

Mathématiques financières en classe de première S ou terminale S

Groupe IREM-INRP-UPO Lyon

mai 2008

Table des matières

1	Fiche Résumé	2
2	Fiche professeur	2
2.1	Analyse mathématique	2
2.2	Niveau du TP	2
2.3	Objectifs	3
2.3.1	mathématiques	3
2.3.2	instrumentaux	3
3	Fiche Elève	4

1 Fiche Résumé

- Remboursements
- Classe de première S
- Suites récurrentes, somme des termes d'une suite arithmétique
- Un TP d'une séance en salle informatique prolongé par un devoir maison ou une narration de recherche

2 Fiche professeur

2.1 Analyse mathématique

Ce TP s'inspire d'un énoncé d'exercice du manuel Belin 1^{ère}S. Il s'agit d'étudier un remboursement dont le montant diminue régulièrement sur un temps donné. On note S le montant emprunté, d la diminution et a la traite initiale. La durée est de 24 mois.

Il s'agit de trouver a et d de telle sorte que le remboursement soit complet au terme des 24 mois, c'est à dire :

$$\sum_{k=0}^{23} a + kd = S$$
$$12(2a - 23d) = S$$
$$2a - 23d = S' \text{ avec } S' = \frac{S}{12}$$

Si on essaye de résoudre le problème dans l'ensemble des entiers, on est ramené à la résolution d'une équation de type $ax + by = c$ avec a et b premiers entre eux.

D'une façon générale, on a ici $a = 12S' + 23k$ et $d = 2k + S'$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Mais on doit aussi avoir les deux conditions $s \geq 0$ et $a - 23d \geq 0$ ce qui donne comme condition :

$$-\frac{S'}{2} \leq k \leq \frac{-11S'}{23}$$

Le TP amène à conjecturer les valeurs possibles de a et s .

Dans l'exemple numérique choisi, $S' = 2500$ et l'équation $2a - 23d = 2500$ conduit à $2a = 2500 + 23d < 2500 + 23 \times \frac{2500}{23}$ et donc $a < 2500$ et $d < 108$;

comme par ailleurs, d est pair il y a 54 solutions explorables par le tableur que l'on retrouve avec la solution générale donnée ci-dessus.

En terminale S, spécialité maths, on peut prolonger ce problème avec la résolution de l'équation diophantienne :

$$12ka - 6k(12k - 1)d = S$$

pour une valeur de k représentant le nombre d'années de remboursement.

On s'éloigne dans ce TP d'un véritable problème de mathématiques financière, le remboursement apparaissant plus comme un habillage du problème sur les suites.

Illustration Le fichier tableur OpenOffice prems.ods permet d'illustrer cette situation

2.2 Niveau du TP

Ce TP peut être abordé en classe de première S et prolongé en terminale S suivant le niveau d'exigence et les généralisations imaginées.

Le temps d'une séquence de classe doit permettre une première exploration du problème et il peut être prolongé par un devoir à la maison et/ou une narration de recherche.

2.3 Objectifs

2.3.1 mathématiques

Somme des termes d'une suite arithmétique, résolution d'équations diophantiennes (initiation en première, résolution exacte en terminale) ; mise en équation d'un problème.

2.3.2 instrumentaux

Utilisation du tableur pour explorer une situation mathématique.

Eventuellement, généralisation du problème, utilisation du calcul formel pour faire apparaître les conjectures et pour aider à la résolution des équations diophantiennes sous-jacentes.

3 Fiche Elève

Une somme S est remboursée en deux ans par traites mensuelles dégressives : chaque mois le remboursement diminue de d euros. S , d et la première traite a sont des entiers dans ce problème. A l'issue des 24 mois, la somme initiale doit être remboursée, autrement dit, la somme de toutes les traites doit être égale à la somme empruntée.

Dans ce TP on choisira $S = 30000$.

1. $d = 50$. En utilisant le tableur, déterminer le montant de la première traite : a .
2. $d = 100$. En utilisant le tableur, déterminer le montant de la première traite : a .
3. Peut-on choisir n'importe quelle valeur de d ?

Deuxième partie

1. Démontrer que $0 < d \leq 108$ et que d est pair.
2. Trouver toutes les solutions pour $S = 30000$

Troisième partie : prolongements

1. Refaire l'étude pour un remboursement sur trois ans, sur k ans.
2. Refaire l'étude pour d'autres valeurs de S