résultats numériques et pas sur les procédures employées.

Voici quelques exemples des arguments présentés au cours de ce débat :

Par rapport aux mesures :

À propos de l'affiche A : Non car les mesures peuvent être fausses, si elles sont mal prises.

Non, car ils se sont basés uniquement sur les mesures, source d'erreurs.

Pour B : Non car les mesures utilisées induisent en erreurs.

Pour D : Oui car il n'y a pas de calculs (source d'erreurs).

Par rapport aux dessins :

Pour C : Il n'y a pas de dessin, c'est donc plus difficile à se repérer.

Pour D : Oui mais un peu dur à comprendre, il faut regarder le dessin.

Pour A : Non à cause des mesures et du dessin qui sont source d'erreurs.

Par rapport à la forme du texte rédigé :

Pour B : cette affiche est mieux expliquée que l'affiche A.

Pour D : Oui car l'explication est simple.

Non car il n'y a pas d'explication.

Certains arguments avancés sont plus particuliers à certaines affiches :

Pour A : Non car la vérification ne prouve pas que l'aire des deux rectangles ENBK et EMDL soit juste.

Un contre-exemple est donné par une élève au cours du débat (on peut trouver 40 cm² de différentes façons).

Pour B : Non car on ne sait pas l'échelle.

¹ La séance de débat a eu lieu deux jours après la séance de recherche.

Des arguments mettent en jeu un lien entre périmètre et aire.

Pour B : Non car ils disent que le plus grand périmètre donne la plus grande aire.

Non car deux figures de même aire n'ont pas le même périmètre.

Un seul argument présenté prend en compte un raisonnement.

Pour D : Oui car il y a un bon raisonnement.

A l'issue du débat, le deuxième jour, le professeur a posé les questions suivantes :

A présent, par quelle affiche es-tu convaincu personnellement ? Pourquoi ?

Une réponse individuelle est demandée.

Un élève est convaincu par A , trois par B, un par C, douze par D et quatre par E. Seize élèves sur vingt et un considèrent donc que les aires sont égales. Aucune institutionnalisation de règle n'a été faite à la fin de ce travail.

RÉINVESTISSEMENT

Quelques jours plus tard, le problème suivant a été proposé aux élèves :

"Trace un parallélogramme VELO avec $VE = 10$ cm et $V0 = 7$ cm. Marque le point U tel que $VU = 4$ cm sur la diagonale [VL]. Trace la droite parallèle à (VE) passant par U, elle coupe (VO) en A et (LE) en D. Trace la droite parallèle à (V0) passant par U, elle coupe (VE) en N et (OL) en T. Parmi les parallélogrammes AUTO et DUNE , quel est celui qui a la plus grande aire ? Pourquoi ? "

Pour seize élèves les aires sont égales.

Cinq élèves sont en contradiction avec l'avis qu'ils avaient exprimé à propos du rectangle.

CONCLUSION

L'expérimentation faite a mis à jour un certain nombre de difficultés liées au problème, aux conceptions des élèves, à la gestion de la classe, à une analyse a priori peut-être insuffisante.

Bien que les valeurs calculées pour les aires soient en général très voisines, les élèves ne conjecturent pas leur égalité, sans doute parce que la question posée induit l'idée que les aires sont différentes. Ceci n'a cependant pas empêché deux groupes de conclure à l'égalité des aires.

Comme on l'a vu, pour les élèves, il n'y a pas d'opposition absolue entre les deux méthodes (mesurer / faire un raisonnement) : Du point de vue des élèves, la démonstration attendue s'appuie en fait sur la figure.

Tant au cours du travail de groupe avant l'affichage qu'au cours du débat collectif, le constat des différences entre les résultats numériques obtenus et les réponses données au problème posé conduit les élèves à plusieurs démarches :

- Refaire les mesures, les calculs, réaliser de nouveaux dessins sur lesquels ils refont mesures et calculs. Leur objectif est la recherche d'une précision "idéale" dans les mesures, les calculs ou les dessins. Ils essaient en fait, d'améliorer ainsi l'activité de mesure, mais ils ne mettent pas en doute la méthode qui consiste à utiliser des mesures.
- Rechercher un moyen de contrôler les résultats numériques. Mais la vérification, par addition des aires, proposée par certains élèves, renforce elle aussi le rôle des mesures. Elle leur permet de se sortir des différences numériques sans critiquer les méthodes.
- Rechercher une explication aux différences constatées ; des essais de raisonnement, ne faisant pas appel aux mesures mais s'appuyant sur des dessins ou se référant à des conceptions erronées vont alors apparaître. Il y a bien prise de conscience de la contradiction entre les résultats mais pas de la contradiction entre les méthodes.

Le calcul de l'aire apparaît à beaucoup d'élèves comme plus simple qu'un raisonnement.

La consigne "donner une explication" a provoqué, comme souvent, un effet pervers : beaucoup d'élèves se concentrent sur cette tâche au détriment de la recherche d'une autre méthode. Le réinvestissement du problème du "triangle aplati" se fait très rarement dans cette classe de cinquième. Il faut noter ici

une différence importante avec ce qui avait été observé dans la classe de quatrième dans laquelle avaient été expérimentés les deux problèmes et où le lien avait été clairement perçu. En effet, dans cette classe, les élèves, au cours du débat, après avoir constaté l'échec de la méthode consistant à utiliser des mesures précises ou à réaliser un dessin "parfait", ont recherché ce qu'ils appellent une règle, en fait une ébauche de démonstration.

Ils avaient déjà constaté cet échec en résolvant le problème du triangle aplati.

Au moyen d'une affiche, confectionnée par lui, affirmant que les aires des deux rectangles sont égales, le professeur avait relancé le débat dans la classe en l'orientant vers une analyse de la preuve fournie sur cette affiche. La discussion permet alors de montrer que le raisonnement fait ne s'appuie ni sur une figure particulièrement précise, ni sur des mesures mais sur la propriété du partage en deux du rectangle par la diagonale.

Une difficulté peut alors survenir : pour certains élèves "Si on ne fait pas de calculs, on ne peut pas se tromper" (noté en particulier dans la classe de cinquième); cela risque de valider automatiquement, pour eux, les procédures dans lesquelles n'apparaissent pas de mesures ou de calculs.

La généralisation du problème (changement des longueurs données dans l'énoncé, position de E quelconque sur [AC]) ne s'est pas posée.

Dans cette situation de classe, nous ne sommes pas parvenus à une véritable remise en cause par tous les élèves des mesures comme outils de preuve, comme en témoigne les difficultés rencontrées par les élèves pour lever les contradictions perçues (entre les mesures différentes) : leur réponse étant soit "d'améliorer les mesures", soit de proposer une méthode de vérification qui s'appuie sur les mesures. Dans les deux cas, on reste dans les mesures. L'origine de cette difficulté nous semble double :

- * des difficultés au niveau de la gestion du débat : le fait de proposer toutes les affiches en même temps pour le débat est une chose qui ne favorise pas l'appropriation des affiches par les élèves et donc ne permet pas un véritable débat ;
- * des difficultés liées au rôle de la figure dans la démonstration attendue : c'est d'abord sur le dessin que l'on voit que la diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles de même aire et qu'on voit comment additionner les aires. On retrouve ici la complexité du rôle du dessin en géométrie (cf. chapitre 8).

Les deux activités, triangle aplati et problème du rectangle, nous semblent complémentaires. La première met l'accent sur la fragilité de la lecture directe

de la figure ; la seconde met en garde contre l'utilisation des mesures. Mais les difficultés auxquelles nous nous sommes heurtées montrent bien qu'on ne peut donner de "mode d'emploi" exhaustif de la figure en cinquième. Ces deux situations serviront de référence toutes les fois que surgira le problème du dessin en géométrie.

Malgré toutes les limites, le bilan est dans l'ensemble positif. Si nous avions disposé de plus de temps, nous aurions pu sans doute amener les élèves à dépasser leurs contradictions.

Figures et Démonstrations

Comment aider les élèves à remettre en cause la valeur de preuve d'un instrument de mesure : Le rapporteur.

5

La somme des angles d'un triangle

Attention ! Les observations fines que nous avons mises en place nous ont permis de constater que cette activité ne permettait pas toujours d'atteindre nos objectifs.

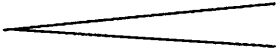
Précisons tout de suite que cette activité **est constituée d'une succession de problèmes** qui doivent amener les élèves à conjecturer que la somme des angles de n'importe quel triangle est égale à 180° , et à s'engager dans la recherche d'une preuve de cette conjecture. Nous avons expérimenté cette situation dans huit classes de 5^{ème}. Nous allons vous la présenter, ainsi que l'analyse que nous en avons faite.

LES OBJECTIFS

Cette activité a été choisie pour :

- Permettre aux élèves de remettre en cause la figure et le rapporteur comme outils de preuve.
- Permettre aux élèves de s'approprier le résultat de la somme des angles d'un triangle.
- Mettre en échec une conception fréquente des angles : cette conception consiste à assimiler l'angle à sa représentation, ce qui a pour conséquence d'amener l'élève à penser que la mesure de l'angle est fonction de la

"longueur" de ses côtés. C'est-à-dire que pour ces élèves l'angle :  est

plus petit que l'angle :  .

LE SCÉNARIO

Le scénario que nous allons décrire doit tout à la fois amener les élèves à conjecturer que la somme des angles est égale à 180° et en même temps installer une incertitude suffisante quant à la validité de cette conjecture pour que les élèves s'engagent dans la recherche d'une preuve.

Il a été conçu à partir d'une situation de recherche due à N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez les élèves de collège*". Thèse, Université J. Fourier, Grenoble, 1988.

PREMIER TEMPS : TRAVAIL INDIVIDUEL

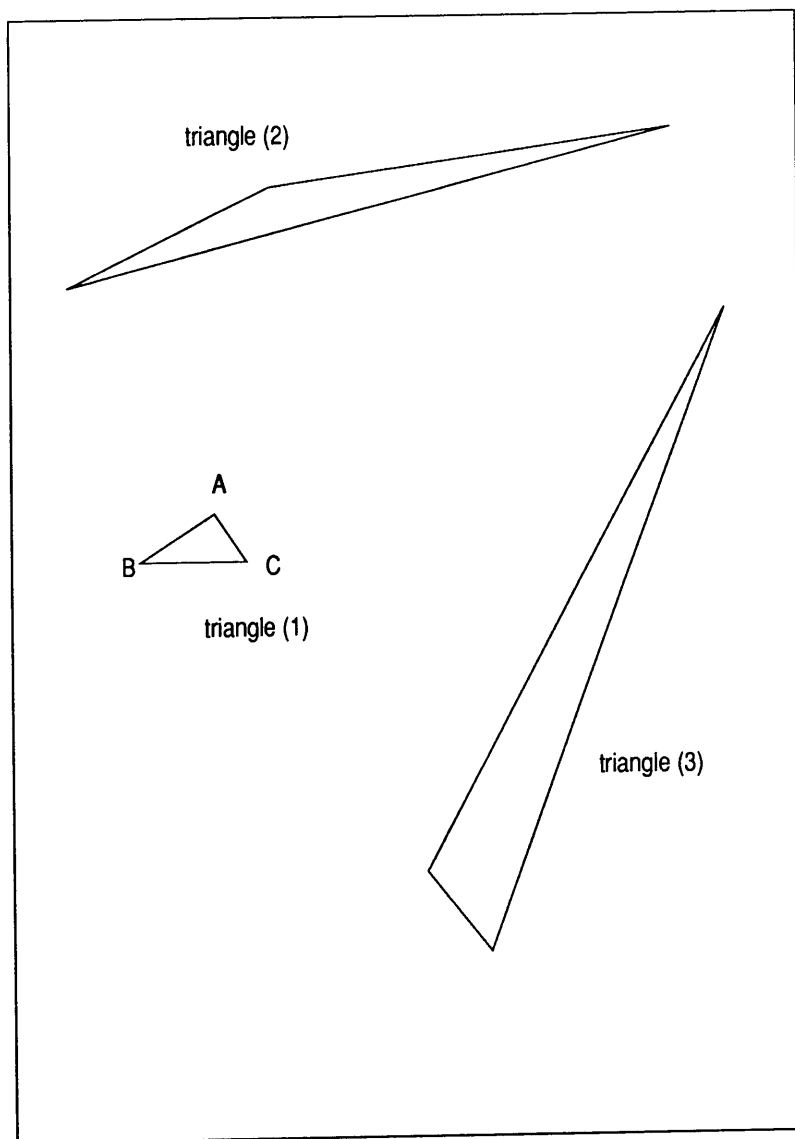
Les élèves sont invités à dessiner un triangle, à mesurer les angles de ce triangle et à calculer la somme de ces mesures. Le professeur recense les résultats obtenus au tableau ; il invite ensuite les élèves à faire des remarques par rapport aux résultats. Il ne prend pas parti, il distribue simplement la parole.

Commentaires : Ce temps a pour objectif de permettre aux élèves de percevoir tout à la fois que tout le monde ne trouve pas le même résultat et qu'il y a malgré tout une convergence des résultats autour de 180° . La divergence des mesures ne semblera certainement pas anormale aux élèves puisque tous n'ont pas construit le même triangle.

DEUXIÈME TEMPS : TRAVAIL INDIVIDUEL PUIS EN GROUPES

Le professeur remet à chaque élève la fiche ci-dessous sur laquelle sont représentés trois triangles "pathologiques" et il leur demande de faire un pari sur la somme des angles de chacun de ces triangles *sans utiliser le rapporteur*. Puis par groupes, les élèves se mettent d'accord sur un pari par triangle.

Commentaires : La nécessité pour les élèves de se mettre d'accord doit les obliger à argumenter et donc à expliciter les conceptions qu'ils ont des angles. Ce qui doit en principe permettre à ceux qui se réfèrent à une conception erronée des angles (voir objectifs) de prendre conscience de son insuffisance et donc de l'abandonner.



TROISIÈME TEMPS

Le professeur recense les paris, puis demande aux élèves de les vérifier en mesurant les angles. Ce travail se fait individuellement. Le professeur rassemble ensuite, au tableau, les mesures obtenues pour le triangle (3) (c'est celui pour lequel nous pensons qu'il y aura le plus de divergence) à l'aide de la grille suivante :

A	B	C	Somme

A, B et C représentent les mesures des angles du triangle.

Le professeur invite alors les élèves à faire des remarques sur la conformité entre leurs paris et les mesures qu'ils ont obtenues sur le tableau précédent.

Commentaires : Ici doivent apparaître des divergences entre les mesures des angles (du même triangle) ce qui devrait être considéré comme anormal par les élèves. Ainsi seront mises en évidence les limites du rapporteur pour prouver.

QUATRIÈME TEMPS : LE DÉBAT

Arrivé à ce point, trois cas sont possibles :

1er cas

Tous les élèves pensent que la somme doit faire 180° : le professeur leur propose alors le problème suivant : "La somme des angles de *n'importe quel triangle*, est-elle égale à 180° ?". Il demande de plus aux élèves de produire une preuve pour convaincre les autres. Il peut à cette occasion rappeler les limites du rapporteur comme outil de preuve en faisant référence aux activités précédentes. La preuve est rédigée sur une affiche.

Commentaires : Ici l'incertitude nécessaire à la production de preuves résulte du fait que le résultat conjecturé doit s'appliquer pour *tous les triangles*. D'autre part, les activités précédentes ont dû montrer aux élèves que le rapporteur ne pouvait être un outil pour prouver. L'enjeu ici est simplement lié à la compétition qui s'instaure naturellement entre les groupes.

2ème cas

Majoritairement les élèves pensent que la somme des angles dépend du triangle : dans ce cas le professeur demande aux élèves de construire un triangle dont la somme des angles soit très différente de 180° . Une fois que les élèves ont constaté que ce n'était pas possible, le professeur leur propose le problème présenté dans le 1er cas.

Commentaires : Si les élèves pensent que la somme des angles dépend du triangle, aucune conjecture n'incitera les élèves à s'engager dans un débat de preuve. Il est donc nécessaire de les amener à penser que cette somme est indépendante du triangle, c'est pour cela que nous proposons cette activité.

3ème cas

Les avis sont partagés : le professeur demande alors aux uns de construire un triangle dont la somme des angles est très différente de 180° et aux autres de prouver leur conjecture, c'est à dire que la somme des angles, pour tous les triangles, est égale à 180° .

Dans les trois cas, le professeur propose ensuite un débat sur chacune des affiches produites. Il s'agit pour les élèves de se prononcer sur les points suivants : "*Nous sommes d'accord ou pas avec le résultat*" (dans le cas bien sûr où tous les élèves n'ont pas essayé de prouver que la somme des angles faisait 180°), "*Nous sommes d'accord ou pas avec l'explication parce que...*".

FIN DE L'ACTIVITÉ

S'il ne se dégage pas de preuve qui arrive à convaincre toute la classe, le professeur peut en proposer une, par exemple celle qui fait référence au fait que la somme des angles d'un triangle rectangle est égale à 180° , en s'appuyant sur le fait que la somme des angles d'un rectangle est 360° , ou celle qui utilise le tracé d'une droite parallèle à l'un des côtés du triangle.

Évidemment, si la classe accepte une preuve non satisfaisante du point de vue du professeur, à la fin du débat ce dernier montre les insuffisances de cette preuve, et propose les preuves précédentes.

RECHERCHE ET DÉBAT, ANALYSE A POSTERIORI

Nous allons reprendre ici les quatre temps présentés précédemment.

PREMIER TEMPS

Tracé individuel d'un triangle et mesure des angles

Comme nous l'avions prévu, ce temps ne pose aucun problème pour les élèves ; ils tracent un triangle, mesurent les angles et additionnent ces mesures. En moyenne, 80% des mesures trouvées se situent dans l'intervalle [175, 185]. On trouve toujours quelques mesures très excentrées par rapport à cet intervalle.

Dans certaines classes, les élèves connaissent le résultat de la somme des angles d'un triangle ; il a été étudié en 6ème ou même parfois en CM2. Cette connaissance est souvent "plaquée", dans la mesure où elle ne permet pas à l'élève de dépasser l'obstacle de la pseudo-proportionnalité de la grandeur de l'angle avec la longueur de ses côtés. Cette connaissance, acquise ou non par les élèves, joue un rôle fondamental dans le déroulement de cette activité. Aussi nous serons amenés à distinguer les classes où les élèves majoritairement connaissaient le résultat de la somme des angles d'un triangle, classes que nous appellerons A et les autres classes, que nous appellerons B.

Dans les classes A, au cours de ce premier temps, certains élèves s'arrangent pour trouver 180° , d'autres mesurent leurs angles jusqu'à ce qu'ils trouvent 180 ou 181° . Il est à noter que, pour beaucoup d'élèves, une marge d'erreur de 1° est tout à fait acceptable. Le recensement des résultats au tableau renforce la conviction de ceux qui "savent" que la somme fait 180° . La pression sociale est alors très forte sur ceux qui trouvent des résultats différents de 180° : l'énoncé de leurs résultats est souvent l'occasion de rires de la classe.

Dans les classes B, les élèves ne cherchent évidemment pas à rectifier leurs mesures, aussi la dispersion des résultats est plus importante. Il existe tout de même une concentration des mesures autour de 180° .

DEUXIÈME TEMPS

Travail individuel puis par groupes sur les triangles "pathologiques"

Les paris individuels

Dans toutes les classes, les élèves ont été surpris par les trois triangles proposés.

Des élèves, qui connaissent le résultat, marquent 180° sans hésitation pour les trois triangles. Certains d'entre eux hésitent pour le triangle 3 : leur pari pour ce triangle est souvent très inférieur à 180° . Ce qui atteste bien que, pour ces élèves, la connaissance de la somme des angles d'un triangle est une connaissance "plaquée", c'est-à-dire qu'elle coexiste avec une conception contradictoire sur les angles ou les triangles.

