

Apprendre  
Quoi ?

IREM

Mathias  
Front

26 juin 2015

Marie-Line  
Gardes

Manipuler  
Quoi ?

Groupe DREAM

Des  
objets  
sensibles

Des objets  
familiers



Lyon 1





# La relation aux objets lors de l'action mathématique en classe.

Le cas de situations didactiques de recherche de problème autour des nombres et des pavages archimédiens du plan.

Manipuler pour ...

Objets ?

Savoirs ?

**Introduction**

Dimension  
expérimentale

Situation  
didactique de  
recherche de  
problème



Lyon 1



# L'agir en mathématique

- **Idée 1** : Pas d'ontologie en mathématiques.  
Les maths permettent d'anticiper et d'agir dans le monde et non de comprendre le monde ...
- **Idée 2** : Agir ce n'est pas faire des mathématiques, mais c'est par les maths qu'on peut anticiper, agir et créer.
- **Idée 3** : Les objets des mathématiques sont les objets que l'homme se donne. Faire des mathématiques c'est agir sur un objet constructif

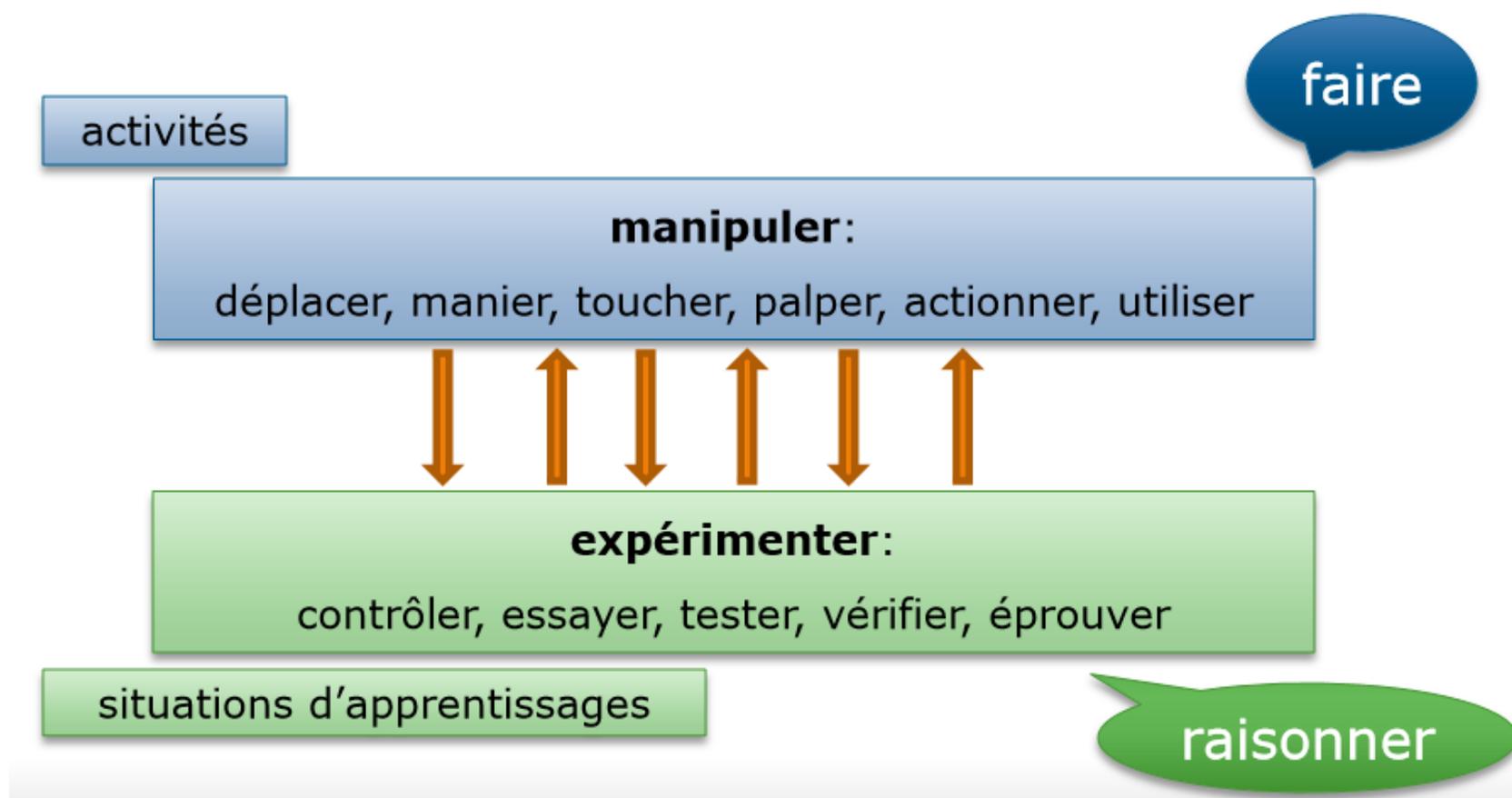
# Objets

- L'objet est tout ce que le sujet a expérimenté (personnes, objets physiques, événements, concepts, SP, etc.).
- L'objet mathématique est un objet construit.

Salanskis : le sens de l'objet mathématique pour les mathématiciens, se définit en partant de ce que vivent ces derniers, de ce qu'ils font et des règles qu'ils suivent. Conception méta-constructive

# Expérimentation (1/3)

L'expérimentation n'est pas la manipulation.



# Expérimentation (2/3)

L'expérimentation n'est pas l'expérience du monde (« expérience de »).

*L'expérimentation se distingue de l'expérience dans le sens où elle fait référence à une théorisation première pour justifier les questions que l'on se pose et pour ensuite construire un dispositif expérimental. Ainsi l'observation empirique ne se réduit pas à une simple constatation empirique, elle est une lecture de l'observation à travers une théorie. (Gardes, 2013)*

# Expérimentation (3/3)

- L'expérimentation s'appuie sur un double raisonnement, en amont pour élaborer une expérience pertinente et en aval pour la lecture des résultats. **Son rôle est de vérifier l'adéquation entre la théorie et l'expérience dans le but de créer de nouveaux objets mathématiques.**
- L'expérimentation c'est un processus dialectique empirique/théorique qui n'a de sens que par ses articulations avec la formulation et la validation

(Dias, 2008; Gardes, 2013)

# Savoirs

Les savoirs peuvent être vus (sont) comme des produits de l'action (Conne, 1999)

« Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible, il sait.

Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance, utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation »

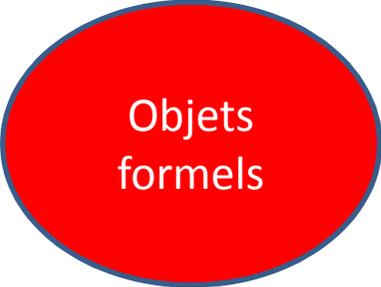
(Conne, 1992, p.236).

# Dimension expérimentale et relations aux objets



La multiplication des expériences, en appui sur **des** objets, des méthodes et des connaissances naturalisées pour le sujet, favorise l'élaboration de **nouveaux** objets conceptuels et de leurs propriétés, de résultats nouveaux et de leurs preuves, et contribue de manière essentielle au processus de conceptualisation.

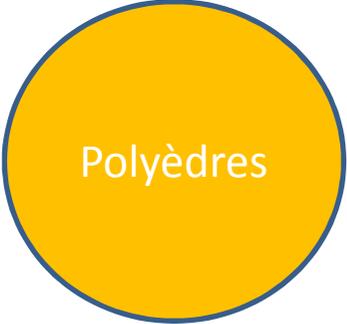
Durand-Guerrier 2006 ; Dias 2008



Objets  
formels

Recourir à **la dimension expérimentale en mathématiques**, c'est permettre et surtout multiplier les allers et retours entre les **objets** sensibles ou familiers et formels par :

- des confrontations (adéquation, non adéquation),
- des vérifications (confirmer ou infirmer une hypothèse),
- des argumentations (prouver un raisonnement, convaincre dans un débat)



Polyèdres

T. Dias

# Situation Didactique de Recherche de Problème

- **Un problème mathématique** : une question robuste portant sur des objets mathématiques que se pose un individu
- Une situation didactique, c'est à dire une situation où *le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible.*
- où le projet commun de l'enseignant et des élèves est **avant tout l'engagement dans la résolution du problème proposé et l'élaboration de résultats au moins partiels,**
- qui soit **une situation d'apprentissage**, c'est à dire une situation où l'élève fasse fonctionner ses connaissances et où la réponse initiale que l'élève envisage à la question posée *doit seulement permettre de mettre en œuvre une stratégie de base à l'aide de ses connaissances anciennes; mais très vite, cette stratégie devrait se révéler suffisamment inefficace pour que l'élève soit obligé de faire des accommodations, c'est à dire des modifications de son système de connaissances, pour répondre à la situation proposée.*
- où la dimension expérimentale est fortement présente.

M3 : Milieu de construction		P3 : P-noosphérique	S3 : situation noosphérique	sur
M2 : Milieu de projet		P2 : P-constructeur	S2 : situation de construction	didac
M1 : Milieu didactique	E1 : E-réflexif	P1 : P-projeteur	S1 : situation de projet	tique
<b>M0 : Milieu d'apprentissage : institutionnalisation</b>	<b>E0 : Élève</b>	<b>P0 : Professeur enseignant</b>	<b>S0 : situation didactique</b>	
M-1 : Milieu de référence : formulation validation	E-1 : E-apprenant	P-1 : P régulateur	S-1 : situation d'apprentissage	a
M-2 : Milieu objectif : action	E-2 : E-agissant	P-2 : P-observateur, dévot	S-2 : situation de référence	didac
M-3 : Milieu matériel	E-3 : E-objectif	P-3 : P-organisateur du milieu matériel	S-3 : situation objective	tique

## Structuration des milieux

Objets  
sensibles

Sémiotique  
de Pierce

Une situation autour  
du problème des  
pavages du plan

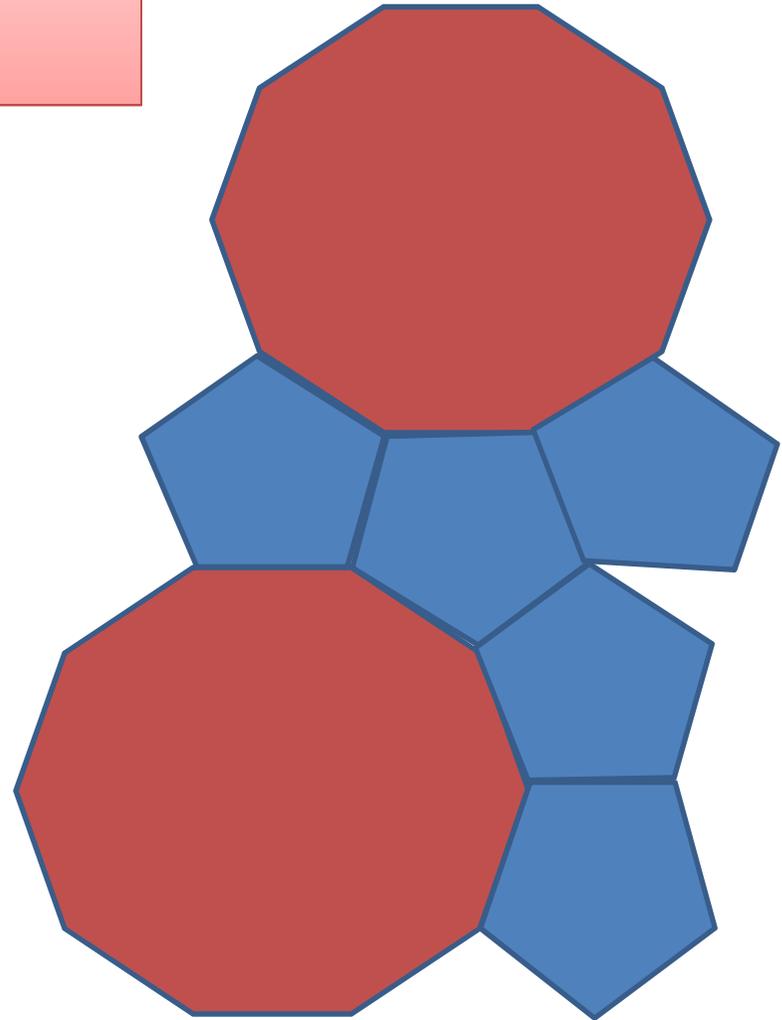
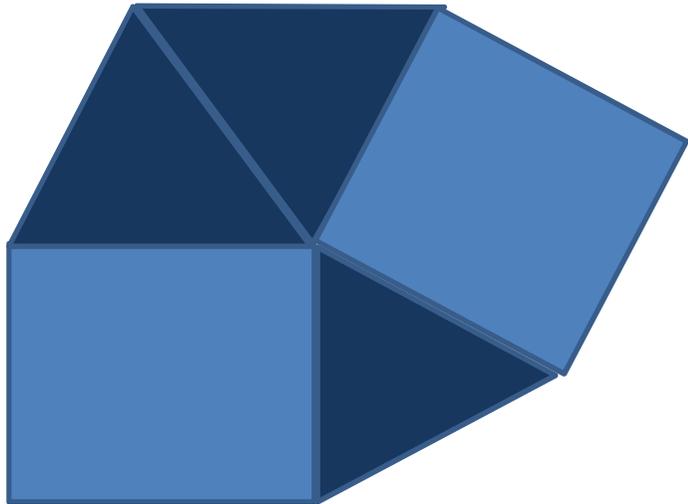
Chez des  
élèves

