GEOGEBRA ET SES UTILISATIONS POUR LA CLASSE

Stage de formation continue second degré
Code : 20190236

Animé par les membres du groupe IREM « Mathématiques dynamiques »

Organisation : 1 jour – expérimentation – ½ journée

Lieu : campus de La Doua à Villeurbanne (IREM de Lyon)
En attente de la salle en bâtiment Ariane ou Grignard a priori

Public : enseignants (en mathématiques) de collège et de lycée ayant déjà quelques connaissances sur les manipulations de base de Geogebra

Description (du PAF) : Découvrir et utiliser les outils de Geogebra pour construire des séances où Geogebra va servir à différentes fins : video-projection pour compréhension d'une notion, utilisation pour conjecturer, pour valider ou non des résultats, utilisation comme exerciseur, Geogebra un outil de différentiation.

Objectifs

- Présenter aux collègues des bases techniques pour créer des activités
- Montrer plusieurs types d'utilisation en classe ou en dehors de la classe.
- Instaurer de bonnes pratiques avec la classe

Pourquoi travailler avec Geogebra ?

Au collège comme au lycée, la création d'images dynamiques et leur visualisation permettent aux élèves de comprendre des notions avant une étude approfondie dans le cours. Les élèves construisent leur propre savoir, sont les acteurs de leurs apprentissages et participent à leur formation.

Pour le lycée, comme l'indique le programme de maths spécialité première :

« La diversité des activités mathématiques proposées doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique…

L'utilisation de logiciels , d'outils de visualisation et de représentation, développe la possibilité d'expérimenter, favorise l'interaction entre l'observation et la démonstration. »

L'utilisation régulière peut intervenir :

- en classe, avec un dispositif de visualisation collective, à l'occasion de la résolution d'exercices ou de problèmes ;
- dans le cadre du travail personnel des élèves hors du temps de classe (par exemple au CDI, à un autre point d'accès au réseau local ou à la maison).

Moyens

- Deux salles informatiques pour différencier les interventions sur des activités ciblées pour le collège ou le lycée.

- Présentation d'activités testées avec nos classes qui balayent les différents thèmes du programme.
  Fichiers Geogebra à reproduire pour découvrir les différentes possibilités du logiciel.

- Aide à la création d'activité(s) et expérimentation, retour d'expérimentation
  Les stagiaires échangent sur des points de la didactique des mathématiques, selon le thème choisi.

- Utilisation de la plateforme M@gistère : dépôt de documents (avant, pendant et après le stage), aide et suivi pour l'expérimentation, forum de discussion.

- Ouvertures pour du travail transdisciplinaire à partir de différents thèmes (femmes et mathématiques, maths et art, Visions du monde)