Pour les élèves qui ne connaissent pas le résultat, les mesures pariées pour le triangle 3 sont majoritairement très inférieures à 90° ; par contre, pour les deux autres triangles, ces mesures sont assez souvent proches de 180° . La stratégie utilisée par les élèves pour effectuer leur pari consiste généralement à donner pour chaque angle une mesure approximative.

En conclusion, nous pouvons dire que dans les classes B, les triangles "pathologiques" ont bien joué le rôle qu'on souhaitait leur faire jouer, à savoir amener les élèves à investir leur conception des angles. Par contre, ce n'est pas toujours le cas pour les classes A.

La confrontation des paris

Dans les groupes des classes A, "les partisans de 180° " arrivent à convaincre ceux (ou celui) qui pensent que la somme n'est pas égale à 180° . Les arguments avancés sont de trois types :

- Ceux qui s'appuient sur le cours de l'année précédente.
- Ceux qui s'appuient sur des mesures approximatives.
- Ceux qui font référence à la première activité, où les résultats étaient majoritairement proches de 180° .

Dans ces groupes, les élèves sceptiques arrivent rarement à expliciter leur conception. Ils se rangent à l'avis des autres, moins par conviction intime qu'à cause de la pression sociale qui s'exerce sur eux.

Dans les classes B, les élèves, pour se mettre d'accord, utilisent principalement deux méthodes :

- Soit ils font la moyenne de leurs paris.
- Soit ils reprennent pour chaque angle de chaque triangle les mesures qu'ils ont trouvées à vue d'œil et essaient de se mettre d'accord pour chaque mesure. C'est souvent l'occasion d'un débat qui tient plus du marchandage que du débat mathématique : "D'accord pour celui-là, tu as raison on va mettre 25° , mais pour celui-ci, on prend ma mesure ...".

Lorsque les élèves utilisent cette deuxième méthode, ils arrivent à expliciter leur conception des angles, alors que la première méthode permet de faire l'économie de cette explicitation.

Finalement, dans les deux cas (classes A, classes B), ce temps de mise en commun des paris n'a pas toujours permis aux élèves d'explicitation et de confronter leur conception des angles soit :

- * A cause de la connaissance qu'ils ont du résultat de la somme des angles d'un triangle.
- * A cause de la pression sociale accentuée par l'activité du 1er temps.
- * A cause du fait que les élèves recourent à des stratégies pragmatiques de confrontation des mesures.

Le fait qu'ils n'arrivent pas à expliciter leur conception les empêche évidemment de prendre conscience de son insuffisance. En ce sens, cette activité n'atteint pas toujours son objectif. Elle permet tout de même aux élèves, dans les classes A, de s'engager dans un débat de preuve pour savoir pourquoi la somme des angles fait 180° .

TROISIÈME TEMPS

Recensement des paris et mesure des angles

Pour les élèves des classes A, cette activité n'a été qu'une formalité : les uns trichent, les autres recommencent leurs mesures jusqu'à ce que la somme fasse 180° . Dans ces classes, cette activité a donc été détournée de son but, en effet pour ces élèves l'objectif n'était pas de vérifier leur pari mais plutôt de trouver 180° . Voici à ce propos deux réflexions d'élèves : *"Je mesure les angles, après je vérifie, si ça ne fait pas 180° , je recommence"* et *"ça sert de vérifier, ici je m'étais trompé, au lieu de 8° , je trouvais $7''$ ".* Dans ce cas, le poids des connaissances antérieures renforce l'idée qu'avec un rapporteur on peut arriver à effectuer des mesures exactes. Voici une réflexion illustrant ce propos : *"Il faut être vachement précis pour trouver 180° ".* Si la grande majorité des élèves trouve 180° , ils ne trouvent pas pour autant tous les mêmes mesures pour les angles des triangles. Les élèves ne sont pas étonnés par ces écarts : pour eux l'essentiel est de trouver 180° . Lorsque l'enseignant s'étonne de ces écarts, les élèves estiment alors qu'ils sont dus à la tricherie : *"Ils savent qu'un triangle ça fait 180° , s'ils trouvent 178° ils corrigent à $180''$ ".*

Dans les classes B, les élèves ne cherchent pas à trouver 180° . Il y a donc plus d'écarts entre les mesures. Les réactions des élèves sont alors très différentes : Deux explications sont avancées pour expliquer ces écarts :

- Il y a des erreurs de manipulation du rapporteur.
- On n'a pas tous le même rapporteur.

Dans les deux cas, le rapporteur comme instrument de mesure n'est pas vraiment remis en cause ; en effet, dans ces deux explications, est sous-entendu le fait que si les élèves avaient le même rapporteur ou (et) s'il n'y avait pas d'erreurs de manipulation, ils trouveraient le même résultat. Le fait que les rapporteurs, quelle que soit leur dimension, donnent les mêmes mesures n'est pas une évidence pour les élèves. Ceci est évidemment à

rapprocher de la "pseudo-proportionnalité" que nous avons décrite, à laquelle certains élèves se réfèrent implicitement.

Finalement, dans les classes B, à l'issue de ces trois activités, il y a souvent deux avis qui se dégagent : les uns pensent que la somme des angles fait à peu près 180° , et d'autres pensent que ça va dépendre des triangles.

En conclusion, nous pouvons dire que dans les deux cas cette vérification n'amène pas vraiment les élèves à remettre en cause les instruments de mesure, et ce tout particulièrement dans les classes A.

QUATRIÈME TEMPS

Le débat

Recherche d'un triangle dont la somme des angles est très différente de 180°

Dans les classes B, les professeurs ont tous proposé l'activité de recherche d'un triangle dont la somme des mesures des angles est très différente de 180° . Tous les élèves s'engagent avec beaucoup de motivation dans cette recherche et sont souvent sûrs de pouvoir arriver au résultat. On note différentes stratégies :

- Les uns construisent un triangle qui occupe presque la totalité de la feuille. Ils sont persuadés, avant de commencer à mesurer, que la somme des angles va largement dépasser 180° .
- D'autres élèves construisent un triangle en commençant par tracer un angle très proche de 180° .
- D'autres enfin se donnent des mesures d'angles au départ dont la somme est très différente de 180° et ils essaient de construire le triangle qui, évidemment, ne se "ferme pas". Certains lèvent alors la contradiction en construisant un quadrilatère!

Finalement, après cette activité qui motive beaucoup les élèves, ils concluent qu'il n'est pas possible de construire un triangle dont la somme est très différente de 180° . Un consensus s'établit alors pour dire que la somme des angles d'un triangle est toujours proche de 180° . Ici on se heurte à une difficulté que nous n'avions pas prévue dans l'analyse a priori : les élèves ne conjecturent pas que la somme est égale à 180° , mais est proche de 180° . Cette conjecture est naturellement renforcée par toutes les activités préalablement proposées aux élèves. Le professeur est alors obligé d'intervenir pour pousser les élèves à s'engager dans la recherche d'une preuve.

Dans les classes A, les élèves sont au contraire massivement convaincus que la somme des angles est égale à 180° . Le professeur est alors souvent obligé de se ranger du côté des sceptiques pour amener les élèves à douter et donc à s'engager dans un débat de preuve : convaincre les autres que la somme fait bien 180° pour tous les triangles. Le débat de validation peut aussi s'engager parce que les élèves ont envie de savoir pourquoi la somme fait 180° (cas très rare): il s'agit dans ce cas pour les élèves de prouver pour comprendre.

Conclusion : Dans les deux cas, le débat de preuve ne s'engage pas vraiment naturellement. C'est le professeur qui finalement incite les élèves à prouver. D'ailleurs, dans certaines classes, les élèves réagissent : "*Madame, c'est vous, qui allez nous l'expliquer, c'est vous le prof !*". En ce sens, le débat de validation n'est pas vraiment dévolu à la classe.

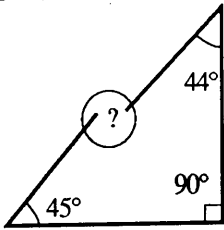
Les différents types de preuves

D'une manière générale, les élèves ont eu de la peine à produire des preuves, et ce d'autant plus que certains n'en avaient pas vraiment compris l'utilité. Cela est dû bien sûr au fait que cette phase a souvent été plus ou moins imposée par l'enseignant.

Il y a des preuves pragmatiques :

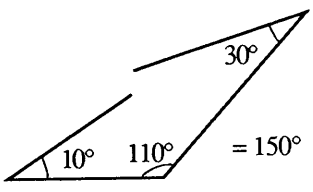
- Les élèves construisent plusieurs triangles, mesurent les angles et trouvent 180° .
- ...

Si on prenait un triangle de : 90° , 44° , 45° . On le construit et ça donne :



= 179°

Ça laisse un trou !

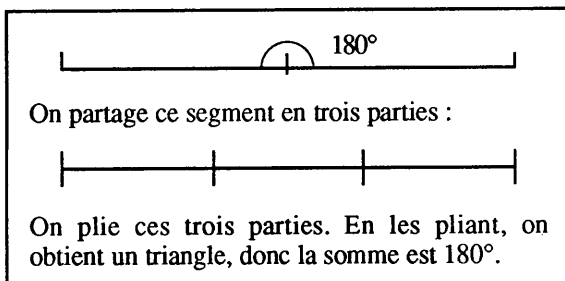


= 150°

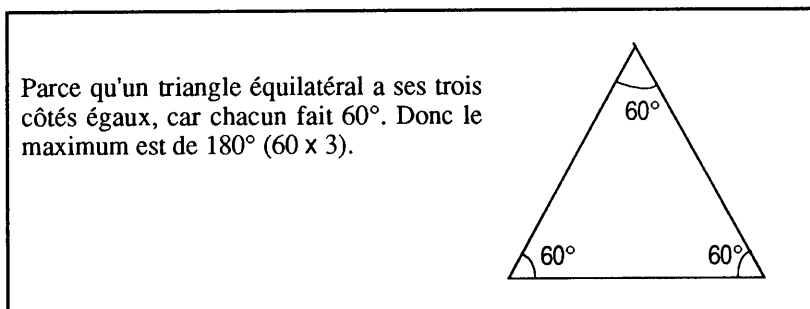
Ça laisse aussi un trou, donc il n'y a que 180° qui puisse donner un triangle sans trou !!

Il y a des preuves qui font référence à des expériences mentales.

En voici un exemple :



**Enfin il y a des preuves intellectuelles
qui font référence à des propriétés de géométrie.**



Il est à noter que, dans les classes B, les preuves pragmatiques sont beaucoup plus fréquentes. Cela est certainement dû en partie au fait que, dans ces classes, beaucoup d'élèves prouvent que la somme des angles est proche de 180° ; même certains prouvent que la somme des angles est comprise entre 170 et 190° en s'appuyant sur les tableaux de mise en commun des mesures de la somme des angles des triangles de l'activité 1.

Au cours du débat, il a été frappant de constater que les preuves intellectuelles sont généralement jugées convaincantes par une grande majorité de la classe même si elles s'avèrent fausses.

Le professeur est alors généralement obligé de reprendre les preuves produites et de donner son point de vue. Il insiste bien sûr sur les preuves fausses jugées vraies par les élèves ; c'est l'occasion d'amener les élèves à réfléchir sur les raisons qui les ont amenés à accepter une preuve fausse.

Dans beaucoup de classes, aucune preuve totalement convaincante n'a été produite. Le professeur propose alors la preuve du triangle rectangle et, après la leçon sur le parallélisme et les angles, il propose la démonstration utilisant la droite parallèle à l'un des côtés passant par un sommet opposé.

Suivant les classes, et suivant la nature du débat, le professeur a pu pointer la règle suivante : on ne peut prendre des exemples pour prouver la validité d'un énoncé général.

CONCLUSION

Le bilan de cette activité est très différent d'une classe à l'autre. C'est l'observation fine de ce qui s'est passé dans les groupes qui nous a amenés à constater que finalement elle présentait un certain nombre de limites que nous allons maintenant détailler.

Reprenons les objectifs que nous visions en proposant cette activité :

- Permettre aux élèves de remettre en cause la figure et le rapporteur comme outils de preuve.
- Permettre aux élèves de s'approprier le résultat de la somme des angles du triangle.
- Mettre en échec la conception de la "pseudo-proportionnalité" des angles.

En ce qui concerne la remise en cause du rapporteur comme outil de preuve, cet objectif n'est généralement pas atteint : dans les classes A, comme nous l'avons vu, la troisième phase a plutôt renforcé l'idée que cet outil peut permettre d'atteindre la précision que les élèves souhaitent. Dans les classes B, cet outil n'a pas été remis en cause en tant qu'outil de preuve dans la mesure où la conjecture trouvée consistait à dire que la somme des angles d'un triangle est proche de 180° .

Quant à l'appropriation du résultat de la somme des angles, elle est renforcée dans les classes A ; par contre, on ne peut pas dire que ce soit le cas dans les classes B dans la mesure où beaucoup d'élèves ont cherché à prouver que la somme des angles d'un triangle est proche de 180° .

En ce qui concerne la remise en cause de la conception de la pseudo-proportionnalité entre la grandeur de l'angle et la longueur du côté, nous avons constaté que le troisième temps de l'activité a pu jouer en partie ce rôle. En effet, dans un certain nombre de cas, les élèves arrivent à expliciter leur conception erronée, et les camarades de leur groupe réussissent à leur faire prendre conscience de son insuffisance. Mais, comme nous l'avons vu précédemment, cela ne se passe pas souvent ainsi et ce pour plusieurs raisons :

- À cause de la connaissance souvent "plaquée" du résultat de la somme des angles d'un triangle qui renforce la pression sociale dans les groupes.
- À cause de la mise en place des premières activités qui renforcent le consensus sur 180° , principalement dans les classes A.

Les limites de cette activité sont donc importantes mais il faut noter que ces limites n'apparaissent pas systématiquement dans toutes les classes. Ici se pose le problème de reproductibilité de cette situation. Rappelons que la reproductibilité de situations didactiques est liée entre autre au contrôle d'un certain nombre de variables (Arsac G., Mante M., *Le rôle du professeur*. Séminaire de didactique des mathématiques, 1988-89, Université J. Fourier, Grenoble). Or il y en a une ici qui joue un rôle décisif : c'est le pourcentage des élèves qui connaissent le résultat de la somme des angles d'un triangle. Cette connaissance souvent "plaquée" empêche les élèves d'expliciter leur conception des angles, les empêche de s'engager véritablement dans un débat de preuve et, d'autre part, elle renforce la pression sociale sur les élèves qui ne "savent pas". Cette variable ne peut être contrôlée par l'enseignant ce qui explique que, dans certaines classes, nous avons tout de même atteint les objectifs que nous visions alors que, dans d'autres classes, les activités proposées semblent aller à l'encontre de ces objectifs. Cette activité nous a ainsi permis de mettre en évidence l'intérêt d'une observation fine pour véritablement connaître les effets de situations que nous proposons à nos élèves. En effet, avant de mettre en place ces observations nous utilisons déjà cette activité que nous jugions alors "très intéressante"!

À cause des limites que nous venons de présenter, beaucoup d'entre nous n'utilisent plus cette activité dans leur classe.

Chapitre 4

D'autres énoncés : pour construire d'autres situations

Ces problèmes ont tous pour objectif la mise en évidence ou le réinvestissement des règles du débat mathématique et ont pour vocation de remplacer ou compléter les quatre premiers énoncés que nous avons étudiés à fond dans cette brochure. Le texte même de ces problèmes n'a pas été travaillé, il appartient à chaque utilisateur de l'adapter à la classe et aux objectifs visés. Nous avons cependant fait une rapide analyse des possibilités offertes par chacun, mais il ne s'agit dans chaque cas que d'une amorce du travail nécessaire. D'ailleurs nous n'avons mis en évidence que les particularités de chaque énoncé, en effet la plupart permettent en outre de revenir sur le fait qu'un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux ou que "la majorité n'a pas toujours raison" ... (cf. règle du débat mathématique, chapitre 1). Nous joignons à la fin un exemple d'analyse plus approfondie d'un problème réalisée par des collègues professeurs de collège à l'occasion d'une formation organisée par l'IREM de LYON.

- 1 Un nombre est toujours plus petit que son carré. Cette phrase est-elle vraie ou fausse ?**

Objectifs : mettre en évidence : l'insuffisance des exemples pour établir que la phrase est vraie et le rôle du contre-exemple pour établir que la phrase est fausse.

- 2** Quand on divise 7 par n'importe quel nombre non nul, on obtient un nombre inférieur ou égal à 7. Cette phrase est-elle vraie ? Est-elle fausse ?

Objectifs : Les mêmes que pour le problème 1 plus la mise en échec de la conception de la division très répandue chez les élèves et qui consiste à penser que le quotient est toujours plus petit que le dividende.

- 3** Tous les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 5. Est-ce vrai ? Est-ce faux ?

Objectif : Faire réinvestir la règle "pour débattre, on s'appuie sur des propriétés".

- 4** La somme de 2 nombres impairs consécutifs est toujours multiple de 4. Vrai ou faux ?

Objectif : Le même que pour le problème 3, en particulier l'introduction du calcul littéral comme outil de preuve.

- 5** La somme de 3 nombres consécutifs est toujours multiple de 3. Vrai ou faux ?

Objectif : Le même que pour le problème 4.

- 6** Choisis un nombre. Ajoute 5. Multiplie le résultat par 2. Retrancher au résultat deux fois le nombre que tu as choisi. Combien trouves-tu ? Que remarques-tu ? Est-ce toujours vrai ?

Objectif : Le même que pour le problème 4.

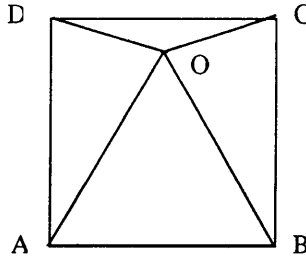
- 7** Quand je remplace n par n'importe quel nombre entier dans $n \times n - n + 41$ le résultat est-il toujours un nombre qui n'a que deux diviseurs ?

Objectifs : Les mêmes que pour $n \times n - n + 11$, mais ici il faut prévoir le cas où aucun élève ne trouve le contre-exemple.

- 8** Tous les nombres divisibles par 5 sont divisibles par 10. Est-ce vrai ?

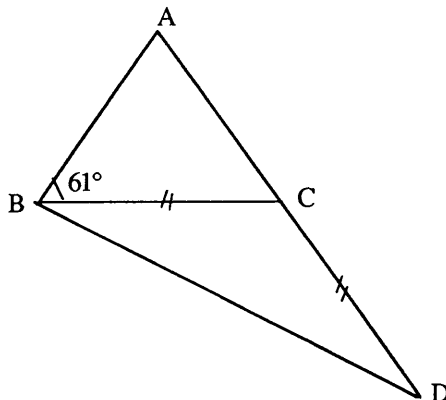
Objectifs : Réinvestissement de la règle du contre-exemple.

- 9 ABCD est un carré. OAB est un triangle équilatéral. X est la mesure de l'angle COD. Que vaut X ?



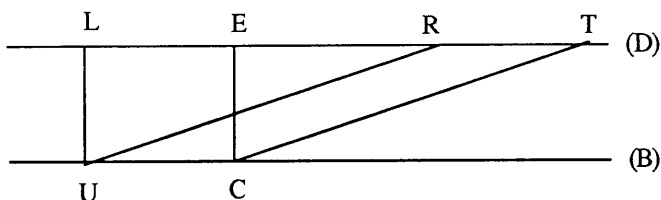
Objectifs : Mise en échec des mesures avec le rapporteur. Une difficulté apparaît cependant : les élèves arrondissent parfois spontanément leurs mesures (148° , 151° , ...) à la valeur véritable, 150° , ce qui n'amène ni à débattre ni à remettre en cause les mesures puisque qu'il peut y avoir accord sur le résultat. Nous pensons que ce problème serait plutôt le lieu d'un réinvestissement (après le problème sur le rectangle) ou alors qu'on pourrait modifier l'énoncé sous la forme suivante : "Paul (ou tel autre classe) a trouvé 149° , êtes vous d'accord avec lui (elle) ?" Le fait de ne pas imposer de mesures pour le carré initial risque de fournir une fausse issue aux contradictions: les élèves peuvent être amenés à penser que s'ils ne trouvent pas tous les mêmes mesures, c'est parce qu'ils n'ont pas tous la même figure.