(Front, 2012)

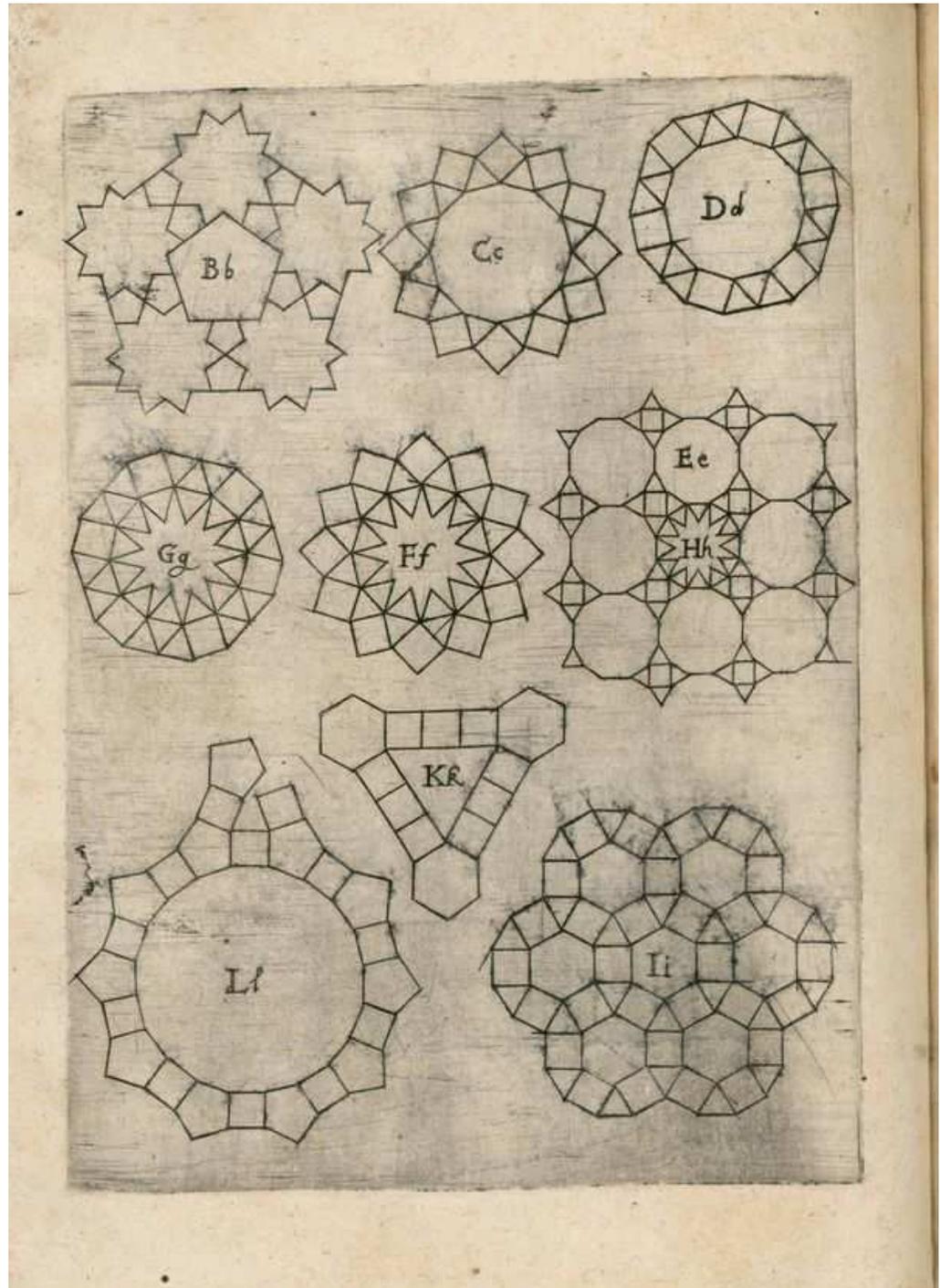


Lyon 1

Il s'agit d'explorer les pavages  
du plan avec des polygones  
réguliers

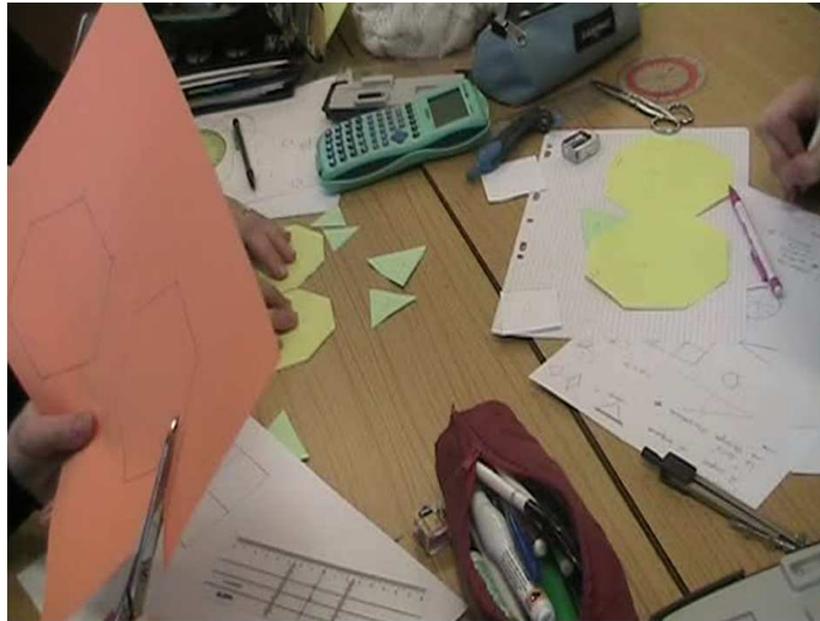


L'objet « pavage du plan avec des polygones réguliers », même convexes et stricts est moins simples qu'il n'y paraît à première vue. Le problème est toujours ouvert pour la communauté mathématique.





## Extrait 1 : Congruence des longueurs.



## Extrait 2 : Limitation des manipulations et aspect global.



- Diversité des manipulations
- Un objet en évolution
- La dimension dynamique des processus