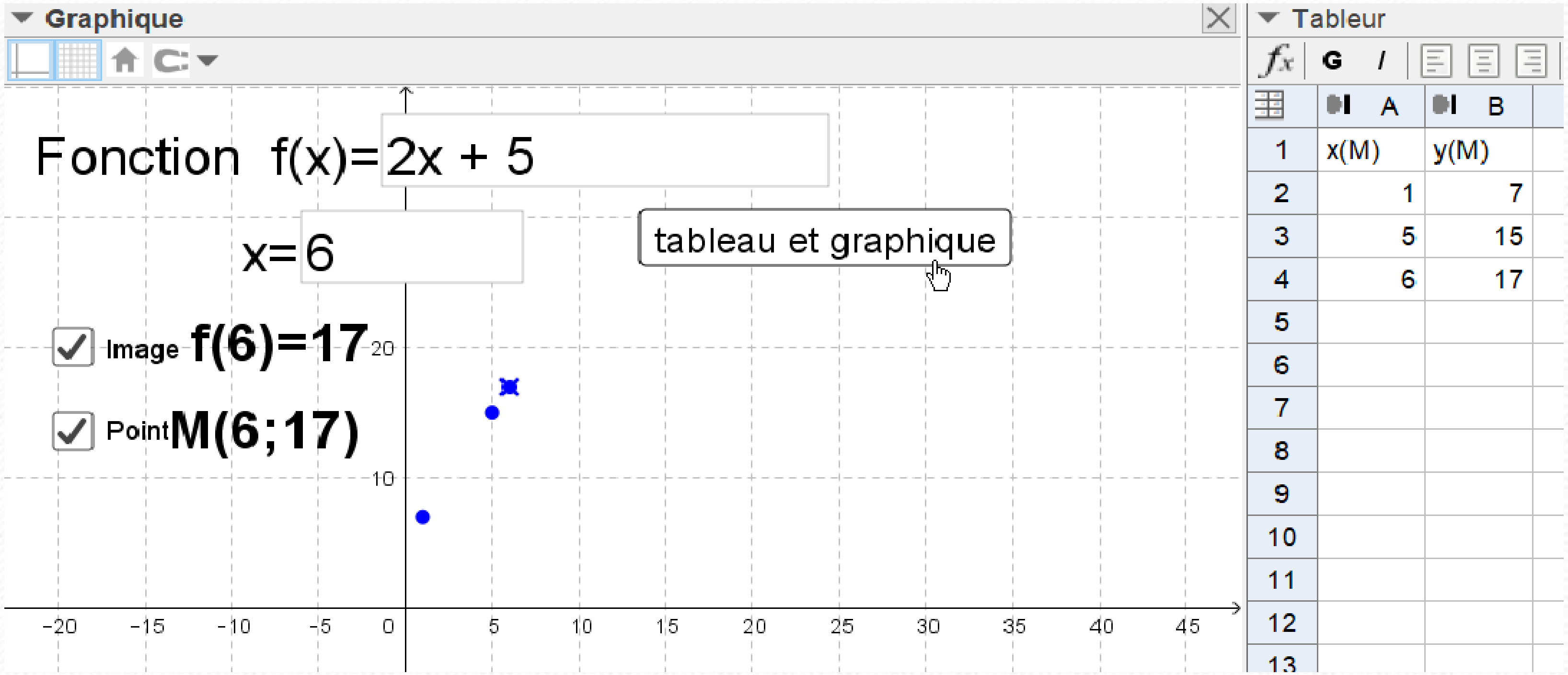
Fonctionnalités travaillées

- Utilisation des deux fenêtres graphiques
- Découverte et utilisation du protocole de construction
- Constructions plus poussée avec la ligne de commande
- Utilisation de curseur, texte, champ de texte, booléen (boîte de sélection)
- Utilisation de listes
- Lieu d'un objet
- Propriétés de objets (gestion poussée des couleurs, des affichages)
- Tableur (utilisation, enregistrement de données, statistiques, lien avec le graphique)
- Outils de statistiques et de probabilités *(notamment pour s'affranchir de toute technicité calculatoire lors de la résolution de problèmes plus complexes)*
- Calcul formel
- Utilisation de scripts avec ou sans boutons
  - Permet la création d'exerciseurs
  - Permet la création d'interdépendance entre les objets
- Création d'outil (macro)
- Complexes (si besoin)
- 3D (manipulations, constructions, patron, lien avec la 2D, affichage d'un plan dans une fenêtre 2D)

Exemples d’activités (1/4)

- Grapheur de fonction

Créer la représentation graphique point par point avec calcul des images, trace du point, enregistrement dans le tableur.



Lien : https://www.geogebra.org/m/u2zyanyq

Exemples d’activités (2/4)

- Repérage dans un pavé :

Introduire le repérage dans un pavé à partir de la situation suivante

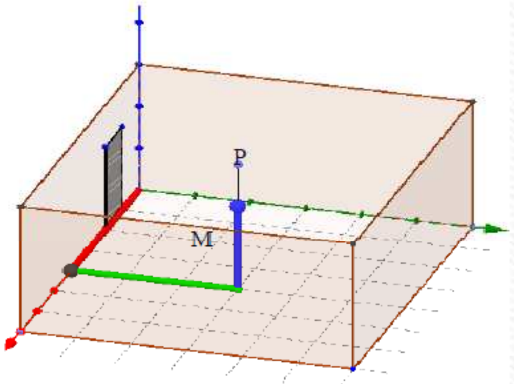
un mobile est suspendu au plafond de la salle de classe et on souhaite placer un mobile identique au même endroit dans une autre salle de mêmes dimensions ; comment faire ?