- 10 Paul a construit un triangle isocèle ABC de sommet principal A et dont l'angle en B mesure 61° . Il a placé un point D sur la demi-droite [AC) tel que $CD = BC$. Il a joint B à D. IL dit que le triangle ABD est rectangle. Es-tu d'accord avec lui ? Justifie ta réponse ?



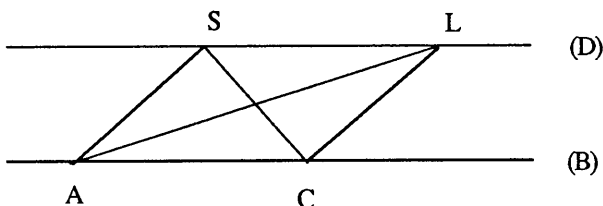
Objectif : Mise en échec de la visualisation et (ou) des mesures. Il faut envisager le cas où il y ait un consensus sur l'une ou l'autre des réponses avec des mesures. La valeur que l'on donne à l'angle en B du triangle ABC ($59^\circ, 61^\circ, 62^\circ, 63^\circ$) est fondamentale.

- 11 (D) est parallèle à (B). Lequel des deux parallélogrammes UCEL et TRUC a la plus grande aire ?



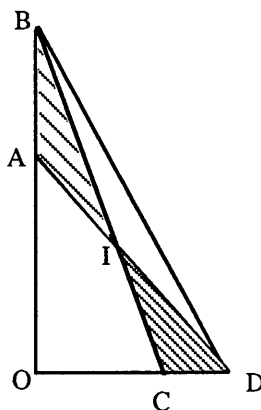
Objectif : Mise en échec de la visualisation et de la mesure.

- 12 (D) est parallèle à (AC). Lequel des deux triangles SAC et LAC a la plus grande aire ?



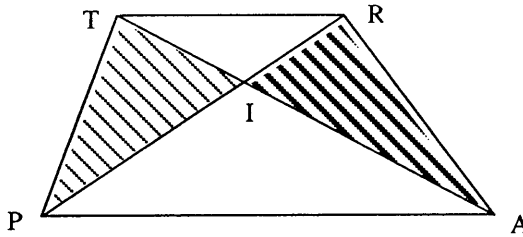
Objectif : Mise en échec de la visualisation sur la figure.

- 13 Trace un triangle BOD rectangle en O tel que $BO = 17,5$ cm et $DO = 10,5$ cm. Sur [OB] place le point A tel que $AB = 7,5$ cm. Sur [OD] place le point C tel que $CD = 4,5$ cm. Trace les segments [AD] et [BC]. Ils se coupent en I. Quel est celui des deux triangles hachurés qui a la plus grande aire ?



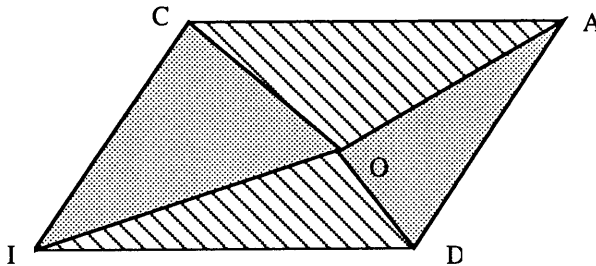
Objectif : Mise en échec des mesures.

- 14 **TRAP** est un trapèze de bases $[PA]$ et $[TR]$. Lequel des deux triangles **TIP** et **RIA** a la plus grande aire ?



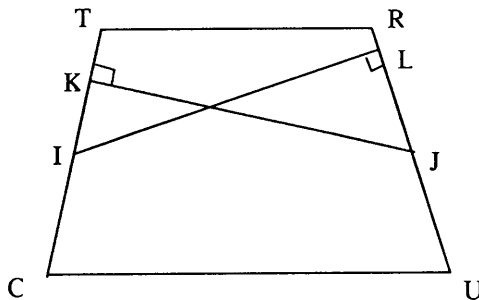
Objectif : Mise en échec de la visualisation et ou des mesures.

- 15 **CADI** est un parallélogramme, **O** un point intérieur à **CADI**. Laquelle des deux surfaces a la plus grande aire : la surface hachurée ou la surface pointée ?



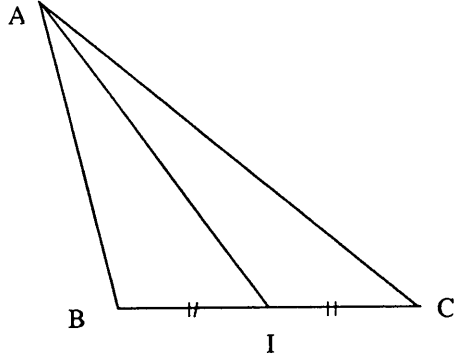
Objectif : Mise en échec de la visualisation sur le dessin et ou des mesures.

- 16 **TRUC** est un trapèze. **I** et **J** sont les milieux de $[TC]$ et $[RU]$. Lequel des produits $JK \times TC$ et $IL \times RU$ est le plus grand ?



Objectif : Le même que pour le n° 15. (plus difficile)

- 17 ABC est un triangle. I est le milieu de [BC]. Quel est, des triangles AIB ou AIC, celui qui a la plus grande aire ?

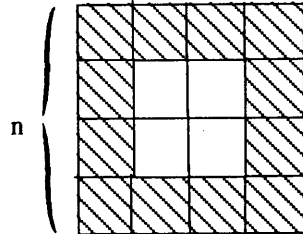


Objectif : Le même que le n°15.

- 18 Un triangle ABC est isocèle de sommet principal A. La base [BC] mesure 7 cm et la hauteur issue de A mesure 6 cm. Paul dit que ce triangle est équilatéral. Est-ce vrai ?

Objectif : Mise en échec des mesures sur la figure.

- 19 Un carré est partagé en $n \times n$ carreaux. On hachure les carreaux de la première et de la dernière ligne et ceux de la première et de la dernière colonne. Trouver une formule permettant de calculer le nombre de carreaux hachurés en fonction de n .



Objectif : Il s'agit d'amener les élèves à réinvestir la règle "quelques exemples ne suffisent pas à prouver qu'une affirmation est vraie". Les élèves vont trouver des formules différentes, ce qui conduit à des problèmes de validité de formules algébriques: a-t-on

$$n^2 - (n - 2)^2 = 4n - 4 ?$$

20 Quelques exemples d'énoncés : "SI ALORS....."

20-1) Quel que soit le nombre entier relatif que l'on choisit s'il est strictement inférieur à 25 alors il est strictement inférieur à 23.

20-2) Quels que soient les points A, B et C choisis, si $AC = CB$ alors C est le milieu de $[AB]$.

20-3) Quelles que soient les droites (D) et (D') choisies, si (D) est perpendiculaire à (D') alors (D) et (D') se coupent en un point.

20-4) Quel que soit le nombre décimal relatif choisi, si ce nombre est inférieur à 3 alors son carré est inférieur à 9.

20-5) Quels que soient les points A, B et I choisis, si A, I et B sont alignés alors I est un point de $[AB]$.

20-6) Quels que soient les nombres choisis, si la somme de 2 nombres est paire, alors ces 2 nombres sont pairs.

20-7) Quel que soit le quadrilatère choisi, si c'est un carré alors c'est un rectangle.

Objectifs : Travail sur les connecteurs : savoir distinguer les prémisses (les conditions qui suivent le "SI") de la conclusion (qui suit le "ALORS"). Distinguer une propriété de sa réciproque: pour les énoncés 20-1, 20-2, 20-3 et 20-5 on peut demander aux élèves d'étudier la réciproque (après le débat sur les arguments). Réinvestissement des règles du débat.

Un exemple détaillé d'analyse a priori

L'énoncé du problème proposé aux élèves est le n° 13 de la liste ci-dessus. La gestion de la classe est la même que celle décrite au début de ce livre. L'objectif visé est de montrer qu'une figure ne peut servir de preuve et qu'un raisonnement est nécessaire.

En travail individuel

Ce que les élèves vont faire.

- Une figure (juste ou fausse).
- Des calculs d'aires.
- Opinion non argumentée.
- Pas d'avis.

Ce que le professeur dit, ce qu'il fait.

- Il n'intervient pas en cours de travail, même si l'élève l'interpelle ou si la figure est fausse.

En travail de groupe

Ce que les élèves vont faire.

- Réponse commune sans calcul.
- Bonne réponse donnée par un élève.
- Une réponse se propage parmi les groupes.

Ce que le professeur dit, ce qu'il fait.

- Il circule parmi les groupes en notant les observations des élèves.
- Il prévoit un travail d'attente.
- Il note le nom de l'élève (discrètement) de façon à s'en servir si elle n'apparaît pas dans les affiches.
- Intervention : "la loi du plus fort n'est pas toujours la meilleurs". L'important est de convaincre les autres.

En travail de classe (débat)**Ce que les élèves vont faire.**

- Ils ont tous la même réponse fausse.
- Il y a deux lots d'affiches fausses.
- La bonne réponse est présente mais l'argumentation n'est pas convenable.

**Ce que le professeur dit,
ce qu'il fait.**

- On injecte une fausse affiche avec les mesures pour argument.
- On procède au débat, puis on présente "l'affiche solution".
- Il présente "l'affiche solution", on laisse un moment de réflexion individuelle, puis on demande quelle est la plus convaincante.

Réactions possibles des élèves

- Pourquoi, en mesurant, n'a-t-on jamais trouvé la bonne réponse ?
- Dans "l'affiche solution" on se sert bien des mesures !!!
- Il fait critiquer la figure, la qualité de la construction et des mesures.
- Ce sont celles de l'énoncé.

Ou bien un élève pensera que la dernière affiche est la plus convaincante et saura convaincre les autres en terminant le raisonnement ou bien le professeur interviendra.

Chapitre 5

Le questionnaire

Les conceptions initiales des élèves Le vrai et le faux

1 Les objectifs

Avant la mise en place des activités dans différentes classes de cinquième, nous avons proposé aux élèves un questionnaire pour essayer de cerner leurs difficultés à propos du raisonnement déductif. Le dispositif concerne quatre classes de cinquième au Collège Jean Vilar de Villeurbanne, une classe de cinquième au Collège Honoré de Balzac à Vénissieux, une classe de seconde au Lycée Récamier à Lyon.

Les objectifs visés étaient les suivants :

Nous voulions faire apparaître chez les élèves :

- Leur conception du vrai et du faux en mathématiques.
- Le type de preuve qui leur semble le plus convaincant (pragmatique, intellectuel).
- Leur réaction face au contre-exemple.
- La différence qu'ils font entre une propriété et sa réciproque.

2 Le dispositif expérimental mis en place

Nous avons proposé aux élèves une suite d'exercices qu'ils devaient chercher individuellement. Ces élèves n'avaient vécu aucune des situations décrites dans ce livre.

Cette expérience durait une heure et se découpait en trois temps :

⇒ *Dans un premier temps* (environ 15 minutes), nous avons proposé aux élèves les exercices 1-1 et 2-1 suivants :

Exercice 1-1

Quels que soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est supérieur ou égal à chacun des deux nombres.
Que penses-tu de cette phrase ?

Exercice 2-1

Quel que soit le nombre strictement positif que je choisis, si je le multiplie par 2 le résultat est plus grand que ce nombre.
Que penses-tu de cette phrase ?

Puis sans ramasser leur réponse, nous leur avons proposé les exercices 1-2 et 2-2 :

Exercice 1-2

On demande à Pierre et à Paul de dire si cette phrase est vraie :

"Quels que soient les deux nombres strictement positifs que je choisis, leur produit est supérieur ou égal à chacun des deux nombres".

Pierre répond : "Cette phrase est vraie" car :

Si je prends 3 et 2, le produit est 6 et $6 > 3$ et $6 > 2$.

Si je prends 1,3 et 5, le produit est 6,5 et $6,5 > 1,3$ et $6,5 > 5$.

Si je prends 4,8 et 150, le produit est 720, il est plus grand que 4,8 et 150.

Si je prends 11,2 et 4, le produit est 44,8, il est plus grand que 3,4 et 6.

Tu vois, le produit est toujours plus grand que les nombres que j'ai choisis au départ, donc la phrase est vraie.

Paul répond : "Cette phrase est fausse" car :
Si je prends 4 et 0,3, le produit est égal à 1,2 et $1,2 < 4$.

Coche la case correspondant à ta réponse :

Pierre a raison et Paul a tort :

☐

Paul a raison et Pierre a tort :

☐

Ni Paul ni Pierre n'ont raison :

☐

Pierre et Paul ont raison tous les deux :

☐

Explique ta réponse.

Exercice 2-2

On demande à Valérie et à Sonia de dire si cette phrase est vraie :

"Quel que soit le nombre strictement positif que je choisis, si je le multiplie par 2 le résultat est plus grand que ce nombre".

Valérie répond : "C'est vrai" car :

$2 \times 5 = 10$	et	$10 > 5$
$2 \times 9 = 18$	et	$18 > 9$
$2 \times 0,3 = 0,6$	et	$0,6 > 0,3$
$2 \times 0,92 = 1,84$	et	$1,84 > 0,92$

Sonia répond : "C'est vrai, car je prends un nombre quelconque strictement positif, je l'appelle n , je le multiplie par 2, ça fait $n + n$. Puisque j'ajoute n à n le résultat est forcément plus grand que n .

Parmi ces deux réponses, laquelle te semble la plus convaincante ?
Pourquoi ?

Nous avons alors ramassé les réponses des élèves à ces quatre exercices.

➡ Dans un deuxième temps, nous avons proposé aux élèves l'exercice 3-1 suivant :

Exercice 3-1

Quel que soit le carré ABCD, le triangle ABC est isocèle.
Que penses-tu de cette phrase ?

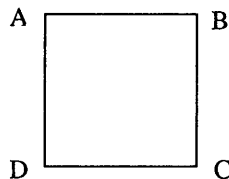
puis l'exercice 3-2 :

Exercice 3-2

On demande à Marc et à Bernadette de dire si la phrase suivante est vraie, et d'expliquer leur réponse :

"Quel que soit le carré ABCD, le triangle ABC est isocèle".

Marc répond : "c'est vrai, car j'ai tracé un carré et j'ai mesuré les côtés [AB] et [BC], j'ai trouvé $AB = BC = 2$ cm, ils sont alors égaux, donc le triangle ABC est isocèle.



Carré tracé par Marc :

Bernadette : "C'est vrai, car dans un carré les quatre côtés sont égaux, ABCD est un carré, donc les côtés AB et BC sont égaux, donc ABC est un triangle isocèle".

Parmi ces deux réponses laquelle te paraît la plus convaincante ? Pourquoi ?

Avant de passer au troisième temps, nous avons ramassé les réponses des élèves concernant ces deux exercices.

➡ Troisième temps, nous avons proposé aux élèves les exercices 4 et 5.

Exercice 4

Quel que soit le nombre entier choisi, si c'est un nombre pair alors il se termine par 2.

Que penses-tu de cette phrase ? Explique ta réponse.

Exercice 5

Quel que soit le nombre entier choisi, s'il se termine par 2, alors c'est un nombre pair.

a) Cette deuxième phrase veut-elle dire la même chose que la phrase de l'exercice 4. Explique ta réponse.

b) Que penses-tu de cette phrase ? Explique ta réponse.

3 Justification du choix des exercices

Les exercices 1-1, 2-1 et 3-1 servent essentiellement à familiariser les élèves avec l'énoncé qui est repris dans 2-1, 2-2 et 3-2 ; ils nous permettent aussi d'analyser les réponses et les justifications données spontanément.

Les questions 1-2, 2-2 et 3-2 correspondent aux trois premiers objectifs cités au début de ce chapitre :

Question 1-2 : La possibilité de choix de réponse "Pierre et Paul ont raison tous les deux" permet de tester la conception mathématique du vrai et du faux en mathématiques qu'ont les élèves. Par ailleurs la présence d'un contre-exemple, opposé à des exemples, permet d'examiner le statut du contre-exemple pour les élèves.

Questions 2-2 et 3-2 : Les réponses proposées sont ici les mêmes, seules les explications sont différentes alors qu'en 1-2 des explications différentes conduisaient à des réponses contradictoires.. Il s'agit donc de déterminer quel type de preuve est plus convaincant pour les élèves.

Questions 4 et 5 : Elles correspondent au dernier objectif cité au début de ce chapitre. Les élèves font-ils une différence entre une propriété et sa réciproque, et comprennent-ils l'expression "si ... alors" ?

4 Analyse des réponses

4.1 Remarques méthodologiques

Nous avons eu beaucoup de difficultés pour interpréter les résultats, pour les raisons suivantes :

- Des élèves ont mal compris la question "*Qu'en penses-tu ?*" et nous avons eu des réponses sur la forme : "*la phrase est claire, bien écrite ...*", ou sur

le sens : "*ça ne veut rien dire ...*", "*ça veut dire que ...*". Il est possible de reformuler cette question pour éviter cet écueil. La question 1-1 par exemple peut être posée de la façon suivante : "*Quels que soient les deux nombres positifs que tu choisis, leur produit est-il toujours supérieur ou égal à chacun des deux nombres ?*".

- Des textes d'élèves sont parfois difficiles à comprendre donc à analyser.
- On ressent une lassitude de la part des élèves à la fin de l'heure et les questions 4 et 5 sont souvent mal traitées.

Ces obstacles peuvent se surmonter assez facilement, il n'en est pas de même des deux suivants :

- Quand on demande aux élèves de choisir parmi plusieurs explications celle qui est la plus convaincante, ce ne sont pas seulement leurs représentations des règles du débat et de la logique qui sont en jeu, les règles du contrat didactique interviennent aussi ; ils cherchent à deviner ce que le professeur attend. La réponse de Sonia à la question 2-2 semble être préférée à celle de Valérie pour son "allure" plus mathématique.
- Enfin, pour l'élève, il y a peut-être souvent confusion entre explication convaincante et explication dont le contenu est exact même s'il n'a pas de lien avec l'objet à valider. Par exemple (exercice 1-2).
 - "*Pierre a raison : ce que Pierre a écrit est juste*".
 - "*Pierre et Paul ont raison tous les deux parce qu'ils ont bien expliqué tous les deux*".

En effet, les calculs de Pierre sont bien exacts, mais ils ne justifient pas sa réponse, et certains élèves ne font pas le lien entre la question posée et le contenu de la justification.

4.2 Les résultats

Compte tenu des remarques précédentes, ces résultats sont à prendre avec prudence.

Conclusion 1 :

A la question 1-2 : 41 % des élèves pensent que Pierre et Paul ont raison. Nous avons également posé cette même question en seconde en ne donnant le choix qu'entre les deux réponses : "*Pierre a raison*" ou "*Paul a raison*" et malgré cela, 27 % des élèves ont répondu que Pierre et Paul avaient raison tous les deux. Il semble donc que pour une part importante d'élèves, même en seconde, une phrase mathématique peut être à la fois vraie et fausse.

Conclusion 2 :

Pour les questions 2-2 et 3-2, respectivement 66 % et 59 % des élèves de cinquième choisissent la bonne réponse, c'est-à-dire une démonstration plutôt qu'une série d'exemples dans l'exercice numérique, et une démonstration plutôt qu'une justification à partir d'un dessin, en géométrie. En revanche, dans la question 1-2, seulement 18 % des élèves sont convaincus par le contre-exemple. Cela laisse penser que la règle du "contre-exemple n'est pas du tout naturelle pour les élèves. Attention tout de même : des études mettent en évidence que des élèves peuvent accepter qu'un contre-exemple suffise pour invalider une conjecture liée à un concept donné et ne pas l'accepter pour une conjecture liée à un autre concept (R. Mulet-Marquin, 1982). Ce résultat est à rapprocher de recherches qui montrent que la réussite à des épreuves de logique sont intimement liées avec les concepts en jeu dans ces épreuves (Ginotto, 1989).