# Éléments de la sémiotique de Peirce

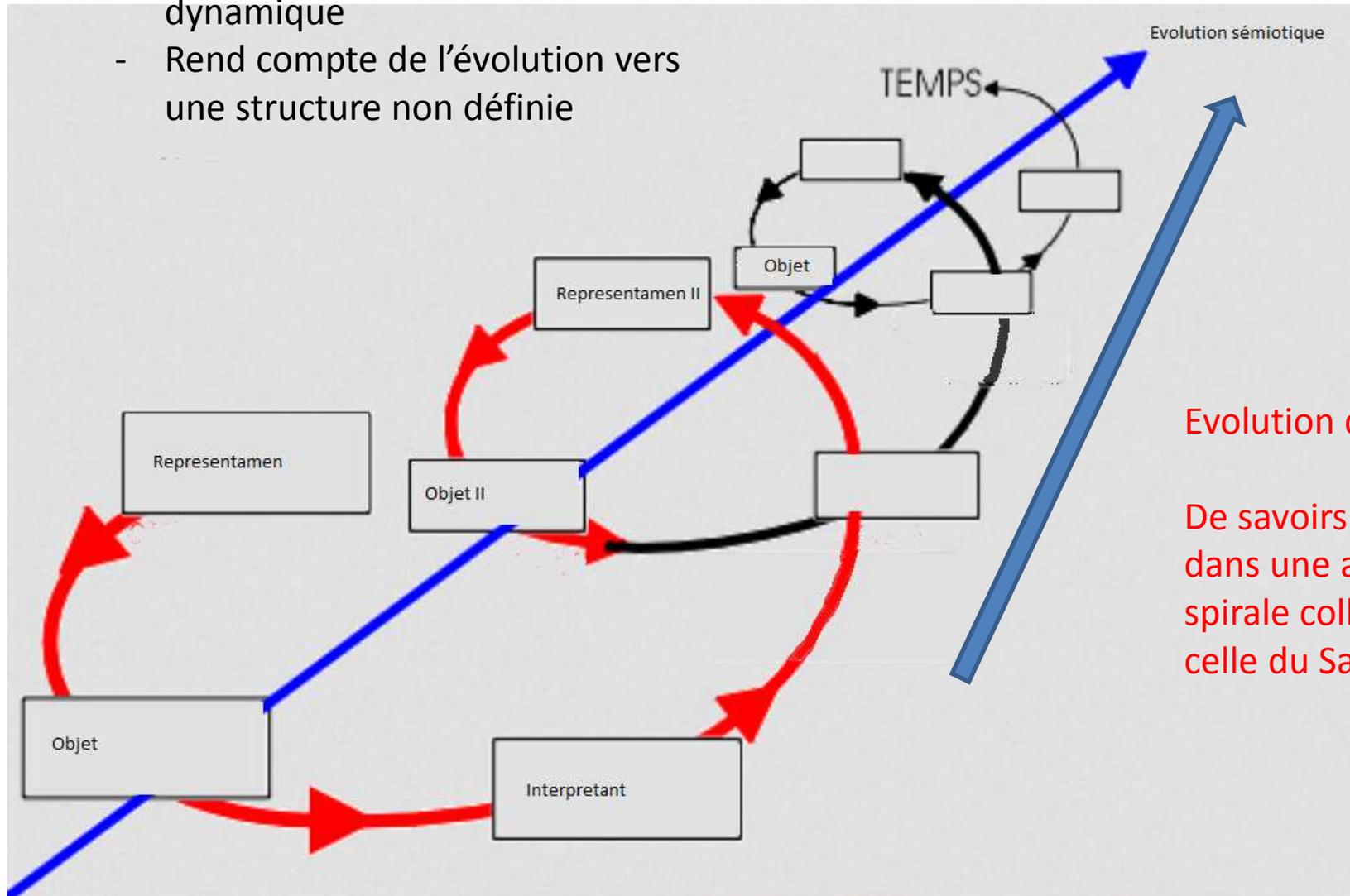
- Une théorie **générale** :
  - qui envisage à la fois la vie émotionnelle, pratique et intellectuelle
- Une théorie **triadique** :
  - qui repose sur trois catégories philosophiques : la priméité, la secondéité et la tiercéité ;
  - qui met en relation trois termes : le représentamen, l'objet et l'interprétant.
- Une théorie **pragmatique**, c'est-à-dire :
  - qui prend en considération le contexte de production et de réception des signes ;
  - qui définit le signe par son action sur l'interprète.

