Communication A11 :

Balade mathématique, de Gambetta à Jean Cocteau

Camille Gibert[1], Vincent Montagnon[2], Cécile Nigon[3], Anthony Simand[4], René Thomas[5] et Alexandre Franquet[6]

ESPE de l'académie de Lyon et IREM de Lyon, groupe Numatécol ;

[1]camille.gibert@ac-lyon.fr; [2]vincent.montagnon@ac-lyon.fr;[3]cecile.nigon@univ-lyon1.fr ; [4]anthony.simand@ac-lyon.fr; [5]rene.thomas@univ-lyon1.fr ; [6]alexandre.franquet@ac-lyon.fr ;

Résumé : La salle de classe n'est pas le seul lieu pour faire des mathématiques. L'environnement proche des élèves est également un lieu favorable pour développer des compétences pratiques sur les savoirs théoriques étudiés. Le projet MoMaTrE (mobile math trails in Europe, Erasmus +) grâce à son application MathCityMap permet de mettre en place très facilement un math trail (parcours d'énigmes mathématiques en plein air) en utilisant les smartphones des élèves. Notre groupe IREM a mis en place à Saint-Etienne, France, un parcours en centre-ville à destination des élèves de cycle 4. Nous vous présentons notre parcours et son expérimentation avec des élèves de quatrième et de troisième de deux collèges de la ville.

Mots clefs : MathCityMap ; maths trail ; application ; maths en extérieur ; résolution de problèmes.

Introduction

Dans les nouveaux programmes de mathématiques (BO n°30 du 26-7-2018) on peut lire :

> "*Pour certains élèves, l'accès à l'abstraction ne peut se faire que s'il est précédé par deux phases intermédiaires : celle de la manipulation, puis celle de la verbalisation (mise en mots) ou de la représentation (mise en images). De nombreux objets réels (carreaux de mosaïque, morceaux de ficelle, balances et autres instruments de mesure, solides, etc.) permettent d'approcher certaines notions abstraites (numération, fractions, équations, aires et volumes, etc.) de manière tactile, sensorielle. Il ne faut pas se priver d'y recourir lorsque cela s'avère nécessaire, même au collège.* ».

C'est cette idée de manipulation et d'utilisation d'objets réels associée à l'idée de résolution de problèmes qui nous a incités à nous intéresser au projet *MoMaTrE*. Ce projet a permis le développement de l'application MathCityMap qui a été présentée en conférence d'ouverture de ce colloque (Ludwig, 2018). Grâce à l'application, les enseignants peuvent créer très facilement un parcours d'énigmes mathématiques dans un environnement choisi. Une fois le parcours créé, les élèves le téléchargent via leur application smartphone. Ils sont ensuite guidés vers le parcours grâce à la géolocalisation. L'application leur demande de choisir la première énigme, les élèves découvrent le problème et cherchent une procédure de résolution. Lorsqu'ils ont terminé, ils entrent leur solution dans l'application qui leur renvoie si la réponse est juste, acceptable ou fausse. Les élèves peuvent retenter leur chance si la réponse est fausse. Après un certain nombre d'essais infructueux, l'application propose de passer à l'épreuve suivante. Il est possible de mettre trois indices pour aider les élèves.

L'idée de travailler les mathématiques dans différents espaces n'est pas nouvelle. Brousseau (2003) soulignait déjà que le curriculum se limite souvent au seul micro-espace. Il montrait alors que cela peut expliquer la rupture entre la géométrie d'observation et la géométrie de raisonnement et qu'il faudrait poser des problèmes de relation entre les différents espaces afin de construire des outils, donc des savoirs géométriques. Qu'en est-il des grandeurs ? Un travail de résolution de problème dans le méso-espace permettrait-il de construire le sens des savoirs relatifs à ce domaine ? Nous faisons cette hypothèse.

Après une présentation des points du programme que MathCityMap permet de travailler, nous vous présentons le parcours que nous avons créé et l'expérimentation qui en a été faite avec des élèves de quatrième du collège REP situé dans le périmètre du parcours.

Les compétences travaillées dans un Math trail.

Les programmes publiés au mois de juillet 2018 confirment la place centrale des six compétences mathématiques : chercher ; modéliser ; représenter ; raisonner ; calculer ; communiquer. Nous allons illustrer avec certaines de nos énigmes en quoi faire des maths avec MathCityMap permet de travailler ces compétences ainsi que des connaissances relatives aux différents domaines des programmes de mathématiques des cycles 3 et 4.

a) La deuxième épreuve du parcours (figure 1) :

Figure 1: deuxième épreuve du parcours

Dans cette épreuve la hauteur n'est pas directement mesurable. Les élèves doivent donc mettre en place une stratégie pour l'évaluer. Pour cela, ils mobilisent la compétence :

- Chercher :
  - *S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses ;*
  - *Tester, essayer plusieurs pistes de résolution ;*
  - *Décomposer un problème en sous-problèmes.*

Après un temps de réflexion, les élèvent se mettent d'accord sur la stratégie à mettre en place pour trouver la hauteur du rez-de-chaussée. Les élèves ont regardé comment il se composait : le sous-bassement et huit pierres de hauteur identique.

- Raisonner
  - *Fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.*

Munis d'un double décamètre, ils procèdent aux mesures nécessaires pour trouver la réponse.

- Calculer
  - *Calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice) ;*
  - *Contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur.*

Ils multiplient par huit la hauteur d'une pierre puis additionnent la hauteur du sous-bassement.

b) La quatrième épreuve du parcours (figure 2) :

4. Épreuve: Parterre de fleurs à square Violette

Estimer le volume en mètres cube de terre nécessaire pour remplir le parterre (3ème parterre en partant de la rue, celui ne contenant pas d'arbre)

Première tentative:

Figure 2: quatrième épreuve du parcours

- Chercher
  - *S'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses ;*
  - *Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.*

Les élèves ont observé la forme du bac à fleur afin de lui associer un solide qu'ils connaissaient et pour lequel ils pouvaient mobilisés une formule de calcul de volume.