Conclusion 3 :

59 % des élèves de cinquième qui ont répondu clairement à la question 5-a pensent que les deux phrases sont les mêmes. La majorité d'entre eux font donc la confusion entre donnée et conclusion, condition et conséquence¹.

Pour essayer de tester l'évolution des réactions face au raisonnement déductif, suite à la série de situations que nous avons mise en place, le même questionnaire a été proposé aux élèves en fin d'année ; mais cette année là, une seule classe avait vécu toutes les situations. Ces élèves étant seulement 20, nous n'avons pu faire que quelques constatations, qu'il serait imprudent de généraliser :

Exercice 1 : Quatre élèves répondent que la phrase est fausse en donnant un contre-exemple alors que deux seulement l'avaient fait en début d'année.

Exercice 3 : Parmi les dix élèves qui avaient donné une mauvaise réponse au premier test à 3-1, six ont donné une réponse satisfaisante au deuxième test.

¹ À noter que si nous avons présenté dans ce livre des activités pour aider les élèves à s'approprier le rôle des exemples et contre-exemples dans la validité de conjectures, nous ne décrivons ici aucune activité pour l'aider à distinguer "donnée" et "conclusions".

5 Conclusion

Le travail présenté ci-dessus doit être considéré comme une pré-expérimentation plutôt que comme une véritable expérimentation. Plus que les résultats obtenus, nous pensons qu'il faut en retenir les difficultés qu'il y a à cerner les conceptions des élèves concernant le vrai et le faux en mathématiques en utilisant des épreuves où ils doivent choisir, parmi plusieurs explications d'une conjecture, celle qui leur paraît la plus convaincante. Dans ce type d'épreuve, la confusion entre "explication convaincante" et "explication mathématiquement correcte" (du point de vue de l'élève, c'est-à-dire sans faute de calcul, utilisant un langage et des connaissances consacrés par l'usage de la classe) rend difficile l'exploitation des résultats.

Plus profondément, ce type de test d'une connaissance, ici la connaissance de la logique, présuppose évidemment l'existence de cette connaissance. Mais, pourrait-on dire de façon un peu provocante, cette connaissance n'existe peut-être pas... Nous traduisons ainsi la très forte dépendance par rapport au contexte des performances que l'observateur considère comme des performances logiques. Ce résultat, connu pour des contextes non mathématiques (Giroto, loc cit), semble rester vrai pour les élèves de cinquième et même de seconde, même si l'on se limite, comme nous l'avons fait, à des questions mathématiques. C'est pour cela que nous n'avons pas insisté dans cette direction de travail. Nous avons préféré juger la réussite de nos situations au fait que les élèves, au cours de débats ultérieurs sur d'autres problèmes, étaient capables d'utiliser ces situations particulières comme des situations de référence témoignant d'un certain type de difficultés et d'un certain type de solutions à ces difficultés.

Bibliographie

- GIROTO V., 1989, Logique mentale, obstacles dans le raisonnement naturel et schémas pragmatiques, in *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, N. Bednarz et C. Garnier éd., Editions Agence d'ARC, Ottawa.
- MULET MARQUIS R., 1988, *Une phrase peut être vraie ou fausse ?* Mémoire de DEA de didactique des sciences, Université Lyon I.

DEUXIÈME PARTIE

QUELQUES RÉFLEXIONS
THÉORIQUES

Chapitre 6

Typologie des preuves produites par les élèves

Des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles

L'objectif de ce chapitre est d'essayer de situer les différentes preuves¹ produites par les élèves, dans les situations de validation décrites précédemment, par rapport à la typologie de Nicolas Balacheff (1987). Pour cela, nous allons tout d'abord préciser les caractéristiques de cette typologie qui a été établie principalement à partir des preuves produites par des binômes d'élèves (les élèves n'étant donc pas en classe) devant le problème suivant : "Donner un moyen qui permette, dès que l'on connaît le nombre des sommets d'un polygone, de calculer le nombre de ses diagonales".

Comme nous l'avions précisé dans le chapitre 3 de la première partie, N. Balacheff distingue deux grandes catégories de preuves :

- Les preuves pragmatiques, liées à l'action.
- Les preuves intellectuelles qui supposent un détachement de l'action.

Parmi les preuves pragmatiques, N. Balacheff distingue trois niveaux :

- L'empirisme naïf.
- L'expérience cruciale.
- L'exemple générique.

¹ La notion de preuve est précisé dans le chapitre 1.

Parmi les preuves intellectuelles, il distingue :

- * L'expérience mentale.
- * Le calcul sur les énoncés.
- * La démonstration.

Nous allons reprendre chacun de ces types de preuves, les caractériser et donner des exemples pris, sauf un, parmi les preuves produites par les élèves dans les situations précédemment décrites.

1 Les preuves pragmatiques

1.1 L'empirisme naïf

Il consiste à prouver la validité d'un énoncé à partir de sa vérification sur quelques exemples. N. Balacheff précise : *"Nous rattachons à ce type les démarches marquées par l'absence d'indices d'un processus de validation. Les conjectures sont tirées de l'examen de peu de cas, le problème de validité n'est pas abordé. En revanche, les élèves montrent dans les faits ou par leurs propos leur confiance en ces assertions"*. (Balacheff, p. 103).

Nous avons bien sûr trouvé de nombreuses preuves de ce niveau :

Par exemple, pour le problème $n \times n - n + 11$, au cours de la phase individuelle, plus de 80 % des élèves sont convaincus que le nombre est toujours premier après avoir effectué 1, 2 ou 3 essais. Rares sont ceux qui font des essais systématiques. Mais sur 10 messages produits, 2 seulement avancent des exemples comme preuve. En effet, dans les groupes, une preuve s'appuyant sur des exemples est souvent jugée insuffisante pour être communiquée aux autres. Par exemple, dans un groupe, au cours de la recherche individuelle, tous les élèves ont conclu que le résultat est toujours un nombre qui a deux diviseurs après avoir fait au maximum trois essais. Ils mettent en commun leurs résultats et prennent conscience qu'ils arrivent à la même conclusion ; un élève réagit : *"Il faut trouver une explication, on ne va pas mettre sur la fiche : parce que j'ai fait un exemple, j'ai trouvé un nombre qui a 2 diviseurs !"*. Les élèves perçoivent des enjeux différents, suivant qu'il faut qu'ils se convainquent eux-même ou qu'ils convainquent d'autres.

Mais, nous avons constaté que, pour les élèves, le mot exemple pouvait avoir au moins deux sens différents : exemple pour convaincre mais aussi exemple pour illustrer, faire comprendre. Voici un extrait d'un débat dans la

classe concernant le problème $n \times n - n + 11$ (l'affiche qui est débattue est l'affiche A du compte rendu du problème $n \times n - n + 11$, cf. chapitre 3, 1). Rappelons que les auteurs de l'affiche affirmaient que le résultat n'avait toujours que deux diviseurs car : *"c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = un nombre premier"*¹. Suivent ensuite deux exemples, l'un avec 5, l'autre avec 8. Au moment de la présentation des arguments, un groupe d'élèves conteste ce résultat : *"Nous ne sommes pas d'accord car si on remplace n par 11, 121 a trois diviseurs"*. Puis le débat s'engage.

Paul, un des auteurs de l'argument précédent, précise : *"Nous ne sommes pas convaincus car il n'y a que deux exemples, rien ne prouve qu'avec les autres nombres cette théorie marche"*.

Ici le terme exemple est pris dans le sens "exemple pour convaincre".

Martine qui est l'un des auteurs du message contre-attaque : *"Il faut qu'il prouve qu'il y a d'autres... Il a dit pour 11, il faut qu'il en donne d'autres. Il faut qu'il en trouve d'autres à part celui-ci [..] Il faut qu'il en trouve d'autres exemples pour ce qu'il a dit, parce qu'on n'est pas obligé de mettre une tonne d'exemples, deux c'est suffisant pour... expliquer"*.

Ici le terme exemple est pris dans son sens : "exemple pour comprendre". Le débat continue :

[...]

Géraldine : *"Moi aussi je suis d'accord avec ce groupe, il ne faut pas mettre non plus trop d'exemples... d'explications"*.

Paul : *"Deux exemples c'est pas très convaincant quand même deux exemples [...] il peut y avoir des nombres avec lesquels ça ne marche pas"*.

On voit nettement dans ce débat que le terme exemple est pris dans deux sens totalement différents. Mais nous-mêmes, professeurs de mathématiques, nous utilisons aussi le mot exemple dans ces deux sens. Il nous arrive ainsi souvent d'illustrer un théorème, une définition, par un exemple. Tout ceci permet d'attirer l'attention sur le fait que l'existence d'exemples qui figurent dans une explication n'est pas à lui seul un indice suffisant pour la classer dans la catégorie "empirisme naïf". Ce qui est important c'est le rôle que jouent ces exemples dans l'explication des élèves : ils peuvent n'être utilisés que pour illustrer leurs propos, et non pour convaincre les autres de la validité du résultat trouvé.

¹ Nous reprenons ici le texte des élèves.

Pour le problème du carré d'un nombre pair (ou d'un nombre impair) deux affiches sur dix relèvent de la catégorie de l'empirisme naïf. Ici encore, au cours du temps de travail individuel, les élèves semblent convaincus que le résultat est toujours pair en s'appuyant uniquement sur quelques exemples.

En ce qui concerne les problèmes de géométrie, nous considérons que les preuves qui s'appuient sur des constatations ou des mesures faites sur un dessin font partie du type empirisme naïf. En effet, ces preuves sont intimement liées à l'action (observer ou mesurer), et d'autre part la généralité n'est pas prise en compte.

Pour le problème du triangle, nous constatons que pratiquement tous les élèves commencent par réaliser un dessin pour répondre à la question de l'existence du triangle 5, 9, 4, ce qui est tout à fait normal compte-tenu de l'énoncé et de l'expérience des élèves : ils ont appris à tracer un triangle connaissant la longueur des trois côtés. Ce que nous constatons, c'est que beaucoup d'élèves (plus de 50 %) n'arrivent pas à se détacher du dessin par la suite malgré la présence de réponses différentes dans les groupes. Il en est de même pour le problème du rectangle. Notons tout de même que dans ces deux activités, "le problème de la généralité" n'est pas posé, en ce sens que, par exemple, pour l'activité du rectangle, on ne pose pas le problème de savoir si la propriété est vraie pour tous les rectangles au contraire de la plupart des problèmes de géométrie proposés aux élèves au collège et au lycée¹.

Pour le problème de la somme des angles d'un triangle, nous trouvons souvent des preuves de niveau empirisme naïf. En voici un exemple :

Pour prouver que la somme des angles d'un triangle quelconque, nous prenons comme exemple un triangle équilatéral :

$$60 \times 3 = 180^\circ \text{ c'est-à-dire } 60 + 60 + 60 = 180$$

Conclusion : n'importe quel triangle a comme somme 180° . J'espère que vous nous avez compris.

Les preuves de niveau empirisme naïf sont donc nombreuses mais elles ne caractérisent pas pour autant un élève. En effet, suivant le contexte, entre

¹ Mais lorsque nous proposons par exemple le problème suivant : "ABCD est un parallélogramme, CDEF est un parallélogramme, démontrer que (AB) est parallèle à (EF)", le caractère de généralité n'apparaît pas dans l'énoncé. Les élèves sont-ils conscients de cette généralité ?

autres suivant la ou les personne(s) qu'il faut convaincre, l'élève mobilisera une preuve de niveau empirisme naïf ou une preuve d'un autre niveau¹.

D'autre part, rappelons que N. Balacheff caractérise les preuves d'empirisme naïf par le fait que "*le problème de la validité n'est pas abordé*" par les élèves. Dans les situations que nous avons étudiées ce problème est toujours pris en compte, ce qui est normal puisque la situation l'exige. Nous avons donc classé toutes les preuves qui s'appuient sur des exemples ou des mesures dans la catégorie empirisme naïf.

1.2 Expérience cruciale

L'expérience cruciale désigne un processus "*qui consiste à vérifier une proposition sur un cas pour lequel on ne se fait pas de cadeau en affirmant que si cela marche alors cela marchera toujours. [...] Ce type de validation se distingue de l'empirisme naïf en ce que l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible*". (N. Balacheff, 1987). Dans nos expérimentations, nous avons rencontré quelques cas de ce type, essentiellement au cours des débats internes.

Voici un exemple d'expérience cruciale pour le problème de $n \times n - n + 11$. Le débat se situe à l'intérieur du groupe, les élèves de ce groupe ont tous répondu oui à la question et s'interrogent sur l'explication à fournir. Un élève propose alors : "*Essayons avec 1 000*" mais finalement cette tentative ne sera pas prise en compte par les autres, et l'élève lui-même ne l'expérimentera pas. D'autre part, au cours de la phase individuelle, les élèves réalisent des essais correspondant à des très grands nombres. Par exemple, pour le problème des nombres pairs, un élève essaie 2, 4, 16, 898, 778 et 1 004. On peut supposer que les derniers exemples correspondent à des expériences cruciales.

En ce qui concerne le problème du triangle 5, 9, 4 et le problème du rectangle d'Euclide, nous n'avons pas rencontré de preuves de ce type ; ce qui semble normal puisque ces problèmes ne posent pas la question de la généralisation du résultat à trouver.

Pour le problème de la somme des angles, les triangles pathologiques proposés aux élèves les ont souvent amenés à conjecturer que la somme des angles d'un triangle était de 180° . Ces triangles ont peut-être joué pour eux le rôle de l'expérience cruciale.

¹ Voir à ce propos la métaphore de Poppers, 1972, p. 89-90.

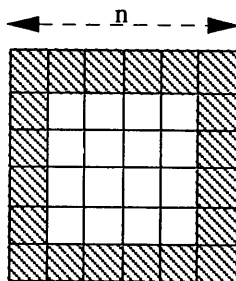
Finalement, nous avons rencontré assez peu de preuves de ce type et surtout nous n'en avons jamais rencontré au niveau des affiches. Comme pour les preuves d'empirisme naïf, il semble que les élèves, dans leur grande majorité, ne les trouvaient pas suffisantes pour convaincre les autres, même s'ils les ont parfois utilisées pour se convaincre eux-mêmes.

Nous avons aussi constaté qu'entre l'empirisme naïf et l'expérience cruciale il y a d'autres types de preuves où la généralité est prise en compte et où elle est gérée en réalisant une sorte de partition de l'ensemble des possibles et en prenant un ou deux exemples dans chacun des sous-ensembles de cette partition. Par exemple pour le carré d'un nombre pair un élève fait des essais avec un exemple pris dans chaque centaine. Ainsi il essaie avec 4, 112, 228, 376 avant de conclure..

1.3 Exemple générique

"L'exemple générique consiste en l'explication des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent, non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe". (N. Balacheff, loc. cit.).

Voici un exemple concernant le problème suivant : détermine en fonction de n le nombre de carreaux hachurés (figure ci-contre).



Des élèves, pour prouver que le nombre de carreaux traversés est $4n - 4$, s'appuient sur un carré de côté 6 x 6 qu'ils tracent, ils hachurent deux lignes et deux colonnes de six carreaux, et ils précisent qu'ils ont ainsi hachuré $4 \times 6 = 24$ carreaux mais que quatre carreaux ont été hachurés deux fois d'où la formule $4 \times 6 - 4$. Ils conjecturent que le résultat est $4n - 4$ et le prouvent en affirmant que ce raisonnement peut se faire avec n'importe quel carré.

Nous avons rencontré quelques cas que l'on peut assimiler à des exemples génériques : en voici un exemple pour le problème du carré d'un nombre pair : "Si on remplace n par un nombre pair et qu'on le multiplie par lui-même cela donnera toujours un nombre pair car si on multiplie $28 \times 28 = 784$ le dernier chiffre est 4 : $8 \times 8 = 64$. Donc quand on multiplie

un nombre pair par lui-même on trouvera toujours un nombre pair"" .
 Suivent alors les exemples suivants : 0, 2, 4, 8, 10, 12, 22, 30, 284. Ces arguments font-ils référence à un exemple, à une expérience générique ou sont-ils, tout simplement, des indices d'une preuve de type empirisme naïf ? Il est bien difficile de trancher sans avoir des informations précises sur la façon dont les élèves sont arrivés à cette production (c'est-à-dire dans ce cas sans disposer d'un observateur des travaux de groupe).

Voici un autre exemple qui concerne le carré d'un nombre impair :

NON on peut prévoir qu'un chiffre impair multiplié par lui-même donne un chiffre impair car en multipliant le chiffre de la fin du nombre impair : exemple :

$$\begin{array}{c}
 223 \times 223 = 49729 \\
 \uparrow \quad \quad \uparrow \\
 \quad \quad \times \quad \quad \\
 \quad \quad \quad = 9
 \end{array}$$

Comme on peut le constater sur ces deux messages, il n'est pas toujours facile de savoir si l'exemple proposé est vraiment générique.

Pour les trois problèmes de géométrie, nous n'avons pas repéré de preuves de ce type. D'ailleurs qu'est-ce que pourrait-être une preuve de ce niveau pour un problème de géométrie ?

2 Preuves intellectuelles

2.1 L'expérience mentale

"L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par le temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices dans la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en œuvre ce qui était le cas pour l'exemple générique". (Balacheff, p. 58).

Voici un exemple d'expérience mentale concernant le problème des carreaux hachurés (Voir § 1.3 ci-dessus) : un élève, pour prouver que le nombre de carreaux hachurés est égal à $4n - 4$, explique : "il faut hachurer deux lignes

et deux colonnes de n carreaux, ce qui fait $4n$ carreaux, mais les quatre carreaux du sommet sont hachurés deux fois, le résultat est donc $4n - 4$ ".

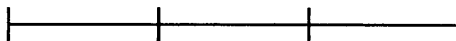
Les preuves de ce niveau sont assez peu nombreuses. En voici tout de même quelques exemples :

En ce qui concerne le problème de la somme des angles d'un triangle, un groupe pour prouver que la somme est de 180° , explique : *"Un triangle rectangle a pour somme des angles 180° . Or si on déforme un triangle rectangle un angle diminue et les autres augmentent, donc la somme reste constante égale à 180° ".*

Toujours pour ce problème, voici un autre exemple :



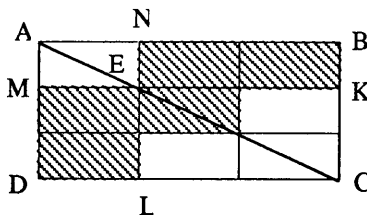
On partage ce segment en trois parties :



On plie ces trois parties. En les pliant, on obtient un triangle, donc la somme est 180° .

En ce qui concerne le problème du rectangle voici un exemple :

"Il sont tous les deux égaux, car si on partage le rectangle EMDL, puis si on le met à côté de l'autre moitié, les deux rectangles ENBK et EMDL seront les mêmes rectangles (donc les aires de deux rectangles sont égales) ".



Ici il y a bien une expérience mentale : le "transfert de la moitié du rectangle", mais en même temps une lecture erronée, du dessin, lorsque les élèves affirment que ce "seront les mêmes rectangles". Cet exemple nous permet de constater qu'il est parfois difficile de classer certaines preuves dans la mesure où elles contiennent des éléments de différentes catégories.

Nous n'avons pas trouvé de preuves s'appuyant sur une expérience mentale dans le cas de problèmes numériques. D'ailleurs est-il possible de produire ce type de preuve pour des problèmes qui ne font pas référence, à un moment ou à un autre, à une construction géométrique ?