1. Modélisation de la salle par un parallélépipède rectangle de dimensions 7m, 6m et 3m.

1) Ouvrir la fenêtre Graphique 3D.
Dans les préférences Graphiques 3D, cocher "branche D/H seulement" pour les 3 axes.
Construire le pavé droit de dimensions 6, 7 et 3 dont un des sommets est l'origine du repère.

2) Placer un point P au plafond.
Placer le point P' te que (PP') soit perpendiculaire au sol.
Placer un point M sur le segment [PP'].
Tracer le segment [PM].

Remarque : afin que les coordonnées du point M soient entières, on peut activer l’aimantation des points à la grille en cliquant sur le petit aimant du bandeau supérieur de la fenêtre Graphique 3D.



2. Visualisation des coordonnées du point M.

Exemples d’activités (2/4)

- Repérage dans un pavé :

Introduire le repérage dans un pavé à partir de la situation suivante

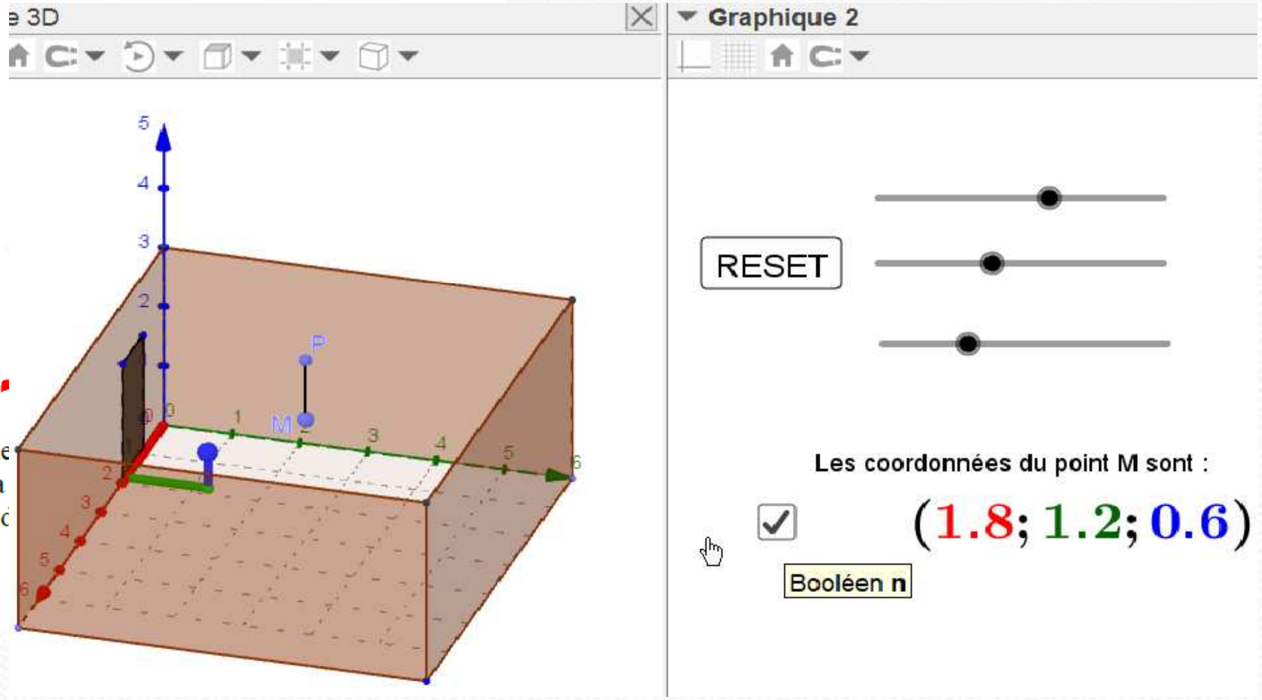
un mobile est suspendu au plafond de la salle de classe et on souhaite placer un mobile identique au même endroit dans une autre salle de mêmes dimensions ; comment faire ?

