Intégration sur un segment

1

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ une fonction continue par morceaux. Pour tout réel λ on pose :
$$I_\lambda(f) = \int_a^b f(t)\mathrm{e}^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que $I_\lambda(f)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que le résultat est vrai est en général. (*Indication : établir le résultat pour une fonction en escalier, puis passer au cas général par approximation*).

2. Pour $n \in \mathbf{N}$, On pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que $I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sin t} - \dfrac{1}{t}$ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} f(t)\,\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t = 0$.
   (c) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$.

2 Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_a^b |f| = \left|\int_a^b f\right|$ si et seulement si f est de signe constant sur $[a,b]$.

3 Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ lorsque $n \to +\infty$. (Penser aux sommes de Riemann)

4

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles, g étant positive sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $\xi \in [a,b]$ tel que :
$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
   (a) Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 f(t) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\,\mathrm{d}t$.
   (b) Soit, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, c_k un élément de $\left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{k+1}{n}\right]$.

   Quelle est la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'(c_k)$ lorsque n tend vers $+\infty$?
   (c) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}(f(1)+f(0)) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Intégration sur un intervalle quelconque

5 Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

6 Soit f la fonction définie par $f(t) = \dfrac{1}{t} - \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{t}\right)$

1. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
2. Calculer, pour tout entier $k > 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} f(t)\,\mathrm{d}t$ puis en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

   (*On rappelle que :* $1 + \dfrac{1}{2} + \ldots + \dfrac{1}{n} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$).

7 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{tx} - 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de f.
2. Vérifier, pour $x > 0$ et $t > 0$, la relation $\dfrac{\sin t}{e^{tx} - 1} = \sin t \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-ntx}$ puis montrer que :
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2x^2}.$$
3. À l'aide d'une comparaison série-intégrale, montrer que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{2x}$.

Fonctions définies par une intégrale

8 Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

À l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'on a, lorsque $x \to +\infty$,
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x} + \mathrm{o}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{2x}\right).$$

(*On rappelle que :* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$).

9 On considère la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t^2 + 1}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbf{R}_+$, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et qu'elle vérifie, sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation différentielle :
$$\text{(E)} \qquad g'' + g = \frac{1}{x}$$
2. Soit la fonction $\varphi : x \mapsto \cos x \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que φ vérifie, sur $\mathbf{R}_+^*$, l'équation différentielle (E). En déduire qu'il existe deux réels A et B tels que :
   $$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad g(x) - \varphi(x) = A\cos x + B\sin x.$$
   (b) Montrer que $g = \varphi$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
3. Déduire de ce qui précède la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. (*Indication : on pourra remarquer que, pour* $0 < x < 1$, $\left|\sin x \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos t}{t}\,dt\right| \leqslant x|\ln x|$).

$\boxed{\mathbf{10}}$

1. (a) Soit $g : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue et (P_n) une suite de polynômes convergeant uniformément vers g sur $[a, b]$. Montrer que la suite $\left(\int_a^b P_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ converge vers $\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t$.

   (b) Soit f une fonction continue du segment $[a, b]$ dans $\mathbf{C}$, telle que $\int_a^b f(t)\,t^n\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer, en utilisant théorème de Weierstrass que f est nulle.

2. Dans cette question, f est une fonction continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{C}$. Lorsque s est dans $\mathbf{R}$, on pose, si l'intégrale existe,

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) On suppose que $\int_0^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ existe. Montrer que $\mathscr{L}(f)(s)$ existe pour tout réel $s \geqslant 0$ et que $\mathscr{L}(f)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$.

   (b) On suppose que $\mathscr{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe. Montrer que $\mathscr{L}(f)(s)$ existe pour tout réel $s \geqslant 0$. (*Indication : introduire la fonction* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *puis intégrer par parties.*)

   (c) On suppose que $\mathscr{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et que $\mathscr{L}(f)(s) = 0$ pour tout réel $s \geqslant 0$.

      i. Montrer que $\int_0^{+\infty} F(t)\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout réel $s > 0$.

      ii. En utilisant le changement de variable $u = \mathrm{e}^{-t}$ et le résultat de la question 1.b, montrer que f est nulle.