La sémiotique de Pierce pour prendre en compte la dynamique des situations.

Le representamen, pris en considération par un interprète, a le pouvoir de déclencher un interprétant, qui est un representamen à son tour et renvoie, par l'intermédiaire d'un autre interprétant, au même objet que le premier representamen, permettant ainsi à ce premier de renvoyer à l'objet. Et ainsi de suite, à l'infini...

# Proposition d'étude

- Évolution sémiotique dans l'action
  - Rend compte de la dimension dynamique
  - Rend compte de l'évolution vers une structure non définie



Evolution de quoi ?

De savoirs (Conne)  
dans une autre  
spirale collective,  
celle du Savoir ?

# Une étude de l'avancement d'une situation par la sémiotique

- La sémiotique envisage 10 types de signes
- Cette catégorisation permet une étude de l'évolution d'une sémiotique mais permet également d'anticiper une avancée du temps didactique

R	O	I	Signe	Illustration
1	1	1	Qualisigne iconique rhématique	L'empreinte d'un pied sur le sable comme pure forme
2	1	1	Sinsigne iconique rhématique	L'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme l'empreinte de n'importe quel pied
2	2	1	Sinsigne indiciel rhématique	
2	2	2	Sinsigne indiciel dicent	L'empreinte d'un pied sur le sol reconnue comme le passage d'un individu
3	1	1	Légisigne iconique rhématique	
3	2	1	Légisigne indiciel rhématique	
3	2	2	Légisigne indiciel dicent	
3	3	1	Légisigne symbolique rhématique	
3	3	2	Légisigne symbolique dicent	
3	3	3	Légisigne symbolique argumental	L'empreinte d'un pied sur le sable reconnue comme le passage d'un individu dont l'empreinte a été identifiée précédemment dans une base de données et qui va par un raisonnement permettre au détective d'adopter un comportement conforme à l'hypothèse qu'il a pu émettre

## Du qualisigne iconique rhématique au sinsigne indiciel dicent : la construction de la tâche

- Un pavage comme pure forme éventuellement producteur d'une émotion : qualisigne iconique rhématique
- La reconnaissance d'un pavage comme icône de pavages : le sinsigne iconique rhématique
- L'objet peut faire l'objet d'expériences : sinsigne indiciel rhématique
- Qui permettent alors à l'objet d'être dit et à la communication de se faire : sinsigne indiciel dicent

Il s'agit de manipuler des pavages archimédiens du plan.

## Du légisigne iconique rhématique au légisigne indiciel dicent : la construction du problème...

- Ce que le milieu renvoie commence à être interprété comme une règle : Les pavages s'organisent suivant des règles. Les légisignes iconiques rhématiques
- Le signe devient indiciel rhématique puis dicent quand la loi générale fonde le signe. Une règle structure les pavages archimédiens du plan. Il s'agit maintenant de l'explorer.

Le problème est construit. Du point de vue didactique, le sujet est confronté à un milieu adidactique réel.

## Du légisigne symbolique rhématique à l'argument : la construction de la règle

- légisignes symboliques dicents, quand la loi est présente et opératoire c'est à dire régit les objets.
- légisignes symboliques argumentaux, quand ils portent la raison de leur vérité ou de leur fausseté.

# A noter

- Particulièrement intéressant pour les niveaux les plus bas de la signification qu'on a parfois tendance à négliger.
- Il n'y a pas en général une sémiologie unique permettant d'avancer dans la résolution du problème
- Dans un problème de recherche les sémiologies n'aboutissent pas à un terme

# Quelques légisignes.

Front (2010)

- Les longueurs des côtés sont congruentes
- La somme des angles autour d'un nœud vaut  $360^\circ$
- Il y a au moins trois polygones autour d'un nœud
- Il y a au plus 6 polygones autour d'un nœud
- Il y a au plus trois types de polygones différents autour d'un nœud
- Dans un pavage semi-régulier d'ordre 3, de type  $(x, y, z)$ , si  $z$  est impair, alors  $x = y$ .
- Si  $n_i$  est le nombre de côté du polygone  $P_i$  et  $k$  le nombre de polygones autour d'un nœud on a :

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1.$$

- **Il y a 11 pavages archimédiens (ou 1-réguliers...)**

Objets  
familiers

Chez un  
chercheur

Une situation  
autour de la  
conjecture d'Erdős-  
Straus

(Gardes, 2013)

Chez des  
élèves

Dimension  
expérimentale et  
gestes de la  
recherche



Lyon 1



# Situation didactique de recherche autour de la conjecture d'Erdős-Straus

- Un problème mathématique :

Pour tout entier naturel  $n > 1$ , il existe trois entiers naturels non nuls  $x$ ,  $y$  et  $z$  tels que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

- Un objet à explorer : les solutions de cette équation ( $O_{initial}$ )
- $O_i$  = l'objet initial enrichi de propriétés, produits de gestes de la recherche

Dans les recherches d'un chercheur

$O_{initial}$  :  $n$  est un nombre entier supérieur ou égal à 2

$O_1$  :  $O_{initial}$  + propriété ( $n$  est un nombre premier)

Sous problème :  
décomposition de  $4/n$  en somme de 2 fractions

$O_2$  :  $O_1$  + propriété  
 $n$  est un nombre premier non congru à 1 et 17 modulo 24  
 $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + 1$  ;  $y = E\left(\frac{1}{\frac{4-1}{n x}}\right) + 1$  et  $z = \frac{1}{n x y}$

$O_{intermédiaire}$  :  $n$  est un nombre premier non pythagoricien  
 $4m - 1, m$  entier naturel

$O_3$  :  $O_2$  + propriété  
 $n$  est un nombre premier non congru à 1 modulo 24

$O_4$  :  $O_3 + O_{intermédiaire}$  + propriété  
 $n$  est un nombre premier non congru à 1 modulo 12 ;  
 $x = E\left(\frac{n}{4}\right) + a$  ;  $y = E\left(\frac{1}{\frac{4-1}{n x}}\right) + b$  et  $z = \frac{1}{n x y}$  ;  $a$  et  $b$  entiers naturels