1. Modélisation de la salle par un parallélépipède rectangle de dimensions 7m, 6m et 3m.

1) Ouvrir la fenêtre Graphique 3D.
Dans les préférences Graphiques 3D, cocher "branche D/H seulement" pour les 3 axes.
Construire le pavé droit de dimensions 6, 7 et 3 dont un des sommets est l'origine du repère.

2) Placer un point P au plafond.
Placer le point P' te que (PP') soit perpendiculaire au sol.
Placer un point M sur le segment [PP'].
Tracer le segment [PM].

Remarque : afin que les coordonnées du point M soie
entières, on peut activer l’aimantation des points à la
en cliquant sur le petit aimant du bandeau supérieur d
fenêtre Graphique 3D.



2. Visualisation des coordonnées du point M.

Lien vers le fichier Geogebra : https://www.geogebra.org/m/yunukevt

Exemples d’activités (3/4)

- Quelques activités utilisant le calcul formel

ACTIVITE 1 : TRIPLETS PYTHAGORICIENS

Le Problème *(d’après des collègues de l’académie de Nantes)*

1. Que peut-on dire d’un triangle dont les côtés mesurent 3, 4, et 5 cm?
2. Est-ce le cas pour un triangle dont les côtés mesurent 5, 6, 7 cm?
   Des nombres entiers qui se suivent, comme dans les exemples précédents, sont appelés entiers consécutifs. Le problème que l’on se pose est le suivant :
   « Existe-t-il d’autres triplets d’entiers naturels consécutifs qui sont les longueurs d’un triangle rectangle ? »
3. **Conjecture à l’aide d’un tableur**
   a. Ouvrir le logiciel GeoGebra et afficher la fenêtre Tableur :

	A	B	C	D
1	Premier entier	Deuxième entier	Troisième entier	Différence
2	1	2	3	=A2^2+B2^2-C2^2

   b. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :
   c. Dans la cellule A3, entrer la formule =A2+1. Puis "tirer" cette formule sur les cellules B3 et C3.
   d. Compléter le tableau automatiquement pour répondre à la question :
   Existe-t-il d’autres triplets de Pythagore dans les 100 premiers triplets ?

4. **Preuve avec le logiciel de calcul formel**
   a. On va essayer de raisonner dans le cas général en désignant les nombres par des lettres. Si on note n le premier entier du triplet, comment se notent les deux autres entiers suivants ?
   b. Ouvrir la fenêtre de calcul formel de GeoGebra.
   c. Développer l’expression $n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2$

Calcul formel

1 Développer[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2]
→ $n^2 - 2n - 3$

   d. Savez-vous résoudre l’équation $n^2 - 2n - 3 = 0$?
   e. -1 est-il solution de cette équation ?

Substituer[n^2-2n-3,n,-1]
→ 0

   f. Existe-t-il d’autres solutions ?
   Que répond un logiciel de calcul formel ?

3 Résoudre[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2=0]
→ $\{n = 3, n = -1\}$

   g. Conjecturer une factorisation de $n^2 - 2n - 3$.
   Vérifier ou réfuter votre conjecture à l’aide du calcul formel.

2 Factoriser[n^2-2n-3]
→ $(n+1)(n-3)$

Exemples d'activités (3/4)

- Quelques activités utilisant le calcul formel

ACTIVITE 1 : TRIPLETS PYTHAGORICIENS

Le Problème *(d'après des collègues de l'académie de Nantes)*

1. Que peut-on dire d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4, et 5 cm?
2. Est-ce le cas pour un triangle dont les côtés mesurent 5, 6, 7 cm?
   Des nombres entiers qui se suivent, comme dans les exemples précédents, sont appelés entiers consécutifs. Le problème que l'on se pose est le suivant :
   « Existe-t-il d'autres triplets d'entiers naturels consécutifs qui sont les longueu
3. **Conjecture à l'aide d'un tableur**
   a. Ouvrir le logiciel GeoGebra et afficher la fenêtre Tableur :

	A	B	C	D
1	Premier entier	Deuxième entier	Troisième entier	Différ
2	1	2	3	=A2^2+B2^2-C2^

   b. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :
   c. Dans la cellule A3, entrer la formule =A2+1. Puis "tirer" cette formule sur le
   d. Compléter le tableau automatiquement pour répondre à la question :
   Existe-t-il d'autres triplets de Pythagore dans les 100 premiers triplets ?