2.2 Calcul sur les énoncés

"Dans notre étude, pour désigner les preuves des élèves qui iraient au delà de l'expérience mentale, mais que nous ne pourrions reconnaître véritablement comme des démonstrations, nous parlerons de calcul sur les énoncés". "Nous retenons ici des preuves qui ne doivent rien à l'expérience. Ce sont des constructions intellectuelles fondées sur des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées, des notions en jeu dans la résolution de problème. Ces preuves apparaissent comme le résultat de calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites." (Balacheff, loc. cit.)

En somme dans ce type de preuve, les élèves ne font appel ni à des exemples, ni à des constats sur la figure, ni à des expériences mentales, ils effectuent un raisonnement ("*calcul*") à partir de propriétés ("*énoncés*") pas toujours très explicites et surtout pas toujours vraies. Ces preuves ne sont pas des démonstrations, soit parce que le raisonnement est faux, soit parce que les propriétés utilisées sont fausses.

C'est certainement le type de preuves que nous avons rencontré le plus souvent et ce, tant au niveau des problèmes numériques que des problèmes géométriques. En voici des exemples :

Pour le problème $n \times n - n + 11$: *"Le résultat n'a toujours que 2 diviseurs car c'est tout le temps un nombre premier (donc impair), car le premier résultat (qui est $n \times n - n$) est égal à un nombre pair donc celui-ci + 11 = nombre premier (impair).*

1er résultat = un nombre pair parce que $n \times n - n$ égale n multiplié par son premier nombre inférieur :

$$\text{ex : } 5 \times 5 - 5 + 11 = 20 + 11 = 31$$

$$5 \times 4$$

$$\text{ex : } 8 \times 8 - 8 + 11 = 56 + 11 = 67 "$$

$$8 \times 7$$

On peut ici reconstituer le calcul sur les énoncés effectué par les élèves de la manière suivante :

- dans un premier temps, ils s'appuient sur la propriété : " $n \times n - n$ est toujours un nombre pair ". Ils justifient cette propriété dans la dernière partie de leur explication en utilisant simultanément deux autres propriétés (vraies) : " $n \times n - n$ est égal au produit de deux entiers consécutifs " et "le produit de deux entiers consécutifs est pair ".
- dans un deuxième temps, ils utilisent la propriété : "si on ajoute 11 à un nombre pair on obtient un nombre premier (impair)". Ici, il semble que les élèves confondent nombre impair et nombre premier.

Voici un exemple concernant le problème de la somme des angles d'un triangle : "*La somme des angles d'un triangle est égale à 180° parce qu'un triangle équilatéral a ses trois côtés égaux car chacun fait 60° donc le maximum est de $180^\circ (60 \times 3)$.*"

Ici les élèves utilisent successivement trois propriétés :

- Un triangle équilatéral a trois angles égaux à 60° .
- Le maximum de la somme des angles d'un triangle est obtenu pour un triangle équilatéral. C'est donc 180° .
- La somme des angles d'un triangle est toujours égale à ce maximum.

Voici un autre exemple concernant le problème de la somme des angles d'un triangle : "*Un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle. Or la somme des angles d'un rectangle est de 360° donc la somme des angles d'un triangle rectangle est de $360 : 2 = 180^\circ$.*"

On pourrait citer beaucoup d'autres exemples qui s'appuient sur des propriétés plus ou moins explicitées par les élèves mais qui ne font pas véritablement référence ni à des expériences mentales ni à des exemples.

3 Des constatations

Pour chaque catégorie mise en évidence par N. Balacheff, nous avons trouvé des exemples de preuves correspondant. Cette étude nous amène donc à faire certaines constatations :

3.1 Fréquence d'apparition des différents types de preuves

Les preuves de type empirisme naïf et calcul sur les énoncés sont celles qui apparaissent le plus fréquemment

Les chances d'obtenir des preuves d'un niveau donné sont directement fonction du problème. Par exemple, il semble difficile (voire impossible) d'obtenir des preuves de type "expérience mentale" à partir d'un problème dans lequel n'interviennent pas des configurations géométriques. Dans des problèmes d'existence comme celui du "triangle aplati" il ne semble pas possible de trouver des preuves de type expérience cruciale.

3.2 Difficulté pour classer certaines preuves

Il est difficile, à partir d'un texte, de classer certaines preuves sans avoir des informations sur la façon dont les élèves sont arrivés à les produire. C'est tout particulièrement vrai quand il faut faire la distinction entre empirisme naïf et exemple générique (cf. 1.3). Mais c'est aussi le cas lorsqu'une explication relève de plusieurs niveaux de preuves différents. (cf. 2.1).

Enfin certaines preuves ne semblent pas relever de la typologie de N. Balacheff. En voici un exemple : il s'agit d'une preuve souvent produite par les élèves pour prouver que $n \times n - n + 11$ est toujours un nombre premier :

"On trouvera toujours un nombre qui a deux diviseurs car 11 est un nombre premier et donnera toujours comme résultat un nombre se divisant seulement par lui-même et par 1 .

Exemples :

- Avec 11 : $15 \times 15 - 15 + 11 = 221$ nombre premier.
- Avec 12 : $15 \times 15 - 15 + 12 = 222$ nombre qui n'est pas premier.
- Nombres 1 ; 222 ; 2 ; 3 ; 6 ; 37... "

La première partie de cette preuve utilise un calcul sur les énoncés qui s'appuie sur une pseudo-théorème qui n'est pas explicité ici mais qu'on pourrait formuler ainsi : *"Si on ajoute un nombre premier à un nombre on obtient un nombre premier"*. Pour prouver ce "théorème", les élèves s'appuient sur un type de raisonnement très utilisé dans les sciences expérimentales qui consiste à rechercher les variables dont dépend un phénomène, en faisant varier les différents paramètres. Ce type de raisonnement n'est pas pris en compte dans la typologie des preuves de N. Balacheff. Mais il semble qu'ici il soit le produit du contrat qui s'est instauré entre les élèves et le professeur : en effet après quelques essais les élèves sont convaincus de la validité du résultat, ils cherchent alors à produire une explication (c'est une des règles explicites du contrat didactique). Ils se lancent alors dans la recherche des "causes" de ce résultat et non de sa validité.

3.3 Un élève n'est pas caractérisé par un niveau de preuve

Comme le remarque N. Balacheff, le type de preuves ne caractérise pas un élève.

D'une part, le type de preuves produit dépend intimement de la lecture que l'élève fait de la situation dans laquelle il est et de la personne qu'il veut convaincre. Ainsi l'empirisme naïf est très souvent utilisé par les élèves pour se convaincre d'un résultat, alors que pour convaincre les autres ils ne font pas appel à ce type de preuves. D'autre part, nous avons souvent constaté qu'un même élève produisait des preuves de nature différente suivant les concepts en jeu dans le problème. Voici un exemple :

Le cas Barthélemy ("bon" élève de 5ème) : Pour le problème du carré d'un nombre impair, Barthélemy est convaincu que le résultat est juste et avance pour cela une preuve d'empirisme naïf. Il s'est lancé dans des essais systématiques jusqu'à 101 et il conclut : *"On a essayé jusqu'à 101, on n'a jamais réussi, ça c'est une explication."* Ses camarades contestent cette explication : *"Non, ce n'est pas une explication."*

B : *"Si c'est une explication, c'est une preuve, on a 101 preuves, c'est bon."*

Et il rédige l'explication suivante : *"Non car j'ai essayé jusqu'à 101 x 101 et je trouve toujours un nombre impair"*. C'est donc manifestement une preuve de type empirisme naïf.

Quelque temps plus tard, ce même élève est confronté au problème du triangle aplati. Pendant la phase de recherche individuelle, alors que ses camarades font tous des essais, lui ne fait rien, et au moment où les élèves confrontent leurs différents résultats et que l'un d'entre eux dit : *"Je trouve qu'il y en a un, même que je l'ai fait"*, il répond : *"C'est pas précis, pas assez précis."* Quelques instants après, il reprend : *"Ben regardez, déjà $5 + 4 = 9$ donc normalement ça devrait faire le même segment, c'est inutile de faire un dessin."* Dans ce problème-là, ce même élève en est visiblement au stade de la preuve intellectuelle. On constate donc sur cet exemple qu'un même élève peut produire en arithmétique une preuve de type empirisme naïf et même rejeter des preuves intellectuelles, et par contre en géométrie produire une preuve intellectuelle.

Il n'y a donc pas un fonctionnement logique des élèves indépendamment des concepts en jeu dans la situation. Nous retrouvons ici les résultats de diverses recherches : celles de B. Dumont (1982), V. Giroto (1989) par exemple.

Enfin l'exemple précédent nous montre aussi que, pour arriver aux preuves intellectuelles, l'élève n'est pas forcément obligé de franchir tous les niveaux précédents.

4 Conclusion

Cette analyse nous a permis de constater que, dans la résolution par les élèves des problèmes que nous avons expérimentés, il a été possible de trouver des preuves pour chaque niveau de la typologie de N. Balacheff, mais qu'il était parfois difficile (voir impossible) de classer certaines preuves, soit parce qu'elles contiennent des éléments appartenant à plusieurs niveaux de preuves, soit parce qu'elles ne correspondent à aucun des types décrits précédemment. Souvent aussi parce qu'elles sont produites pour répondre à l'attente du professeur.

Nous avons d'autre part constaté que, comme l'avait souligné N. Balacheff, un niveau de preuve ne caractérise pas un élève et ce, pour plusieurs raisons :

- Le type de preuves dépend de la lecture que l'élève fait de la situation dans laquelle il est, et entre autres de l'enjeu qu'il perçoit dans la situation de validation.
- Le type de preuves dépend du niveau de conceptualisation auquel est parvenu l'élève par rapport aux notions en jeu dans le problème.
- Il y a enfin une corrélation étroite entre le type de preuves produites par les élèves et la nature du problème proposé : comme nous l'avons vu, certains problèmes peuvent difficilement donner lieu à des expériences mentales, tandis que d'autres peuvent difficilement inciter l'élève à produire des preuves du type expérience cruciale.

Bibliographie

- BALACHEFF N., 1987, *Processus de preuve et situations de validation*. Educational Studies, vol. 18, n° 2.
- DUMONT B., 1982, *L'influence du "décor" et du langage dans des épreuves de type logique portant apparemment sur l'implication*. Educational Studies in Mathematics - Vol 13 - n°4.
- GIROTTI V., 1989, "Logique mentale, obstacles dans le raisonnement naturel et schémas pragmatiques" in *Construction des savoirs* sous la direction de N. Bednarz et C. Garnier. Ed. Agence d'ARC, Ottawa.
- POPPER K.R., 1972, *La Connaissance objective*. Ed. complexe. Bruxelles. 2e éd. 1978.

Chapitre 7

Histoire de la démonstration¹

Les origines et le rôle de la figure

Il est bien sûr toujours un peu conventionnel de fixer une date précise à l'apparition d'une technique aussi complexe et difficile à définir que la démonstration tout comme, par exemple, il est difficile de dater l'origine de la physique. Dans ce qui suit, nous nous contenterons de reprendre, en la justifiant partiellement, la position la plus usuelle : la démonstration naît en Grèce au 5^{ème} siècle avant J.-C.. Ceci ne signifie pas qu'il n'y ait pas eu dans les mathématiques antérieures des preuves ou justifications isolées ou des vérifications comme on en trouve par exemple dans les mathématiques égyptiennes.

Mais ce qui caractérise la mathématique grecque, c'est l'emploi systématique de la démonstration qui apparaît simultanément avec les énoncés généraux et l'axiomatisation. Les axiomes n'ont certes pas chez les Grecs l'interprétation formelle qu'ils ont dans les mathématiques contemporaines puisqu'ils concernent des objets de pensée qui ont d'après Platon une existence objective (le dessin d'un cercle évoque le cercle parfait, objet de pensée qui existe réellement) leur apparition n'en change pas moins le statut des objets de la mathématique qui se trouvent ainsi dégagés de la seule perception sensible (cf. Thuillier, 1985). Ainsi apparaît une triple révolution dans la manière de concevoir les mathématiques, dont on peut considérer qu'elle marque d'ailleurs la naissance des mathématiques en tant que domaine délimité de la pensée avec ses règles de fonctionnement propres. Cette révolution est pleinement accomplie avec les éléments d'Euclide, mais

¹ Ce texte est abrégé à partir de Arsac (1987).

la forme stéréotypée caractéristique des démonstrations grecques est déjà bien fixée, donc ancienne, chez Autolykos, antérieur à Euclide.

Venons-en maintenant à l'explication de cette transformation que nous identifions comme la naissance de la démonstration. J'ai été amené à cette étude par deux événements :

- une affirmation d'un épistémologue contemporain, saisie au hasard d'une causerie, suivant laquelle on savait maintenant que l'apparition de la démonstration en Grèce est consécutive à celle de la démocratie : l'habitude d'argumenter, de débattre, se serait transférée du domaine politique aux mathématiques. Cette explication à base de démocratie, position partagée chez les historiens de la pensée (sur les liens entre géométrie et politique, cf par exemple Vernant 1962), avait soulevé mon enthousiasme : en somme, en enseignant les mathématiques, j'enseignais la démocratie !
- l'observation de ce que nous appelons à l'IREM de Lyon, la phase de débat dans la "pratique du problème ouvert" (Arsac et al., 1988) lorsque, après un premier temps de recherche de solutions à un problème, les élèves débattent de leurs résultats et qu'il s'agit de trancher entre ce qui est "vrai" et ce qui est "faux", on voit apparaître des débats passionnés : je croyais (un peu naïvement) voir apparaître là la démonstration et la démocratie !

Plus tard, la recherche en didactique m'a amené à me poser autrement le problème des origines de la démonstration : l'une des hypothèses de départ en didactique des mathématiques est en effet la suivante : tout, en mathématiques, provient de la résolution de problèmes, c'est pour résoudre les problèmes que se sont forgés les concepts et les méthodes, et l'enchaînement des problèmes successifs explique l'évolution des mathématiques. Ainsi, l'apparition de la démonstration était peut-être liée à la volonté de résoudre certains problèmes mathématiques spécifiques, plus ou autant qu'à l'influence de la démocratie.

Voyons maintenant les arguments en faveur de ces deux thèses :

- d'une part, il y a effectivement coïncidence historique (sur une durée d'un siècle environ !) entre la naissance de la "géométrie" (c'est-à-dire des mathématiques telles que nous les avons caractérisées) de la "philosophie" et de la démocratie...
- d'autre part, il y a aussi coïncidence historique entre l'apparition de la démonstration et la résolution du problème de l'irrationalité, à savoir une

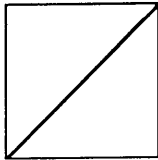
double découverte : d'une part, 2 n'a pas de racine carrée rationnelle, d'autre part la diagonale du carré est incommensurable avec le côté.

Laissons nous aller au penchant naturel des mathématiciens, qui pensent en général leur science comme autonome par rapport à la société, en privilégiant d'abord ce deuxième point de vue, et en examinant quels types de problèmes les propriétés rappelées ci-dessus ont pu poser à la pensée grecque et pourquoi leur solution a pu nécessiter l'introduction de méthodes démonstratives. Pour cela, rappelons d'abord rapidement une hypothèse fondamentale de la pensée pythagoricienne, qui dominait les mathématiques de cette époque: tout dans la nature s'exprime par des rapports (logos) de nombres entiers.

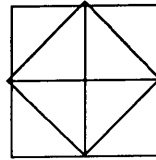
Considérons maintenant la figure formée par le carré de côté 1 et sa diagonale. A priori, son examen ne mène nullement à la découverte de l'irrationalité, bien au contraire, comme le constate Aristote, on conclut plutôt que l'on peut mesurer la diagonale en prenant comme unité le côté : rien ne semble pratiquement s'y opposer et c'est bien conforme à la pensée pythagoricienne.

Cependant, le théorème de Pythagore montre que si d est la longueur de la diagonale, $d^2 = 2$. Un raisonnement classique montre alors que si d était de la forme p/q , où la fraction p/q est supposée réduite, le nombre q devrait être à la fois pair et impair (on a en effet $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair donc p est pair, ainsi q doit être impair puisque la fraction est irréductible, mais $p=2p'$ d'où $q^2=2p'^2$ et q est pair). On démontre ainsi par l'absurde les deux résultats cités plus haut : 2 n'a pas de racine carrée rationnelle et la diagonale est incommensurable avec le côté.

Comme cette propriété d'incommensurabilité ne peut, on l'a vu, se constater sur la figure, elle ne peut concerner que des segments idéaux représentés par (ou sur) la figure (la situation n'est pas la même dans le dialogue de Platon intitulé Ménon où l'on voit Socrate, en s'appuyant sur une figure, convaincre un esclave du fait que pour doubler la surface d'un carré, il faut construire un carré ayant pour côté la diagonale du premier : ici, le constat sur la figure suffit).



le carré et sa diagonale



la figure du Ménon

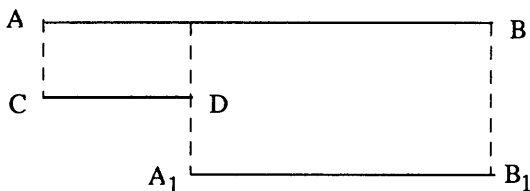
Ainsi, le simple énoncé de la propriété d'irrationalité suppose un changement du statut des objets de la géométrie, problème auquel leur définition axiomatique au sens grec donne une solution.

Mais ce constat fait surgir une question : d'où peut sortir l'idée qu'il peut exister des segments incommensurables et comment peut-on même songer à définir l'incommensurabilité puisque l'hypothèse (implicite) que deux segments sont toujours commensurables est toujours présente ? Nous avons vu qu'elle est explicite chez les Pythagoriciens, elle est a fortiori présente (implicitement) dans toutes les mathématiques non helléniques. Comment le problème de l'irrationalité peut-il alors être posé ?

Comment le problème a-t-il pu se poser ?

La réponse la plus couramment admise fait appel au procédé "d'anthyphérèse", c'est-à-dire à la forme géométrique de l'algorithme d'Euclide, que l'on pourrait appeler algorithme des "soustractions successives" et que nous exposons maintenant.

Étant donné un couple initial de deux segments AB et CD avec $CD \leq AB$, "on remplace AB par $AB - CD$ " c'est-à-dire que l'on considère un nouveau couple (A_1B_1, C_1D_1) où $A_1B_1 = AB - CD$ et $C_1D_1 = CD$ si $CD \leq AB - CD$, et $A_1B_1 = CD$, $C_1D_1 = AB - CD$, sinon.

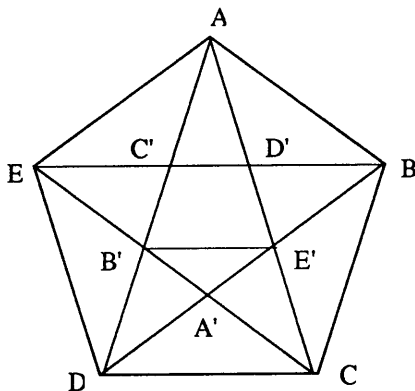


On recommence et, si les deux segments initiaux étaient commensurables, on aboutit en un nombre fini d'opérations à (A_kB_k, C_kD_k) et A_kB_k est alors le plus grand segment contenu un nombre entier de fois à la fois dans AB et CD . Dans ce cas, on en déduit facilement, "en remontant les opérations" le rapport des deux segments initiaux. Si AB et CD étaient

incommensurables, le procédé est infini. Mais, là aussi, il convient de bien distinguer la théorie et la pratique: appliqué en tant que procédé graphique, le procédé converge toujours très rapidement (nous vous invitons à le faire). Si on l'applique en particulier à deux segments dont l'un est le diamètre d'un cercle et l'autre a pour longueur la circonférence du même cercle, on trouve très vite que π est rationnel et égal à $22/7$! Les segments idéaux correspondants donneraient une anthyphérèse infinie, mais ceci ne peut pas se constater sur le dessin !