Algorithmes

$O_5$  :  $O_4$  + propriété  
 $n$  est un nombre premier non congru à 1 modulo 12 ;  $x = kn$

$O_6$  : Soit  $n$  un nombre premier. S'il existe  $m, d$  deux entiers non nuls tels que  $d$  divise  $m^2$  et  $4m - 1$  divise  $n + 4d$  alors  $n$  est solution de l'équation d'Erdős-Straus :  $\frac{4}{n} = \frac{1}{mn} + \frac{4m-1}{mn+d} + \frac{(4m-1)d}{(mn+d)mn}$

# Gestes de la recherche (1/3)

- **Geste naturel** : manipulation de signes (des chiffres, des symboles algébriques ou des figures géométriques, etc.)
  - *Associer des polygones*
- **Geste combinatoire** : geste naturel qui s'effectue dans un milieu propre au travail mathématique - un geste sur des signes soumis à des règles d'emploi
  - *Associer des polygones avec la règle « des nœuds »*
- **Geste opératoire** : un procédé ou une opération sur des objets mathématiques
  - *Associer des polygones avec la règle « des nœuds » et réaliser un pavage archimédiens du plan*

# Gestes de la recherche (2/3)

Un geste est un acte de mise en relation d'objets mathématiques dans une intentionnalité. C'est une opération qui s'accomplit en s'incarnant dans une combinaison de signes, soumise aux règles d'emploi de ces signes. Il possède un pouvoir de créer dans sa possibilité d'ouvrir le champ des possibles dans le travail mathématique, en saisissant l'intuition au moyen d'un geste dans l'expérience. (Gardes, 2013)

## Fonction du geste de la recherche :

Outil pour décrire et analyser l'activité mathématique effective d'un sujet (mathématicien, étudiant, élève) confronté à la recherche d'un problème.

La notion de geste de la recherche met en évidence :

- la manière dont un sujet agit sur le problème afin d'avancer dans son étude ;
- le rôle de l'intuition ;
- le processus dialectique connaissances/heuristiques ;
- le rôle de la dimension expérimentale.

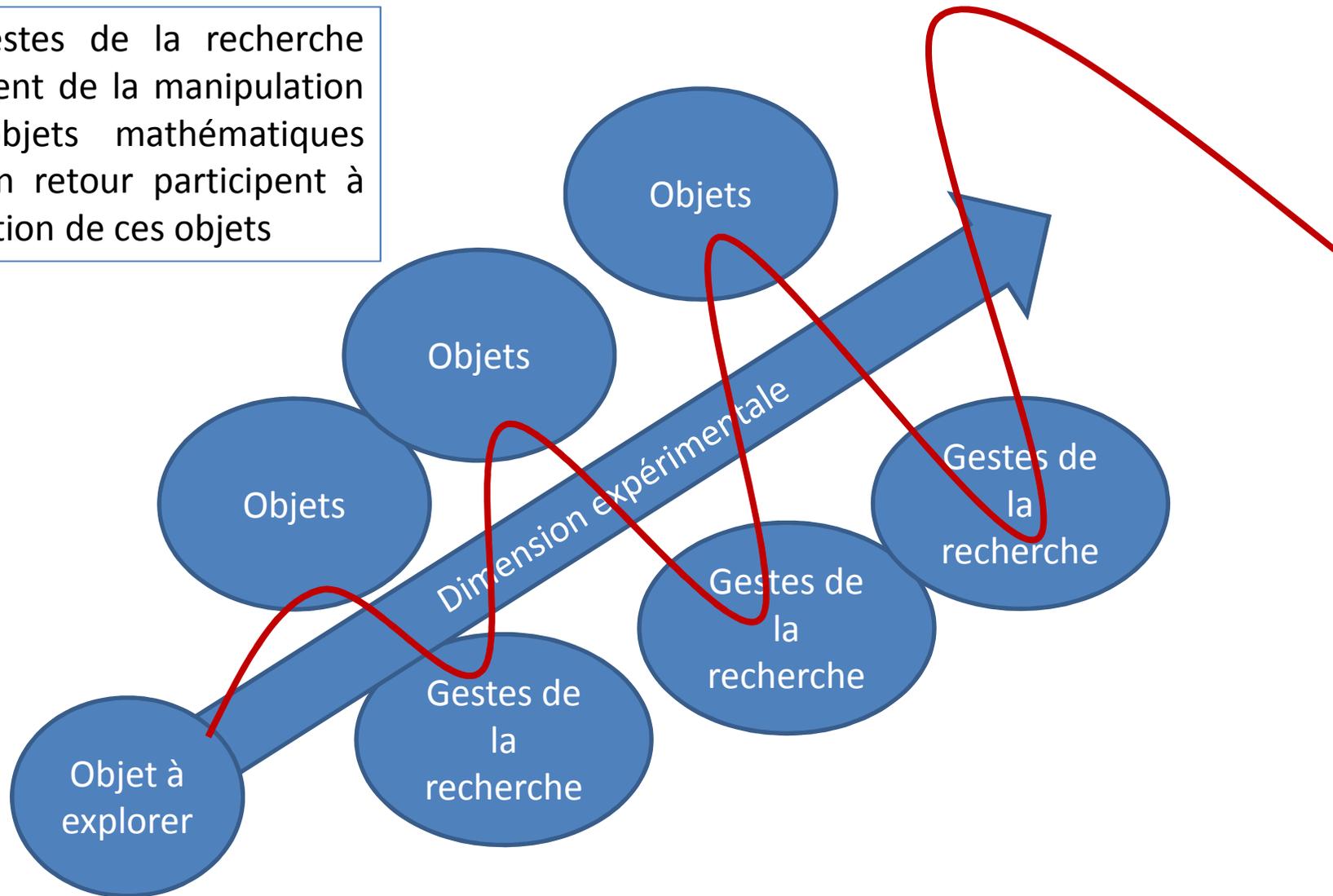
# Gestes de la recherche (3/3)