4. **Preuve avec le logiciel de calcul formel**
   a. On va essayer de raisonner dans le cas général en désignant les nombres p premier entier du triplet, comment se notent les deux autres entiers suivants
   b. Ouvrir la fenêtre de calcul formel de GeoGebra.
   c. Développer l'expression $n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2$

   Calcul formel
   1 Développer[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2]
   → $n^2 - 2n - 3$

   d. Savez-vous résoudre l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$?
   e. -1 est-il solution de cette équation ?

   Substituer[n^2-2n-3,n,-1]
   → 0

   f. Existe-t-il d'autres solutions ?
   Que répond un logiciel de calcul formel ?

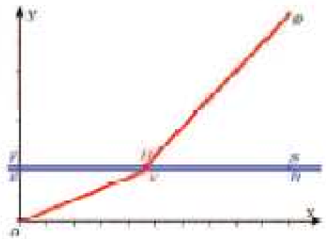
   3 Résoudre[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2=0]
   → $\{n = 3, n = -1\}$

   g. Conjecturer une factorisation de $n^2 - 2n - 3$.
   Vérifier ou réfuter votre conjecture à l'aide du calcul formel.

   2 Factoriser[n^2-2n-3]
   → $(n+1)(n-3)$

ACTIVITE 2 : LA PASSERELLE

Une municipalité décide de relier les points $O(0;0)$ et $B(1000;410)$ par un chemin (l'unité est le mètre). Ceci nécessite le franchissement d'une rivière, large de 10 m, matérialisée par les droites (ER) et (FS), les points étant définis par leurs coordonnées $E(0;100)$, $F(0;110)$, $R(1000;100)$ et $S(1000;110)$.
Il est décidé de construire une passerelle perpendiculaire aux berges, schématisée par le segment $[HK]$, où K appartient au segment $[ER]$ et H appartient au segment $[FS]$. Le trajet pour aller de O vers B est donc $(OKHB)$.
On prend pour variable l'abscisse x du point K $(0 \leq x \leq 1000)$.



Objectif : Minimiser le coût de ce chantier.

1. Exprimer en fonction de x les longueurs OK et HB. Existe-t-il une valeur de x telle que $OK = HB$?

Le coût de construction pour les chemins $[OK]$ et $[HB]$ est de 350 euros le mètre, et le coût de la passerelle est de 45 000 euros.

2. Montrer que le coût total du chantier, noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 350\sqrt{x^2 + 10^4} + 350\sqrt{(x-1000)^2 + 9 \times 10^4} + 45\,000.$$

Calculer ce coût, à l'euro près, pour les 3 positions suivantes de K : K placé en E, K placé en R, et K milieu de $[ER]$.

3. (a) Calculer la dérivée de la fonction C.
   (b) Montrer que l'équation $C'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 250x - 125\,000 = 0$ et $x \geq 0$; résoudre cette équation.
   (c) Donner le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0; 1000]$; en déduire qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle le coût total du chantier est minimum, et calculer ce minimum.

Comment modifier cet exercice pour intégrer l'utilisation de Geogebra ?

Remarque : on peut démontrer que le minimum correspond à (OK) parallèle à (HB).