Pour les Pythagoriciens, puisque tout s'exprime par des rapports (logos) d'entiers, le processus est toujours fini. Or il existe en géométrie des cas où l'on tombe "naturellement", c'est-à-dire sans l'avoir présupposé, sur une anthyphérèse infinie et par une ironie du sort, ce cas se présente même dans l'étude de la figure emblématique des Pythagoriciens : le pentagramme (pentagone régulier étoilé, c'est-à-dire étoile à cinq branches).

Avec les notations de la figure ci-dessous, l'anthyphérèse appliquée au couple (AD, AE) conduit à le remplacer par le couple (B'E', B'A') en passant par un seul intermédiaire (B'E, EA') et les connaissances mathématiques attribuées à l'époque sont suffisantes pour parcourir les deux étapes. Ainsi on est ramené au même problème pour le pentagone régulier A'B'C'D'E', donc le processus est indéfini, sauf à supposer un minimum absolu parmi les longueurs, ce qui est exclu par la connaissance du fait que tout segment a un milieu.



Cependant cette situation conduit plutôt à une énigme : que signifie le fait que deux segments n'aient pas de rapport ? Ce fait est évidemment contraire à l'intuition et introduit une contradiction au sein de la géométrie. Expliquons nous sur ce dernier point : le problème ainsi rencontré ne sera réellement résolu que quand on saura définir dans tous les cas le rapport de

deux longueurs et classer ces rapports en rationnels et irrationnels, ce qui sera fait par Eudoxe longtemps après la découverte du problème de l'incommensurabilité (Eudoxe définit en fait l'égalité de deux rapports : le rapport AB/CD est égal au rapport EF/GH si, toutes les fois que deux nombres entiers a et b sont tels que $a \times AB$ soit supérieur, inférieur, ou égal à $b \times CD$, on a les mêmes relations entre $a \times EF$ et $b \times GH$, définition qui rappelle la définition des réels par les coupures de Dedekind)

On peut penser que, après le pentagramme, le procédé d'anthyphérèse a été appliqué au carré où son caractère infini, quoique moins "naturel" apparaît assez facilement. Dans ce cas, la situation peut être éclairée comme on l'a vu plus haut par un "changement de cadre" : le phénomène géométrique est relié à l'inexistence d'une racine carrée rationnelle pour le nombre 2 et ce problème se traite entièrement dans le cadre de la théorie arithmétique de la parité qui peut apparaître comme un terrain plus solide que la géométrie qui vient précisément d'être ébranlée. Notons toutefois que ce changement de cadre ne fait a priori que renforcer la contradiction, il ne la résout pas immédiatement.

Comment la contradiction a-t-elle été levée ?

Nous venons de voir comment a pu apparaître le problème de l'incommensurabilité. Reste à imaginer comment le changement de statut des objets de la géométrie, nécessaire pour la solution que nous avons exposée, a pu se produire. Peut-on trouver une origine à cette idée ?

Afin d'éviter de penser que seule la solution mathématique que nous connaissons était possible, indiquons d'autres solutions envisagées à l'époque par certains sophistes grecs.

- On pouvait s'en tenir à la réalité de la figure, refuser fermement d'envisager une figure idéale. Protagoras maintient par exemple, "contre les géomètres" que, conformément à ce qu'on peut constater sur le dessin, la tangente à un cercle a plus d'un point commun avec celui-ci. On remarquera que les élèves de sixième ont souvent le même point de vue : le cercle et sa tangente "se touchent" sur toute une longueur. Pour Protagoras, le monde est réellement contradictoire, il faut accepter d'y rencontrer des contradictions sans se réfugier dans un monde idéal.

- On pouvait s'en tenir à la possibilité de résoudre effectivement les problèmes concrets : ce serait plutôt la position d'Hippias, un autre sophiste, ou d'Antiphon. Ainsi, la possibilité de construire un carré, et de donner une mesure approchée pratiquement suffisante de sa diagonale devraient suffire. De même, pour calculer la longueur d'un cercle, Antiphon n'hésite pas à le confondre avec un polygone régulier quand ce dernier a un nombre suffisamment grand de côtés. Graphiquement, cette approximation est effectivement acceptable et de telles solutions pratiques sont actuellement encore utilisées dans certains corps de métier.

Notons que ces solutions sont fortement reliées aux positions philosophiques de leurs auteurs : l'opposition des sophistes au maniement d'objets idéaux est liée à leurs différends avec Platon. Il y a chez les sophistes le refus de la recherche d'une vérité absolue, qui leur semble d'essence religieuse, au profit d'une vérité relative qui s'accorde mieux avec la démocratie. Il y a aussi, sur un autre plan, le refus, commun aux sophistes et aux Pythagoriciens, de remettre en doute le témoignage des sens.

Opposée à celle des sophistes, une autre position philosophique, en partie commune aux Eléates (Parménide, Zénon) et à Platon peut ouvrir la voie à la solution du problème qui fut finalement celle des mathématiciens. En voici les principaux éléments :

- le monde des apparences, celui que nous percevons par les sens, ne peut faire l'objet que d'une connaissance contradictoire, une opinion (la doxa);
- il est possible de connaître un monde idéal, des "formes" de Platon. Dans ce monde des idées, ou des objets idéaux que l'on atteint par la pensée, le principe de non-contradiction, du tiers exclu, s'applique sans restriction alors qu'il ne s'applique qu'en première approximation au monde usuel (il pleut ou il ne pleut pas mais la situation peut être ambiguë s'il pleut très peu, s'il "tombe quelques gouttes");
- dans ce monde des objets idéaux, on peut donc raisonner par l'absurde : si une affirmation implique des conséquences contradictoires, c'est l'affirmation opposée qui est exacte.

Ce raisonnement par l'absurde est employé systématiquement par Socrate dans les dialogues de Platon, comme par exemple le Théétète, qui aborde par ailleurs le problème de l'irrationalité. C'est ce qu'on appelle la "dialectique", ignorée par les Pythagoriciens, mais inventée par Zénon, aux dires d'Aristote. La dialectique est une technique de débat qui consiste à poser soigneusement au départ la définition des concepts (objets de pensée) dont on

va discuter de façon à ce qu'ils soient non contradictoires et qu'on puisse ensuite raisonner par l'absurde. Cette démarche est évidemment parallèle à celle de l'axiomatisation. Un exemple en est le célèbre paradoxe d'Achille et de la tortue : Achille dit Zénon, poursuit une tortue, il est évidemment plus rapide qu'elle, mais pour la rattraper, il faut d'abord qu'il arrive au point où se trouvait la tortue au départ de la poursuite. Pendant ce temps là, la tortue a avancé, Achille doit à nouveau arriver au point où se trouve maintenant la tortue, mais de nouveau pendant ce temps là la tortue avance, le même processus se répète à l'infini, donc, dit Zénon, Achille ne rattrapera jamais la tortue. Ce raisonnement a pour but de prouver par l'absurde le caractère contradictoire de philosophies, sans doute d'origine pythagoricienne qui, contrairement aux Eléates, admettaient que l'on peut penser le mouvement et plus largement le changement. Il ne faut donc pas comprendre le raisonnement de Zénon comme visant à nier la réalité du mouvement, mais comme visant à renvoyer la connaissance du mouvement à la "doxa" contradictoire, qui concerne les objets sensibles, dont nous avons parlé plus haut. Probablement aussi, la conception pythagoricienne du continu géométrique était-elle également visée.

Dans ces conditions, il est naturel de penser que la contradiction constatée sur la figure à l'occasion de la rencontre du problème de l'incommensurabilité pourra être levée à condition de passer à des objets de pensée correctement définis. Pour les Eléates du reste, c'est la raison qui doit l'emporter sur le témoignage des sens, en cas de conflit entre les deux.

D'un programme à sa réalisation

Nous venons de définir ci-dessus un programme de dépassement des contradictions liées au problème de l'irrationalité. Bien entendu, il est douteux que les Grecs se soient jamais fixé un tel programme, qui n'est qu'une reconstruction synthétique a posteriori de ce qui a pu se passer.

Nous n'avons pas quitté la démonstration en ce sens qu'elle nous est apparue, et d'abord à travers le raisonnement par l'absurde, comme le seul procédé de manipulation de ces objets idéaux que sont devenus les êtres géométriques. Nous supposons donc que la transformation des mathématiques implique la démonstration sans pouvoir malheureusement exhiber des démonstrations "primitives". Du point de vue documents, les débuts sont perdus...Il semble cependant que la démonstration classique

d'inexistence d'une racine carrée rationnelle de 2 soit très ancienne. De toutes façons, la solution définitive du problème de l'incommensurabilité, c'est-à-dire la théorie des rapports d'Eudoxe, qui se trouve au livre V d'Euclide, date semble-t-il, de -330, alors que la reconnaissance de l'incommensurabilité date de -430 (chronologie de Knorr, 1975, the evolution of the euclidean elements, Reidel, Dordrecht) et cette définition de l'égalité de deux rapports ne se prête absolument pas à un traitement intuitif, donc ne peut être opératoire que dans le cadre d'une mathématique démonstrative.

Terminons en évoquant quelques étapes probables (attestées par des documents historiques) sur la voie de la résolution du problème de l'incommensurabilité :

1) On contourne le problème : Les premiers tâtonnements ont laissé des traces, par exemple chez Platon, où la diagonale du carré de côté 5, donc de longueur $\sqrt{50}$ en notation moderne, est dite "inexprimable" ou "indémonstrable". Cependant, dans les débuts, on s'est sans doute affronté d'abord essentiellement au problème de la diagonale du carré et il reste des traces d'une période où l'on a cru pouvoir contourner la difficulté en raisonnant sur les aires des carrés construits sur les segments. De cette phase témoignent apparemment les fragments conservés de l'oeuvre d'Hippocrate de Chio, le quadrateur des lunules, et le fait qu'Euclide, après avoir choisi un segment unité, définit (au livre X) les segments rationnels comme étant ceux qui sont commensurables avec lui ou dont l'aire du carré construit sur eux est rationnelle. On a sans doute pu penser à une époque sauver ainsi l'hypothèse panarithmétique du Pythagorisme.

2) Une étape suivante (ou contemporaine) a consisté à définir l'égalité de deux rapports de segments par "l'identité de leurs anthyphèreses" (c'est-à-dire par le fait que le planning des soustractions successives est le même).

3) L'étape de la résolution par Eudoxe.

Conclusions

Il importe en premier lieu de se souvenir que ce qui précède concerne l'apparition de la démonstration, non son histoire ultérieure, qui montre des évolutions, voire des infidélités, par rapport à la conception grecque, spécialement quand, au moins momentanément, la conception grecque de la rigueur apparaît comme un obstacle à la découverte.

Du point de vue didactique, trois points semblent intéressants :

- Le passage au stade démonstratif semble bien avoir été provoqué par l'affrontement à un problème (c'est ce besoin de résoudre un problème qui donne du "sens" à la démonstration) et non pas seulement par la volonté de rendre les mathématiques rigoureuses.
- Cependant la solution, y compris dans le détail de sa présentation "rituelle" dans les éléments d'Euclide, fait appel à des sources intellectuelles externes aux mathématiques : elle n'est pas déterminée uniquement par le problème mathématique.
- En géométrie, la démonstration est indissolublement liée à un changement du rapport à la figure, au statut des objets de la géométrie, on peut dire qu'elle ne s'atteint qu'après dépassement de l'obstacle épistémologique que constitue l'évidence de la figure. C'est une difficulté à laquelle les élèves sont confrontés et que les enseignants doivent prendre en compte pour aider les élèves à la surmonter.

Gilbert ARSAC

LIRDIS – Université Lyon 1

Bibliographie

- ARSAC G., 1987, "L'origine de la démonstration : essai d'Épistémologie didactique" in *Recherches en didactique des mathématiques*, 8 (3), p. 267-312.
- ARSAC G., GERMAIN G., MANTE M., 1988, *Problème ouvert et situation-problème*. IREM de Lyon, brochure n° 64.
- CAVEING M., 1977, *La Constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse, université Paris X, atelier national de reproduction des thèses, Université Lille 3, Éd. 1982.
- DUMONT J.-P. et al., 1988, *Les Présocratiques*, La Pléiade, Gallimard, Paris.

- Commission inter-IREM Épistémologie et Histoire des Mathématiques, 1989, *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon et Besançon éditeurs, diffusion IREM de Lyon.
- IREM, groupe Épistémologie et Histoire, 1987, *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars.
- PLATON, 1967, "Ménon", in *Protagoras et autres dialogues*, traduction E. Chambry, Garnier-Flammarion.
- ROMEYER-DERBET G., 1985, *Les Sophistes*, Que-sais-je ? n° 2223 - PUF, Paris.
- SZABO A., 1977, *Les Débuts des mathématiques grecques*. Vrin, Paris.
- THUILLIER P., 1985, "Platon et la géométrie", in *La Recherche*, vol. 16. n° 66. p. 664-667.
- VERNANT J.-P., 1962, *Les Origines de la pensée grecque*. PUF, Paris.
- ZAFIROPOULO J., 1950, *L'école éléate*, Belles Lettres, Paris.

Guide de lecture

Sur ces questions on pourra consulter, outre Arsac (1987) un certain nombre de livres d'Histoire des Mathématiques et plus précisément Szabo (1977) et Caveing (1977). Cependant, ces références ne concernent que l'origine de la démonstration, non son évolution ultérieure, sujet peu abordé systématiquement mais sur lequel on pourra consulter "La démonstration mathématique dans l'histoire" (1989).

En ce qui concerne les idées de Platon, le mieux est de lire Platon lui-même, en particulier "La République", "Théétète", quelques lignes fondamentales de "Parménide", "Ménon" (toutes ces œuvres se trouvent en collection de poche par exemple chez Flammarion ou Denoël-Gonthier). Toutefois, on trouvera les textes essentiels du point de vue de la compréhension de notre texte dans les extraits de Platon figurant dans "Mathématiques au fil des âges" (1987), et une bonne synthèse dans Thuillier (1985).

Enfin, un aperçu de la pensée des sophistes Protagoras, Hippias, Antiphon, peut être trouvé dans Romeyer-Derbet (1985), les textes complets des sophistes, comme ceux de Parménide ou Zénon, se trouvent dans Dumont (1988), tandis que la pensée éléate est très bien exposée dans Zafiropoulo (1950).

Chapitre 8

Le problème de la figure

Le rôle de la figure dans l'argumentation

1 Le problème d'enseignement

L'initiation au raisonnement déductif à partir de la cinquième, avec comme perspective l'apprentissage de la démonstration mathématique, exige en géométrie une évolution du statut qu'a le dessin pour l'élève: jusque là, l'accent était mis par l'enseignant sur l'importance d'un tracé exact, impliquant en particulier un usage techniquement correct de la règle, graduée ou non, du compas, du rapporteur, de l'équerre. Une situation typique consistait par exemple à tracer une "figure" en respectant certaines données métriques ou angulaires puis à mesurer sur la figure obtenue des longueurs, des angles, à constater l'égalité de certaines longueurs, l'existence de points communs à certaines droites, etc.

Peu à peu, l'élève va devoir évoluer, car le statut de la figure en géométrie va changer. Ce nouveau statut, difficile à définir précisément par un discours accessible à l'élève, se traduit surtout, au début, par des interdictions, des complications de la tâche de l'élève: il ne s'agira plus de mesurer, que ce soit à la règle graduée ou au rapporteur, ni de constater, il faudra raisonner, déduire et en fin de compte plus tard, démontrer. Mais l'ancien point de vue ne devra pas disparaître pour autant: il y aura toujours des cas, même en mathématiques, où l'élève devra de nouveau mesurer sur un graphique, un dessin à l'échelle. Autrement dit, deux rapports au dessin devront coexister (ce qui nous amènera dans la suite à distinguer dessin et figure : cf. 2.1), et il faudra apprendre à connaître leurs domaines d'application, le plus difficile étant de ne pas mesurer, constater, en

géométrie "pure" où cet emploi des instruments de dessin sera marginalisé. En revanche, la règle non graduée et le compas retrouveront un nouveau statut, théorique, dans les "problèmes de construction".

2 Essai de réflexion théorique

Il est bon pour l'enseignant, pensons-nous, de disposer d'une analyse de l'origine des difficultés ci-dessus rappelées, c'est-à-dire d'une réflexion sur le statut de la figure en géométrie. Les lignes ci-dessous ne prétendent pas à l'originalité, ni à donner une solution définitive à ce problème, mais à l'éclairer en proposant trois points de vue sur le statut de la figure en géométrie.

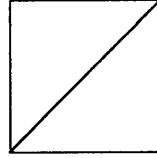
- un point de vue *philosophique* centré sur un essai de définition du mot figure visant à répondre aux questions suivantes : "Sur quels objets travaille le géomètre ?" "Quelle est la nature de la figure ?"
- un point de vue *psychologique* centré sur l'activité du sujet quant il fait de la géométrie.
- un point de vue *mathématique* centré sur le statut de la géométrie dans les mathématiques.

Ceci nous permettra de préciser, en nous appuyant sur cette analyse, en quoi les deux problèmes de géométrie qui figurent dans la liste des situations que nous proposons ("triangle aplati" et "rectangle d'Euclide") peuvent servir à mettre en place chez l'élève la notion de figure géométrique.

2.1 L'aspect "philosophique"

Nous nous contenterons d'un résumé de la réponse typique de Platon : la figure géométrique est un objet idéal dont tous les dessins concrets que l'on peut faire ne sont que des représentations imparfaites. Un exemple très simple et très classique montrera mieux qu'un long discours ce qu'il faut entendre par là : il s'agit du carré et de sa diagonale.

On sait que la diagonale est "incommensurable" au côté du carré, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune unité de mesure pour laquelle le côté et la diagonale aient tous deux des mesures entières (ou rationnelles, ce qui revient au même moyennant un changement d'unité).



Cette propriété, découverte par les Grecs aux environs du cinquième siècle avant J.-C., ne peut pas porter sur les segments effectivement dessinés, puisque rien n'empêche de mesurer effectivement ceux-ci avec une règle graduée. Elle ne peut donc porter que sur les segments idéaux dont le dessin concret n'est en somme qu'un pâle représentation... Accepter que cette propriété est vraie, c'est donc accorder la priorité au raisonnement sur la constatation sensible, ce sera là toute la difficulté pour l'élève.

L'exemple précédent est typique, mais ne correspond pas à une situation qui se présente en classe de cinquième. En voici un deuxième qui renvoie à l'histoire comme le précédent, mais aussi à des observations en classe de cinquième et de quatrième que nous avons pu faire à propos du problème du "triangle aplati": au cinquième siècle av J.-C., le sophiste grec Protagoras affirme que le cercle et sa tangente n'ont pas qu'un seul point commun, contrairement à ce qu'affirment les géomètres. Or, pour certains de nos élèves, le problème se pose également: un cercle et sa tangente, ou "pire", deux cercles tangents intérieurement, ne se "touchent"-ils pas, ne se "frôlent"-ils pas sur toute une longueur ? Là aussi, l'affirmation qu'il n'y a qu'un seul point commun suppose d'accorder priorité au raisonnement sur la constatation sur le dessin, ce que Protagoras refusait et qui pose toujours difficulté pour nos élèves. Nos expérimentations sur le problème du "triangle aplati" nous ont montré effectivement des conflits à ce propos entre élèves. La construction amène en effet à tracer un segment puis deux cercles tangents en un point de ce segment. Sur le dessin, on voit, soit que les cercles se coupent en dehors du segment, soit qu'ils se confondent sur une certaine longueur. Il y a alors conflit entre les élèves qui s'en tiennent à ces constatations et ceux qui assurent que normalement, il ne devrait pas en être ainsi et que les cercles devraient se couper sur le segment.

2.2 L'aspect "psychologique"

Reprenons la distinction faite plus haut entre dessin et figure : le dessin est l'objet concret qui figure (!) sur notre feuille de papier, la figure est l'objet abstrait sur lequel porte le raisonnement du géomètre.