Sept gestes de la recherche pour la conjecture d'Erdős-Straus

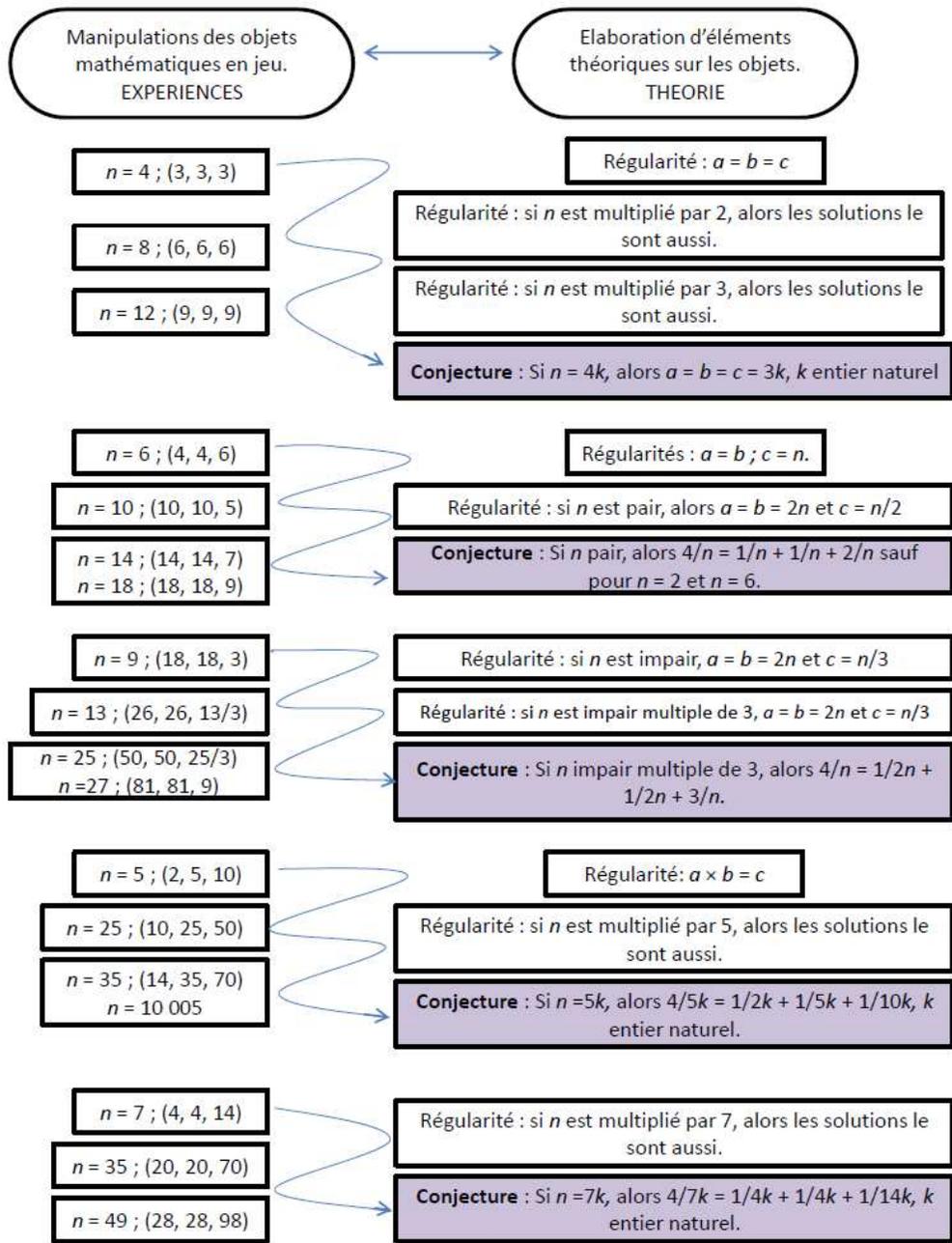
- Réduire le problème aux nombres premiers
- Designer des objets
- Introduire un paramètre
- Construire des exemples et les questionner
- Effectuer des contrôles locaux
- Transformer l'équation initiale
- Implémenter un algorithme

# Gestes de la recherche Relations aux objets

Les gestes de la recherche émergent de la manipulation des objets mathématiques puis en retour participent à l'évolution de ces objets



La démarche de recherche de type expérimental du groupe 3 –  
Séances 1 et 2



Dans les recherches d'élèves

$O_{initial}$  :  $n$  est un nombre entier supérieur ou égal à 2

$O_1$  :  $O_{initial}$  + propriété  $n$  est un multiple de 4

$O_2$  :  $O_1$  + propriété  $n$  est un multiple de 2

$O_3$  :  $O_2$  + propriété  $n$  est un multiple de 3

$O_4$  :  $O_3$  + propriété  $n$  est un multiple de 5

$O_5$  :  $O_4$  + propriété  $n$  est un multiple de 7

Travail sur les objets

$$\frac{4}{113} = \frac{1}{29} + \frac{2}{3277}$$

$$\frac{4}{127} = \frac{1}{32} + \frac{1}{818} + \frac{1}{8128}$$

$$\frac{4}{131} = \frac{1}{33} + \frac{1}{866} + \frac{1}{8646}$$

$$\frac{4}{137} = \frac{1}{35} + \frac{6}{9590} + \dots = \frac{1}{35} + \frac{1}{9590} + \frac{1}{1918}$$

$$\frac{4}{149} = \frac{1}{38} + \frac{1}{5662} + \frac{1}{7831}$$

$$\frac{4}{241} = \frac{1}{61} + \frac{3}{14701} + \dots = \frac{1}{61} + \dots$$

$$(4 | \boxed{73} | 89) \quad \dots \quad 113 \quad \boxed{193} \quad 203 \quad \boxed{241} \quad (281)$$

Handwritten calculations and diagrams:

- Diagram with nodes: 73, 193, 241, 7, 19, 71x281
- Diagram with nodes: 4, 168, 1/2, 4, 1/6
- Diagram with nodes: 120, 5!, 60, 41
- Diagram with nodes: 120, 48, 7, 1, 10, 11