Exemples d'activités (3/4)

- Quelques activités utilisant le calcul formel

Activite 1 : Triplets Pythagoriciens

Le Problème *(d'après des collègues de l'académie de Nantes)*

1. Que peut-on dire d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4, et 5 cm?
2. Est-ce le cas pour un triangle dont les côtés mesurent 5, 6, 7 cm?
   Des nombres entiers qui se suivent, comme dans les exemples précédents, sont appelés entiers consécutifs. Le problème que l'on se pose est le suivant :
   « Existe-t-il d'autres triplets d'entiers naturels consécutifs qui sont les longueu
3. **Conjecture à l'aide d'un tableur**
   a. Ouvrir le logiciel GeoGebra et afficher la fenêtre Tableur :

	A	B	C	
1	Premier entier	Deuxième entier	Troisième entier	Diffé
2	1	2	3	=A2^2+B2^2-C2^
3				

   b. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :
   c. Dans la cellule A3, entrer la formule =A2+1. Puis "tirer" cette formule sur l
   d. Compléter le tableau automatiquement pour répondre à la question :
   Existe-t-il d'autres triplets de Pythagore dans les 100 premiers triplets ?

4. **Preuve avec le logiciel de calcul formel**
   a. On va essayer de raisonner dans le cas général en désignant les nombres p premier entier du triplet, comment se notent les deux autres entiers suivants
   b. Ouvrir la fenêtre de calcul formel de GeoGebra.
   c. Développer l'expression $n^2 + (n+1)^2 - (n+2)^2$

   Calcul formel
   1 Développer[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2]
   → $n^2 - 2n - 3$

   d. Savez-vous résoudre l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$?
   e. -1 est-il solution de cette équation ?

   Substituer[n^2-2n-3,n,-1]
   → 0

   f. Existe-t-il d'autres solutions ?
   Que répond un logiciel de calcul formel ?

   3 Résoudre[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2=0]
   → $\{n = 3, n = -1\}$

   g. Conjecturer une factorisation de $n^2 - 2n - 3$.
   Vérifier ou réfuter votre conjecture à l'aide du calcul formel.

   2 Factoriser[n^2-2n-3]
   → $(n+1)\,(n-3)$

Activite 2 : La passerelle

Une municipalité décide de relier les points $O(0;0)$ et $B(1000;410)$ par un chemin (l'unité est le mètre). Ceci nécessite le franchissement d'une rivière, large de 10 m, matérialisée par les droites (ER) et (FS), les points étant définis par leurs coordonnées $E(0;100)$, $F(0;110)$, $R(1000;100)$ et $S(1000;110)$.
Il est décidé de construire une passerelle perpendiculaire aux berges, schématisée par le segment $[HK]$, où K appartient au segment $[ER]$ et H appartient au segment $[FS]$. Le trajet pour aller de O vers B est donc $(OKHB)$.
On prend pour variable l'abscisse x du point K $(0 \leq x \leq 1000)$.

Objectif : Minimiser le coût de ce chantier.

1. Exprimer en fonction de x les longueurs OK et HB. Existe-t-i $OK = HB$?

Le coût de construction pour les chemins $[OK]$ et $[HB]$ est de 350 e passerelle est de 45 000 euros.

2. Montrer que le coût total du chantier, noté $C(x)$, est donné pa

$$C(x) = 350\sqrt{x^2 + 10^4} + 350\sqrt{(x-1000)^2 + \dots}$$

Calculer ce coût, à l'euro près, pour les 3 positions suivantes d R, et K milieu de $[ER]$.

3. (a) Calculer la dérivée de la fonction C.
   (b) Montrer que l'équation $C'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 250x - \dots$ cette équation.
   (c) Donner le tableau de variations de la fonction C sur l'inte existe une seule valeur de x pour laquelle le coût total du ce minimum.

Comment modifier cet exercice pour intégrer l'utilisation de Geogebra ?

Remarque : on peut démontrer que le minimum correspond à (OK) parallè

Activite 3A : valeurs approchees d'une integrale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2e^{1-x}$

1. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Interpréter graphiquement le nombre A ci-dessous.

$$A = \int_0^2 3x^2e^{1-x}\,dx$$

3. On veut encadrer ce nombre par deux entiers. Proposer une méthode graphique pour obtenir cet encadrement.

Le professeur pourra proposer un encadrement par la méthode des rectangles et affiner l'encadrement avec les élèves :
SommeRectangles(<Fonction>, <x min>, <x max>, <Nombre Rectangles>, <Position pour hauteur>)
Par exemple SommeRectangles(f,0, 2, n, 0)= $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$
Et SommeRectangles(f,0, 2, n, 1)= $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)$

4. Déterminer une valeur exacte de cette intégrale à l'aide de Geogebra.
5. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu une primitive de f :
   $F(x) = 3(-x^2 - 2x - 2)e^{-x+1}$
   Retrouver ce résultat par les calculs.