Partons de la remarque suivante: toute description d'un objet ou d'une situation concrète suppose une sélection parmi les informations que nous pouvons posséder sur cet objet, sélection qui est guidée par un but, un objectif, qui fixe les critères de sélection. Autrement dit, une simple description est déjà une interprétation en fonction de certains buts que l'on poursuit. C'est ce que nous allons éclairer par application à l'objet dessin. Dans ce cas, en effet, suivant l'objectif visé, diverses sélections d'information sont possibles :

- d'un point de vue artistique, seront pertinentes des propriétés telles que le format du dessin, la nature de l'instrument de dessin employé (crayon ou fusain...), le caractère abstrait ou concret du dessin, sa forme, sa couleur éventuelle etc...
- du point de vue technique, seront importants l'échelle, la précision du tracé, la nature de la relation avec l'objet représenté (coupe, vue de dessus, éclaté...), les mesures relevées sur le dessin, etc.

Revenons au point de vue du géomètre : il est assez évident que pour lui, ce ne sont pas les propriétés ci-dessus qui sont pertinentes. Ainsi, considérer un dessin comme une figure géométrique, c'est sélectionner parmi les propriétés du dessin celles qu'il sera légitime d'utiliser pour un raisonnement géométrique.

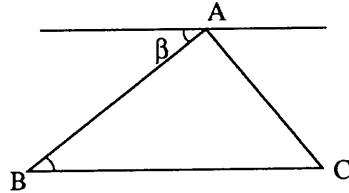
Ce point de vue, contrairement au précédent, ne dit pas explicitement ce que c'est qu'une figure, mais la définit implicitement comme un certain rapport au dessin. Nous allons le développer maintenant, mais disons tout de suite qu'il devrait être le plus utilisable dans une perspective d'enseignement, car il met l'accent sur des comportements que l'on veut faire acquérir plutôt que sur une définition peut-être claire, mais pas toujours opérationnelle, de la figure, comme celle que nous avons donnée ci-dessus. Cette dernière ne peut sans doute venir qu'en conclusion d'une réflexion sur une pratique déjà maîtrisée alors que ce qui nous intéresse ici, c'est plutôt l'initiation à cette pratique.

Essayons maintenant de décrire les caractéristiques de cette nouvelle pratique des rapports au dessin. En fait, d'ailleurs, il y a une caractéristique fondamentale dont les autres ne sont que l'explicitation.

Cette caractéristique fondamentale de la pratique géométrique est qu'elle comporte un aller et retour constant entre le dessin et un texte, un énoncé (on pourrait d'ailleurs raffiner l'analyse en distinguant suivant que le texte est écrit ou oral). Au départ d'un problème de géométrie, l'énoncé permet de construire le dessin associé et précise, parmi les propriétés que l'on peut lire sur celui-ci, celles qui sont effectivement présentes dans l'énoncé

(les hypothèses), sauf pour des figures tellement usuelles que l'énoncé peut devenir implicite comme par exemple les polygones réguliers: les dessins d'un triangle équilatéral, d'un carré, peuvent se passer de l'énoncé associé, s'il est devenu suffisamment familier. Le travail du géomètre, qui ne s'achèvera qu'avec la rédaction de la démonstration se poursuit ensuite dans un aller et retour constant entre le dessin et le texte que nous n'avons pas la prétention de décrire en détail ici. Disons simplement que la légitimation des affirmations conjecturées grâce au dessin comporte toujours un retour au texte : on vérifie que ces affirmations font partie des hypothèses ou peuvent s'en déduire. Sans doute vous direz-vous qu'il vous arrive de chercher un problème de géométrie en travaillant uniquement sur le dessin, sans écrire. Mais alors, s'il vous arrive d'être obligé de reprendre votre recherche un certain temps après, vous constaterez sans doute que vous avez du mal à reconstituer votre démarche à partir du seul dessin. Dans la suite, puisque notre objectif est l'apprentissage des règles du raisonnement, nous ne nous intéresserons qu'au problème, nouveau pour l'élève que nous considérons, de la légitimation, non à celui de la découverte, de l'invention. Précisons cela sur un exemple simple :

Si on veut mettre en évidence la somme des angles d'un triangle ABC, et qu'on trace pour cela la parallèle en A à BC, on procède à une modification du dessin initial et du texte initial (on ajoute "soit d la parallèle à BC passant par A").



Nous ne cherchons pas ici à comprendre d'où vient l'idée de tracer cette droite mais nous nous intéressons au phénomène suivant: nous remarquons que l'égalité d'angles angle B = angle β , qui peut être lue ou conjecturée sur le dessin, résulte de l'application du théorème sur les angles alternes-internes et que cette application est justifiée par le fait que d est parallèle à BC, c'est-à-dire par ce que nous appelons le retour au texte : "soit d la parallèle à BC passant par A". Nous ne regardons donc dans l'activité du géomètre que l'aspect validation.

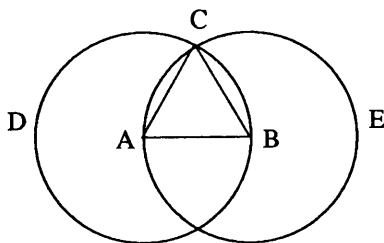
Remarquons que, lorsqu'on propose une figure en guise de contre-exemple à une conjecture, on suppose que l'interlocuteur partage suffisamment de connaissances communes avec celui qui propose le contre-exemple pour que la démonstration, ou plus largement le commentaire, associée soit suggérée sans équivoque par la figure. Cette condition n'est pas toujours satisfaite de manière évidente quand le professeur propose une figure comme contre-exemple aux élèves.

Peut-on en conclure que l'énoncé se suffit à lui-même et que la figure n'est qu'un code commode pour communiquer sous une forme en général plus

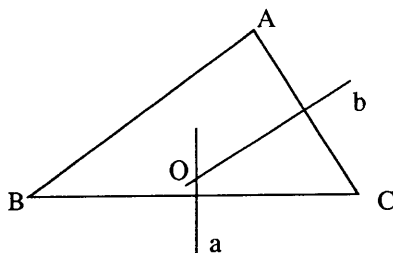
rapide et synthétique les informations contenues dans l'énoncé ? A prendre cette position, on oublierait que le dessin est l'objet sur lequel travaille le géomètre (nous nous limitons à la géométrie plane euclidienne) et que la lecture de certaines propriétés sur le dessin est inévitable.

La démarcation entre ce qu'on peut légitimement lire sur le dessin et ce qu'on doit justifier par un retour à l'énoncé a varié dans l'histoire des mathématiques et variera également dans l'histoire de l'élève, ce qui crée une difficulté pour le métier d'enseignant et pour celui d'élève. En voici deux exemples, l'un historique et très classique, l'autre relatif à la classe de quatrième :

- La première proposition des éléments d'Euclide vise à prouver la possibilité de construire un triangle équilatéral ayant pour base un segment donné AB. La solution est connue: le point cherché est l'intersection des cercles de centres A et B, de rayon AB. Euclide considère implicitement comme évident ce qu'on voit sur le dessin, c'est-à-dire que ces cercles se rencontrent. Plus tard, on considérera que la question de l'existence du point commun doit être traitée si l'on désire fonder la géométrie sur une base entièrement axiomatique (c'est par exemple le point de vue de Hilbert dans son ouvrage: "les fondements de la géométrie")



- L'une des plus classiques "première démonstration" que l'on présente aux élèves consiste à prouver que les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes. Pour cela, on considère le point O intersection des médiatrices a et b de BC et AC et on montre qu'il appartient à la médiatrice c de AB.



Le fait que a et b aient un point commun se voit sur le dessin. Le texte correspondant qui pourrait être : "soit O l'intersection de a et de b " appellerait éventuellement la question de l'existence de O . Faut-il la soulever en quatrième ? Nous avons constaté, sans faire une enquête exhaustive, qu'il n'y a pas là-dessus unanimité chez les collègues, et que certains manuels de 4ème, et même de 5ème, posent la question, d'autres pas. Les instructions, en demandant "de ne pas démontrer de choses évidentes", semblent recommander aux enseignants de ne pas soulever le problème. Il nous semble par ailleurs peu vraisemblable que les élèves se posent spontanément la question (mais nous n'avons pas essayé de le vérifier). Notons que la réponse rigoureuse conduit à un raisonnement par l'absurde et donc à envisager un triangle où deux médiatrices seraient parallèles, ce qui est bien difficile à traduire quand on revient au dessin...

Ainsi, apprendre à raisonner en géométrie, c'est apprendre une relation qui n'est pas simple entre lecture du dessin et raisonnement. Les deux situations géométriques que nous proposons dans ce livre visent à montrer aux élèves que le seul recours à la lecture du dessin ou aux mesures directes sur celui-ci peut conduire à des erreurs qui se manifestent ici par l'apparition de contradictions entre élèves, non par l'intervention de l'enseignant. Elles visent à introduire une circonspection, une attitude raisonnée vis-à-vis de l'emploi qu'on fait du dessin, non pas à l'exclusion de celui-ci et de son utilisation, nous tenons à le souligner ici contre un purisme qui serait dangereux (il existe d'ailleurs des élèves de seconde qui n'osent plus faire de dessin). C'est finalement la pratique de cette attitude qui consiste pour nous à utiliser le dessin comme une figure géométrique.

Cette caractéristique distingue fortement la figure du dessin artistique : si un poème peut accompagner un dessin, les informations qu'ils transmettent ne sont pas interchangeables : on ne peut construire le dessin à partir du poème ! De même un dessin technique ou une carte de géographie sont difficilement réductibles à un texte.

Détaillons maintenant quelques conséquences qui découlent de cette caractéristique fondamentale :

- ⇒ Le caractère "générique" de la figure s'interprète aisément : il signifie que l'on ne doit pas aller chercher dans le dessin des informations qui en fait ne figurent pas dans le programme de construction. Ce point de vue n'est pas facile à manier ; par exemple, le fait que l'orthocentre ou le centre du cercle circonscrit se trouvent à l'intérieur d'un triangle se lit sur le dessin tant qu'on n'envisage pas de triangle avec un angle obtus... Ces constatations ne pourront donc pas être légitimées, alors que, comme nous l'avons vu on pourra sans doute se contenter de constater que deux médiatrices ou deux hauteurs se rencontrent toujours. Il faut en somme dans certains cas renoncer à certains renseignements que nous fournit le dessin pour, soit les retrouver par une démarche au premier abord nettement plus coûteuse, soit même les nier (ce sera le cas dans les deux situations géométriques que nous proposons aux élèves : il faudra renoncer dans un cas à l'existence du triangle, dans l'autre aux différences d'aires constatées sur les rectangles). Dans ce dernier cas, ils apparaissent alors comme des propriétés du dessin, non de la figure.
- ⇒ Mais en fait, comme le montre l'examen ci-dessus, le bilan exact des propriétés génériques, c-à-d de celles que l'on peut légitimement assumer à partir du programme de construction est déjà une opération intellectuelle non triviale, qui ne se résume ni dans la maîtrise d'une technique graphique, ni dans une opération purement perceptive qui aurait un caractère objectif, c'est-à-dire indépendant des connaissances de l'individu : il s'agit bien d'un "raisonnement" (raisonner = découvrir par l'examen de ce que l'on sait déjà quelque autre chose que l'on ne sait pas encore (Peirce)).

2.3 Le point de vue "mathématique"

Nous entendons par là le point de vue moderne initié par Klein qui rattache au 19^{ème} siècle la géométrie à l'étude des groupes ("programme d'Erlangen"). L'idée essentielle est d'examiner par quel groupe de transformations une propriété géométrique est invariante : on distingue ainsi les propriétés affines des propriétés métriques ou projectives. Une figure apparaît comme une classe d'équivalence : concrètement, deux dessins représentent la même figure s'ils sont semblables ou isométriques (suivant le type de propriété que l'on veut étudier) ou même simplement s'ils se correspondent dans une transformation affine. Donnons ici un exemple :

La propriété "les médianes d'un triangle sont concourantes" est une propriété affine, c'est-à-dire invariante par toute transformation affine : étant

donné deux triangles, il existe toujours une transformation affine faisant passer de l'un à l'autre, et dans cette transformation les centres de gravité se correspondent. Concrètement, ici, deux dessins représentant des triangles de forme très différentes, doivent être considérés comme "la même figure". Au contraire, les propriétés particulières au triangle équilatéral sont associées uniquement à des triangles déduits l'un de l'autre par similitude.

Si ce point de vue tardif, qui est typiquement une conclusion tirée après coup d'une expérience de plusieurs siècles de géométrie et en particulier du choc de la découverte des géométries non euclidiennes, n'est certainement pas opératoire auprès des élèves, il a cependant l'avantage d'attirer l'attention sur un implicite fréquent du discours de l'enseignant qui parle par exemple des propriétés "du parallélogramme" ou "du carré" comme s'il n'y en avait qu'un seul c'est-à-dire comme s'il était évident que ces propriétés ne dépendent ni de la position, ni de la taille, ni même parfois de la forme (cas du triangle) de la figure considérée.

3 Conclusion

Pour l'élève, le nouveau rapport au dessin qui suppose d'envisager celui-ci dans un aller et retour constant avec l'énoncé se traduit, surtout au début, par trois grandes interdictions par rapport à sa pratique antérieure :

- ne pas se contenter de mesurer
- ne pas se contenter de constatations
- ne pas tirer des conclusions de l'examen de cas de figure particuliers.

Les situations que nous proposons visent à justifier aux yeux de l'élève les deux premières interdictions et à proposer des stratégies de remplacement : la situation du rectangle vise évidemment les mesures, celle du triangle les constatations sur le dessin. Nous ne proposons pas de situation pour le problème de la prise en compte des cas de figures qui nous apparaît trop délicat pour être abordé en cinquième.

On constate donc que la démonstration en géométrie présente des difficultés particulières à cause du statut de l'objet sur lequel elle porte, la figure. Ceci constitue une spécificité par rapport à la démonstration en arithmétique par exemple. Dans ce cas, en effet, les objets sur lesquels on travaille ne présentent pas de difficultés de définition analogues.

Bibliographie

Vous pouvez lire les textes de Platon lui-même, malheureusement fort dispersés dans son œuvre (cf. par exemple, *La République*, dont il existe diverses éditions, y compris de poche). Une synthèse rapide se trouve dans l'article de P. Thuillier "Sociologie de la connaissance : Platon et la géométrie", *La Recherche*, vol. 16, mai 1985, p. 664-667.

Les positions des sophistes tels que Protagoras se trouvent évidemment dans le volume de la collection de la Pléiade *Les présocratiques* (Gallimard, Paris, 1988) mais l'essentiel se trouve dans le volume n° 2223 de la collection "Que sais-je", *Les sophistes*.

On trouve dans *Epistémologie des mathématiques* de J. P. Clero (Nathan 1990) plusieurs textes intéressants. Sur le formalisme, essentiellement dû à Hilbert, on pourra consulter Hilbert lui-même (*Les fondements de la géométrie*, édition critique par Paul Rossier, Dunod, 1971).

Enfin, deux publications récentes du groupe inter-IREM Épistémologie et Histoire, *Mathématiques au fil des âges* (Gauthiers-Villars, 1987) et *La démonstration mathématique dans l'histoire* (IREM de Lyon et Besançon, 1990) contiennent plusieurs textes relatifs au rôle de la figure et de la démonstration. On trouvera aussi dans le premier des extraits d'Euclide en particulier la première proposition dont nous parlons.

Sur le problème de la géométrie dans l'espace, que nous n'avons pas abordé, vous pouvez consulter B. Parzys: "Voir et savoir, la représentation du perçu et du su dans les dessins de géométrie dans l'espace", *Bulletin APMEP*, juin 88, n° 364, p. 339-350.

Le point de vue développé ci-dessus n'est pas le seul possible, et est insuffisant pour expliquer clairement tous les phénomènes rencontrés dans l'apprentissage de la géométrie. Par exemple, nous n'abordons pas ici le rapport dynamique avec le dessin (tracé d'éléments non prévus dans l'énoncé par exemple) qui va mener à la solution des problèmes de géométrie. En fait, nous ne nous intéressons qu'à l'usage du dessin dans la validation d'un résultat géométrique.

Chapitre 9

Rôle des conflits socio-cognitifs

Les débats entre pairs comme moteur de l'apprentissage

Souvent on cherche par le travail de groupe à favoriser l'apparition de conflits entre élèves à propos du savoir, typiquement à propos de la résolution d'un problème. Ces conflits sont appelés socio-cognitifs pour marquer qu'ils portent sur une connaissance ("cognitifs") et qu'il s'agit de conflits entre deux individus au moins et non de conflits internes à une personne ("socio").

Bien entendu, le résultat visé est une résolution du conflit, à la suite du débat entre élèves, amenant à un progrès commun des protagonistes dans la connaissance visée.

Ce sont des recherches en psychologie qui sont à l'origine de l'affirmation suivante, que nous appellerons thèse du conflit socio-cognitif : l'interaction entre deux individus affrontés à un problème n'est source de progrès que si elle comporte un conflit entre les individus, portant sur des réponses reconnues comme incompatibles du point de vue des deux partenaires et effectivement logiquement incompatibles.

Cette affirmation a conduit à mettre en valeur les situations de débat entre élèves où deux conceptions contradictoires s'affrontent. Toutefois, il importe de remarquer les deux points suivants que nous développons plus loin, surtout le deuxième :

- 1) Le travail de groupe, en situation de résolution de problèmes, présente de l'intérêt, même en l'absence de conflit. Ce point est essentiel dans la mesure où nos observations nous montrent que les conflits que nous

avons observés ont eu des issues très variables du point de vue de la connaissance.

- 2) Les conditions expérimentales qui ont conduit à avancer en psychologie la thèse du conflit socio-cognitif ne peuvent être reproduites telles quelles en situation de classe, on ne peut donc pas attendre des effets bénéfiques automatiques de toute situation de conflit socio-cognitif. D'ailleurs les auteurs de ces travaux soulignent eux-mêmes que les effets peuvent dépendre de la connaissance en jeu. Ce deuxième point souligne la possibilité d'issues fort variées.

1 Intérêt de la coopération dans la résolution d'un problème

Nous listons brièvement quelques résultats d'études psychologiques qui nous semblent coïncider avec nos observations et qui montrent les effets positifs de la coopération (interaction sans conflit) dans la recherche d'un problème.

- La coopération active entre élèves, la nécessité d'explicitier ses choix et de les argumenter sont favorables à un développement du contrôle de l'élève sur son activité. Par exemple il faut être capable d'expliquer aux autres pourquoi on se lance dans tel calcul et pour cela savoir soi-même pourquoi on le fait.
- Le travail de groupe provoque des échanges, des formulations, en particulier pour les raisons qui viennent d'être exposées. Ces formulations sont fondamentales car le passage par l'expression, par le langage, permettrait même à ce qui est découvert par chacun dans le travail de groupe d'être ensuite utilisé individuellement dans un autre contexte.

Cependant ces études montrent aussi qu'il y a une condition pour que l'interaction soit efficace: elle doit avoir lieu pendant la recherche du problème et non pas consister en une simple confrontation du résultat final. Ceci coïncide également avec nos observations et montre combien la gestion du temps est délicate: le temps de travail individuel que nous accordons aux élèves afin d'être certains qu'ils ont tous pu "entrer" dans l'énoncé doit être suffisamment bref pour que les élèves ne soient pas trop proches d'un résultat qu'ils considèrent comme définitif.

Ajoutons que l'apprentissage du travail de groupe a aussi une dimension éducative, indépendamment du fait qu'il s'agisse ou non comme ici d'une résolution de problème.

2 Les conflits observés

D'une manière générale, les situations d'étude psychologique des conflits socio-cognitifs diffèrent des situations de travail de groupe en classe.

Dans ces études en effet, il s'agit de groupes de deux élèves, d'apprentissages non scolaires (problèmes de "conservation" au sens de Piaget) et à court terme, et les deux élèves que l'on observe sont soigneusement choisis en fonction de leurs différences de conceptions en ce qui concerne les apprentissages visés.