Recherche de régularités

$$73$$

$$4! = 24$$

$$5! = 120$$

$$6! = 720$$

73 ≡ 1 (24)

193 ≡ 1 (24)

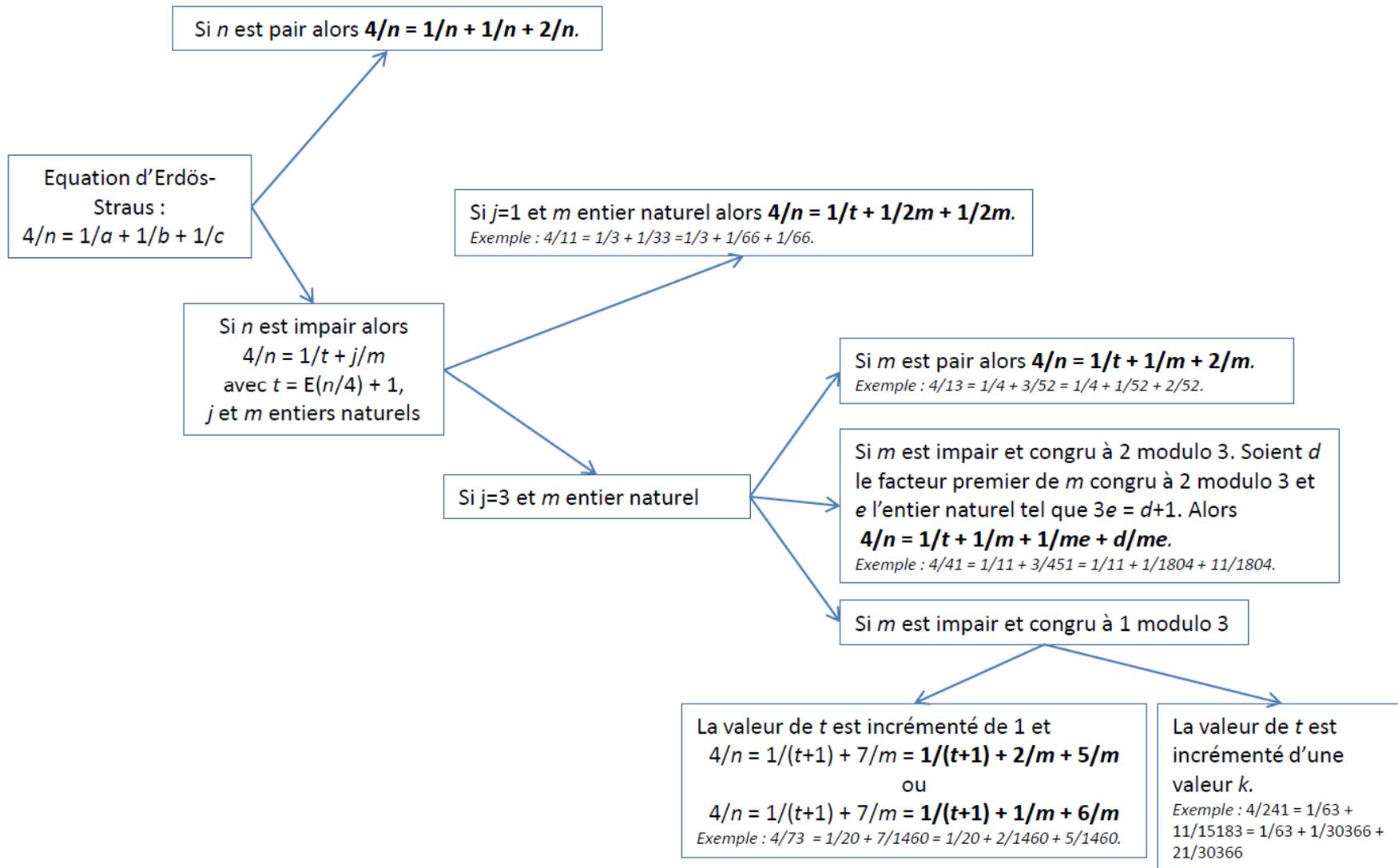
241 ≡ 1 (24)

$$73 \equiv 73 (120)$$

$$193 \equiv 73 (120)$$

$$241 \equiv 1 (120)$$

## Méthode finale de décomposition du groupe 3



$O_{final} : O_i$  + propriété ( $n$  est un nombre premier supérieur à 300 non congru à 1 modulo 24)

# Bibliographie

- Cassou-Noguès, P. (2001). De l'expérience mathématique. Essai sur la philosophie des sciences de J. Cavailles. Paris : VRIN
- Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherche en didactique des mathématiques*, 12/2.3 :221–270.
- Conne, F. (1999). Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne. *Le cognitif en didactique des mathématiques*, 31-69.
- Dias, T. (2008). La dimension expérimentale des mathématiques : un levier pour l'enseignement et l'apprentissage. *Thèse de doctorat*, Université Claude Bernard Lyon 1.
- Dias, T. (2014). Manipuler et expérimenter en mathématiques. Conférence DSDEN de la Moselle, circonscription de Metz. Janvier 2014. Consulté sur <http://www4.ac-nancy-metz.fr/ien57yutz/spip.php?article533> le 25/06/15.
- Durand-Guerrier, V. (2006). La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In L. Trouche, V. Durand-Guerrier, C. Margolinas, & A. Mercier (Eds.), *Actes des journées mathématiques de l'INRP* (p. 17-23). INRP.
- Front, M. (2012). Pavages semi-réguliers du plan, une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM* 89, 5-37.
- Gardes, M.-L. (2013). Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres. *Thèse de doctorat*, Université Lyon 1.
- Muller, A. (2004). Approche sémiotique pour l'analyse a priori d'une tâche mathématique. In *Christiane Moro et René Rickenmann, Situation éducative et significations*. De Boeck Supérieur « Raisons éducatives ».
- Peirce, C. (1978). *Écrits sur le signe*.
- Salanskis, J.-M. (2008). *Philosophie des mathématiques*.