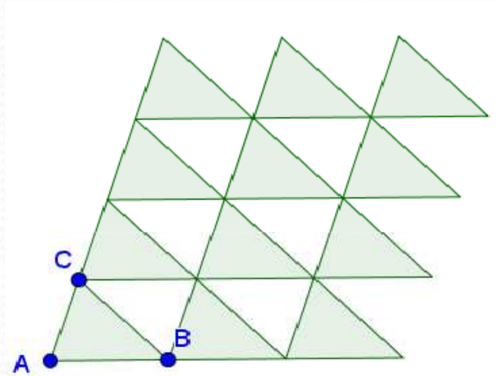
Sur Geogebra, on obtient une primitive de f avec la commande :
Intégrale(<Fonction>)
En calcul formel, on obtient toutes les primitives.
En ligne de saisie, on obtient la primitive de constante nulle.

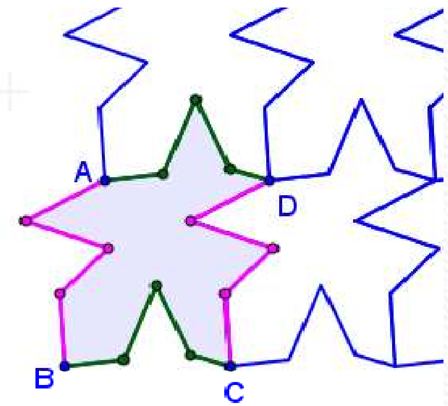
6. Démontrer que $A = \int_0^2 3x^2e^{1-x}\,dx = 6e - \frac{30}{e}$

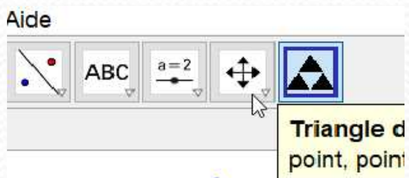
Exemples d’activités (4/4)

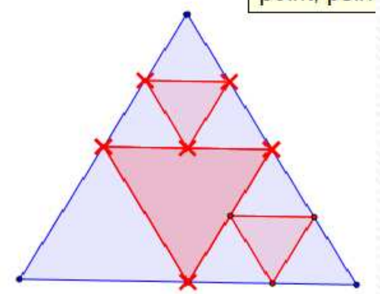
- Maths et Art
  - ***Pavages***
    - Pavage à l'aide de translation d'un triangle et de la commande Séquence
    - Pavage avec motif personnalisé
  - ***Utilisation pour les fractales (Sierpinski)***
    - Création d'une macro, triangle des milieux permettant de construire le triangle de Sierpinski

Liens vers les fichiers Geogebra :
https://www.geogebra.org/m/wwdrrnnm
https://www.geogebra.org/m/tqvvvvpq
https://www.geogebra.org/m/j4nde5g3









Retours des stages précédents

- « Concernant le descriptif du paf, il serait bien de préciser qu'il s'agit d'un stage d'approfondissement et qu'il concerne aussi les collègues maîtrisant déjà bien géogébra. J'ai failli ne pas venir parce que je pensais me débrouiller suffisamment, mais ça aurait été dommage, j'ai appris énormément de choses! »
- « Très intense »
- « Les activités proposées étaient très intéressantes et diversifiées. Les documents étaient top . »
- « La partie manipulation était très intéressante. On est toujours en activité. On n'a pas chômé ».
- « J'ai découvert beaucoup de fonctionnalités. »
- « A recommander »
- « Excellent les documents de travail et l'idée de travailler sur les Mathématiciennes. ;). »
- « Oui, de façon informelle. je leur ai surtout conseillé de s'inscrire au stage. »
  (en réponse à « Pensez-vous transmettre, à des collègues, certains apports du stage ? Si oui, sous quelle forme ? »)