Les conditions de travail en classe sont bien différentes : groupes de quatre élèves, souvent organisés sur la base du volontariat, en tous cas non choisis en relation avec la connaissance visée. Il ne saurait donc y avoir transfert pur et simple, "application" des études psychologiques. Ces remarques s'appliquent a fortiori aux débats globaux dans la classe qui ne sauraient être baptisés "conflits socio-cognitifs". Les théories psychologiques de l'apprentissage suggèrent certes des idées, mais il importe de vérifier chaque fois par l'observation les effets des situations de classe bâties sur ces idées.

Le passage d'un groupe de deux à des groupes de quatre, l'organisation de débats collectifs, répondent à des impératifs liés à l'enseignement. Par exemple le débat public permet aux élèves de confronter différents types d'argumentation et de débattre de leur efficacité mais en même temps, il permet à l'enseignant de connaître le type d'argumentation employé par les élèves, et donc d'en tenir compte dans l'institutionnalisation qu'il fera à la fin, alors qu'il n'a pas accès à la plus grande part des débats qui se déroulent dans les groupes. D'un autre côté, la composition de groupes de quatre est nécessaire vu le nombre d'élèves dans une classe mais a des conséquences importantes: par exemple un élève peut fort bien se trouver en conflit avec les trois autres, dans ce cas, la pression sociale sur l'élève minoritaire peut jouer un grand rôle, il n'y a donc pas égalité sociale entre les deux points de vue en débat.

Revenons maintenant plus précisément à ce que nous avons pu observer comme conflits dans les groupes et à leur évolution. Nous nous

limiterons aux deux énoncés géométriques car c'est à leur propos que les conflits sont les plus nets.

2.1 Dans le cas du "triangle aplati"

Les conflits portent simultanément sur le résultat et sur la méthode pour y parvenir. Deux positions s'affrontent :

- ⇒ soit les élèves ont une conception "réaliste" de la figure (c'est-à-dire qu'ils font confiance aux constatations sur leur dessin) et ils pensent qu'il existe un vrai triangle de côtés 5 cm, 9 cm, 4 cm.
- ⇒ soit les élèves ont une conception "idéale" de la figure et ils pensent alors que le triangle est aplati en s'appuyant sur un raisonnement fondé sur le fait que $5 + 4 = 9$.

Autrement dit, nous n'avons pas observé de cas où la conclusion "triangle aplati" résulte d'une constatation sur le dessin : si ce cas n'est pas a priori impossible, il semble expérimentalement négligeable. Il y a donc là deux niveaux de preuves, au sens de Balacheff, qui conduisent à des résultats contradictoires.

2.2 Dans le cas du rectangle, les conflits sont de deux sortes

- ⇒ Entre élèves qui font confiance aux mesures et trouvent des résultats incompatibles : il s'agit ici d'un conflit sur le résultat de l'application d'une méthode (mesurer, calculer les aires et comparer) et non d'un conflit sur la méthode elle-même ; comme nous souhaitons mettre en échec précisément cette méthode, nous espérons que ce conflit ne pourra pas toujours être réglé. En fait, nous verrons qu'il peut l'être sans remise en cause de la confiance aux mesures.
- ⇒ Entre élèves qui font confiance aux mesures et élèves qui, par un raisonnement trouvent l'égalité des aires à comparer. Ce cas est rare mais il apparaît ; dans ce cas nous espérons le "triomphe" du raisonnement.

3 Issue des conflits

3.1 Cas du triangle aplati

Nos observations nous montrent que dans ce cas, toutes les issues sont possibles :

- ⇒ Stagnation, c'est-à-dire que les deux parties restent sur leurs positions sans les dépasser sur le moment. Soulignons en effet, et ceci est valable pour tout ce qui va suivre, que nos observations ne portent que sur deux séances de classe donc ne relèvent que les évolutions à court terme, presque instantanées. Nous avons cependant pu observer incidemment que les évolutions à long terme viennent parfois corriger les effets observés à court terme.
- ⇒ Évolution favorable (ce jugement de valeur est évidemment celui de l'observateur, non des élèves eux-mêmes !), ce qui signifie dans ce cas que des élèves initialement sur la conception réaliste de la figure se rallient au fait que le triangle est aplati en intégrant au moins partiellement la conception intellectuelle qui lui est associée.
- ⇒ Régression, ce qui signifie que la conception intellectuelle de la figure est abandonnée à la suite de la confrontation avec la conception réaliste.

3.2 Cas du rectangle

3.2.1 Conflits entre élèves faisant confiance aux mesures

Comme tout conflit, il peut être réglé socialement par ralliement des uns à la position des autres, mais aussi par des mesures sur une figure considérée comme plus précise, ou par appel à des conceptions sur les relations entre la "forme" d'un rectangle, ou son périmètre, et son aire.

Voici un argument de ce type relevé sur une affiche :

C'est ENBK (le plus grand) car si on additionne la longueur et la largeur du rectangle ENBK, le résultat sera plus grand que si on additionne la longueur et la largeur du rectangle EMDL.

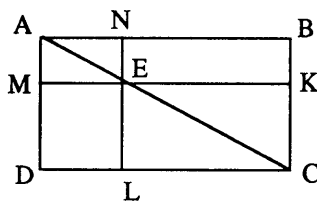
(Cette rédaction a permis de trancher le débat entre deux positions opposées fondées toutes deux sur des mesures).

3.2.2 Conflit entre confiance dans les mesures et raisonnement

L'analyse préalable nous conduisait à espérer le triomphe du raisonnement ; cela se produit effectivement, mais peut-être parfois pour une simple question de prestige d'un bon élève, et en tous cas pas toujours, comme le montre l'exemple suivant :

Il s'agit d'un groupe de quatre élèves, désignés dans la suite par les numéros 1, 2, 3, 4 qui leur ont été attribués par l'observateur, et où, onze minutes après la distribution de l'énoncé, l'élève 4 écrit la réponse suivante, accompagnée de la figure, sur sa feuille :

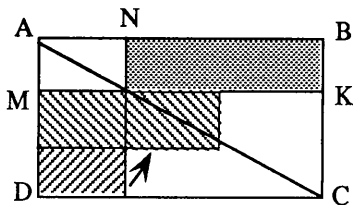
Il y en a pas de plus grand que l'autre, car les deux grands triangles rectangles sont égaux et les deux petits aussi sont égaux. Si l'on enlève à chaque moitié un grand et un petit, cela reviendra au même.



Notons que 4 n'a effectué aucune mesure pour arriver à cette solution. Les autres élèves se sont tous lancés dans les mesures. L'élève 2 trouve que ENBK est le plus grand, 3 qui a confondu aire et périmètre trouve aussi que ENBK est le plus grand, la conclusion de 1 n'a pas pu être observée. Tous ces résultats ont été obtenus pendant le temps de recherche individuelle. Lors de la confrontation qui suit, toujours dans le groupe, le débat se centre sur le résultat de 4, les différences de résultats de mesures entre les autres élèves, sont considérées comme naturelles et passent à l'arrière-plan.

Mais contrairement à ce que l'analyse a priori de la situation pouvait laisser espérer, la solution de 4, pourtant aussi solidement et clairement argumentée qu'elle peut l'être par un élève de cinquième ne s'impose pas ; sur proposition de l'élève 3, le groupe est convaincu par la solution suivante qui figure sur l'affiche :

Ils sont tous les deux égaux, car si on partage le rectangle EMDL, puis si on le met à côté de l'autre moitié, les deux rectangles ENBK et EMDL seront les mêmes rectangles (donc les aires de deux rectangles sont égales).



Nous essaierons d'analyser plus loin (§ 5) la raison de cette issue du conflit.

4 Mécanismes des conflits

4.1 Argumentation

Les moyens employés pour convaincre les autres relèvent en général de ce que l'on nomme l'argumentation: le but est de convaincre l'autre et on utilise pour cela des procédés argumentatifs généraux qui ne relèvent pas forcément de pure logique mais qui comportent en particulier une tactique et une prise en compte du temps et peuvent se réduire à des procédés sociaux (cf. ci-dessous).

L'un de ces procédés classiques consiste à aller sur le terrain de l'adversaire, afin de trouver un terrain de débat commun. Ceci amène par exemple, dans le cas du triangle aplati, les tenants de la conception idéale de la figure à argumenter sur le dessin, alors que leur point de départ est le refus de la vérification sur le dessin. La stagnation vue plus haut apparaît typiquement quand un tel terrain commun ne peut être trouvé, aucun des deux élèves ne rentrant sur le terrain de l'autre : en voici un exemple où un élève insiste pour réfléchir, vu l'imprécision de la figure, et où un autre ne jure que par le dessin :

- élève 3 : *c'est logique ce que 4 dit*
- élève 1 : *c'est faux*
- élève 1 : *refais le !*
- élève 4 : *mais réfléchis !*
- élève 1 : *prends une règle !*
- élève 4 : *si c'est imprécis comme ça, faut réfléchir.*

En revanche, l'acceptation d'aller sur le terrain de l'adversaire peut évidemment se traduire par une régression, puisqu'on se met en somme en position de faiblesse.

4.2 Procédés sociaux

Il peut arriver que les arguments échangés soient principalement liés à des enjeux sociaux et pratiquement pas au contenu mathématique de la situation observée : prestige (ou rejet) de tel élève dans le groupe, refus de collaborer, décision prise essentiellement après estimation de sa recevabilité par le reste de la classe etc.

5 Quelques hypothèses sur les origines des phénomènes observés

Comme les observations que nous avons réalisées n'avaient pas pour objectif essentiel de déterminer les raisons de l'évolution des conflits socio-cognitifs, dont certaines n'avaient pas été prévues, nous n'avons pas les moyens d'analyser avec certitude tous les mécanismes de ces évolutions. C'est pourquoi nous laissons ici le terme d'hypothèses pour les explications qui vont suivre, appuyées cependant sur l'observation des élèves et l'analyse de leurs échanges. Nous nous contenterons de plus de l'examen des cas qui nous ont le plus surpris : le statu quo dans les affrontements à propos du triangle aplati, la régression dans un cas de conflit entre raisonnement et confiance dans les mesures pour le problème du rectangle.

5.1 Dans le cas du triangle aplati, l'analyse a priori laisse prévoir des difficultés pour le triomphe de la conception "idéale" sur la conception "réaliste". On a vu en effet (cf. chapitre 3, § 3) que l'argumentation à l'appui de la conception idéale n'est pas évidente, et qu'elle fait sans doute appel à une perception de l'espace qui n'est pas forcément acquise chez tous les élèves. Plus profondément, le saut que représente le passage de l'assurance due au dessin, renforcée par plusieurs années de pratique scolaire, à un raisonnement dont les bases n'apparaissent sans doute pas évidentes à l'élève est peut-être trop important pour être franchi dans le temps d'une séance de classe, sans maturation solitaire, par un élève. D'ailleurs des observations hors classe réalisées dans le cadre d'une recherche annexe montrent que la conception réaliste peut fort bien résister à une remise en cause par un adulte, même appuyée sur l'emploi de papier quadrillé, destiné, dans l'esprit de l'expérimentateur, à augmenter l'évidence graphique du résultat. Ainsi se justifie la réflexion d'une élève convaincue qu'effectivement le dessin ne permet pas de conclure dans le cas du triangle aplati : *"mais qu'est-ce qui peut servir de preuve alors ?"* Ici encore se manifeste le besoin d'une observation à long terme de l'évolution des conceptions des élèves. En gros, on pourrait dire que la situation du triangle aplati permet de mettre en échec la confiance dans le dessin, sans pour autant amener automatiquement une solution de remplacement.

5.2 En apparence, les choses se présentent mieux pour le rectangle puisqu'ici, il existe une preuve par découpage, à la portée pensons-nous, des élèves. Cependant, outre que cette preuve n'apparaît pas spontanément dans toutes les classes et doit dans certains cas être introduite par l'enseignant, l'expérience montre que, quand elle apparaît chez les élèves eux mêmes, elle

ne s'impose pas aussi nettement qu'on pourrait l'espérer face à la confiance dans les mesures :

- dans un groupe, elle s'impose, mais on peut penser que ce succès tient beaucoup à des raisons sociales (personnalité de l'élève, de plus réputé bon, qui la soutient) et que la supériorité de type de preuves est loin d'être évident : le conflit avec le résultat des mesures, loin d'infirmar ce dernier procédé, jette le doute sur l'autre.
- dans un autre cas (rapporté en 3.2.2), la preuve par découpage est abandonnée au profit d'une preuve hybride qui comporte un découpage, mais appuyé sur une lecture abusive de la figure : le point E est supposé implicitement être au tiers de AC, ce qui est approximativement vrai dans le cas de figure considéré. Autrement dit, l'information exacte lue sur la figure, suivant laquelle la diagonale d'un rectangle le partage en deux triangles rectangles équivalents n'est pas distinguée de l'information fausse suivant laquelle E est au tiers de AC. Le jeu avec l'énoncé pour discriminer ce qu'il est légitime de lire sur la figure de ce qui ne l'est pas (cf. chapitre 8) n'a pas lieu. D'ailleurs du point de vue des élèves, leur dialogue le prouve, la démonstration par découpage a le défaut par rapport à celle par mesurage de s'appuyer encore plus lourdement sur le dessin ! L'élève qui a proposé initialement la démonstration correcte ne voit pas semble-t-il de différence avec la nouvelle démonstration et l'accord ainsi obtenu est très avantageux au point de vue social : au prix de ce qui est sans doute à ses yeux une légère concession, l'élève 4 a rallié les trois autres à son résultat et à sa méthode. Les trois autres ont apporté leur "grain de sel" à la méthode de 4 et l'ont, de leur point de vue, rendue plus évidente : tout le monde y gagne !

D'une certaine manière, le problème du rectangle s'apparente à celui du carré d'un nombre pair ou impair : dans ce dernier cas, la contradiction logique entre les deux types de preuves possibles n'est pas ressentie comme telle par les élèves, en partie à cause de l'ambiguïté du mot "exemple". Dans le cas du rectangle, la contradiction entre les mesures et le découpage de la figure est bien ressentie au niveau des résultats mais n'amène pas à l'invalidation d'une des deux procédures : pour les élèves, ces deux procédures devraient donner le même résultat, elles sont complémentaires plutôt que concurrentes.

Bibliographie

Les références classiques sur les conflits socio-cognitifs se trouvent dans l'ouvrage de A. N. Perret Clermont *"La construction de l'intelligence dans l'interaction sociale"* (Peter Lang, Berne, 1986) ou de G. Mugny (Ed) *"Psychologie sociale du développement cognitif"* (Peter Lang, Berne, 1985).

Mais les remarques ci-dessus doivent beaucoup à deux articles qui figurent dans l'excellent livre *"Construction des savoirs, obstacles et conflits"*, N. Bednarz et C. Garnier, éditeurs, éditions Agence d'Arc, Ottawa 1989. Il s'agit des articles de Michel Gilly *"À propos de la théorie du conflit socio-cognitif et des mécanismes psycho-sociaux des constructions cognitives : perspectives actuelles et modèles explicatifs"* et de deux articles d'Agnès Blaye *"Interactions sociales et constructions cognitives : présentation critique de la thèse du conflit socio-cognitif"* et *"Nature et effet des oppositions dans des situations de co-résolution de problèmes entre pairs"*.

CONCLUSION

Rappelons que l'objectif principal des situations présentées dans ce document est l'appropriation par les élèves des règles du débat de validation mathématique. Nous entendons par appropriation le fait que les élèves soient capables d'utiliser correctement ces règles pour prouver qu'un énoncé mathématique est soit vrai soit faux.

Nous n'avons pas fait une évaluation quantitative de l'atteinte de cet objectif en fin d'année pour plusieurs raisons. La première de ces raisons est que notre échantillon est trop petit pour que nous puissions tirer d'une telle évaluation une conclusion pour d'autres classes et d'autres élèves. La deuxième raison est qu'il ne s'agit que d'une amorce du travail avec les élèves dans ce domaine. Il doit se poursuivre en 4ème, en 3ème, en seconde, etc. L'effet que nous visons est à long terme. Enfin une évaluation quantitative de l'effet de ces situations sur les élèves nécessiterait la construction d'un outil adapté que nous ne possédons pas pour le moment. Le questionnaire était une tentative de construction d'un tel outil. Son utilisation a montré qu'il n'était pas au point (voir § 5).

Cependant une amorce d'évaluation qualitative a pu être réalisée grâce aux constatations faites par les enseignants qui ont utilisé dans leur classe les situations décrites dans ce document. Pour les élèves, elles constituent une référence au sens suivant : spontanément les élèves évoquent ces situations vécues ; quand ils veulent réfuter un raisonnement, ils font appel non seulement à la règle correspondante mais aussi à la situation dans laquelle elle a été introduite. Majoritairement les élèves se sont appropriés les règles du débat. En particulier très peu se contentent de constater sur la figure pour prouver, très peu se limitent à l'utilisation d'exemples pour prouver. Par ailleurs, en 4ème, les mêmes constatations ont été faites soit dans des classes où tous les élèves ont suivi ce type d'enseignement, soit dans des classes "mixtes".

En dehors de l'objectif poursuivi, un autre effet de l'utilisation de ces situations est la découverte de phénomènes qui nous ont surpris. Par exemple, pour certains élèves, la forme d'un triangle dépend de l'ordre de tracé de ses côtés, la mesure d'un angle dépend de la longueur de ses côtés. D'autre part, l'ambiguïté inhérente à l'emploi du mot exemple nous avait échappé jusqu'à ces expériences.

Enfin, si nous vous avons proposé ces situations d'apprentissages ce n'est pas parce que nous les avons trouvées idéales, prêtes à être utilisées (clés en main !) et permettant à coup sûr d'atteindre l'objectif rappelé ci-dessus. Ce sont des modèles de situations et en aucun cas des situations modèles. Pour chacune d'entre-elles nous vous avons signalé les points positifs, la difficulté de gestion de la classe et les dysfonctionnements que nous avons repérés. Nous pensons qu'en vous appuyant sur ces situations et sur l'analyse très détaillée que nous avons pu en faire (grâce à un dispositif important d'observation rendu possible par l'existence de groupes de recherche au sein de l'IREM de Lyon) et sur les autres problèmes que nous vous soumettons dans le § 4, vous pourrez construire dans un temps raisonnable des situations adaptées à votre style personnel et à vos élèves. Les effets constatés sur les élèves nous ont paru suffisamment positifs pour que cela mérite que nous portions à votre connaissance, par cet ouvrage, le résultat de notre travail.

FILMÉ D'APRÈS LES DOCUMENTS FOURNIS
CET OUVRAGE A ÉTÉ

ACHEVÉ D'IMPRIMER  EN FÉVRIER 1992
SUR LES PRESSES DE L'IMPRIMERIE
LIENHART & C^{ie} A AUBENAS D'ARDÈCHE

DÉPÔT LÉGAL : Février 1992

N° 5497. Imprimé en France

L'initiation au raisonnement déductif est un problème fondamental de l'enseignement des mathématiques abordé en France au niveau du collège, c'est-à-dire avec des enfants de onze à quinze ans. Il est traité ici sous un double aspect, pratique et théorique.

Du point de vue pratique, une première partie présente un ensemble de quatre situations problèmes expérimentées dans de nombreuses classes. Les avantages mais aussi les inconvénients de chaque situation sont passés minutieusement en revue. Cette première partie comporte un minimum de commentaires permettant au lecteur de comprendre quelles positions théoriques ont mené à ces propositions. Le but est de permettre aux enseignants de comprendre les raisons du fonctionnement de ces situations afin de pouvoir les adapter à leur classe et en inventer d'autres.

Dans une deuxième partie, un approfondissement théorique est proposé sur des questions liées aux situations proposées : rôle de la figure en géométrie, rôle des conflits socio-cognitifs dans l'apprentissage.

Les auteurs appartiennent à une des équipes de l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (IREM) de Lyon. La présente étude prend la suite des travaux effectués par l'IREM sur le "problème ouvert".