- Modéliser
  - *Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide de configurations géométriques) ;*

Les élèves ont considéré qu'ils pouvaient modéliser le bac avec un pavé droit. A l'aide de leur smartphone, ils ont cherché la formule qui permettait de calculer le volume du pavé droit.

- Représenter
  - *Utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau).*

A l'aide d'une représentation à main levée du pavé droit, les élèves reportent les dimensions qu'ils ont mesurées avec un double décamètre.

c) La septième épreuve du parcours (figure 3) :

Figure 3: septième épreuve du parcours

- Chercher
  - *Décomposer un problème en sous-problèmes.*

Les élèves cherchent à décomposer la scène en sous-figures usuelles et réinvestir leurs connaissances sur les calculs d'aires.

- Modéliser
  - *Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide de configurations géométriques).*

Les élèves identifient la scène à un hexagone régulier qu'ils peuvent partager en six triangles équilatéraux.

Ces trois exemples illustrent les compétences mathématiques de recherche de problèmes qui sont mobilisées dans ce parcours d'énigmes. Nous n'avons pas cité la compétence calculer mais elle est

présente dans chacune des énigmes proposées même si, dans notre expérimentation, nous avons autorisé la calculatrice.
De plus, certaines notions mathématiques sont également travaillées, en particulier dans le domaine des grandeurs et mesures mais pas seulement. La modélisation du mobilier urbain à l'aide d'un solide permet de travailler la vision en 3D de ces objets. Cette compétence n'est pas facile à travailler dans le cadre de la classe.
Pratiquer le parcours d'énigmes avec ses élèves trouve donc parfaitement sa place au côté des situations de classe afin de favoriser le développement de ces compétences fondamentales dans les activités mathématiques.
Nous allons présenter maintenant l'expérimentation que nous avons menée avec deux classes de collège.

Le parcours d'énigmes avec des collégiens

Dans un premier temps, nous allons présenter le parcours d'énigmes et les choix qui ont présidé à sa conception. Le parcours est disponible sur le site MathCityMap à l'adresse suivante :

https://mathcitymap.eu/fr/portail/?view=trails&subview=my&id=506

Code du parcours sur l'application : 49506

Nous avons créé ce premier parcours de sept énigmes en centre-ville de Saint-Etienne. Plusieurs raisons ont motivé ce choix. Tout d'abord, un des établissements se trouve à proximité du centre-ville et le parcours se trouve sur le trajet maison collège pour une grande partie des élèves. Quand nous avons interrogé les élèves à la fin du parcours, plusieurs ont souligné l'intérêt de découvrir leur environnement proche. Nous avons proposé un parcours d'une durée d'environ 2h en comptant le temps de déplacement pour se rendre sur place à partir d'un établissement de la ville. Le centre-ville se prête tout particulièrement à la création d'un parcours car la concentration des lieux permet de créer un parcours d'une longueur raisonnable pour des adolescents, de plus il est riche en éléments remarquables du point de vue historique ou architectural.

.

La première épreuve se déroule sur le parvis du collège, il y a suffisamment de place pour que l'ensemble des élèves puissent faire l'épreuve. C'est le seul moment où tous les groupes sont réunis car dès qu'un groupe a trouvé la réponse, il peut partir pour l'épreuve suivante. Il faut donc prévoir de débuter le parcours avec un lieu assez vaste. La dernière épreuve se déroule dans un square ce qui permet d'avoir un lieu clos et tranquille afin de rassembler les équipes et faire le bilan du parcours.

Les énigmes que nous avons proposées relèvent essentiellement des grandeurs et mesures. Pour chercher les énigmes, les élèves devaient être en possession de matériel de mesure : mètre déroulant ou pliant, décamètre, règle de tableau, calculatrice. Il ne faut pas oublier de préciser dans la question l'unité de mesure attendue.

Pour la réponse à l'énigme, l'application permet de rentrer un intervalle dans lequel toutes les réponses sont considérées justes et un intervalle dans lequel les réponses sont acceptables. Le nombre de points attribués est différents : 100 points pour une bonne réponse et 50 points pour une réponse acceptable. Il faut prévoir un intervalle assez large dans lequel toutes les réponses sont considérées justes car les mesures sont imprécises : pour le calcul d'un volume par exemple, les écarts sont importants.

Enfin, il faut prévoir au moins deux accompagnateurs, un qui suit le groupe le plus rapide et le deuxième qui suit le groupe le moins rapide.

Ces éléments sont importants à prendre en compte afin que le parcours se passe dans les meilleures conditions.

Nous allons maintenant faire un compte rendu du déroulement effectif du parcours avec les classes. Pour une meilleure compréhension du déroulement, nous avons proposés aux participant de réfléchir sur quatre épreuves avant notre présentation.

Les énigmes présentées lors de la communication

Lors de la communication, nous avons choisi de faire réfléchir les participants sur les épreuves 1, 3, 5 et 6 de notre parcours afin qu'ils s'approprient celle-ci avant l'échange et le visionnage des vidéos des élèves.

Pour chacune de ces épreuves, nous avons posé aux participants les mêmes questions :

1. Décrire les procédures que les élèves peuvent mettre en œuvre pour résoudre l'énigme.
2. Quelles difficultés peuvent rencontrer les élèves ?
3. Quels indices pourraient être proposés ?

a) Bilan pour l'épreuve 1 (figure 4) :

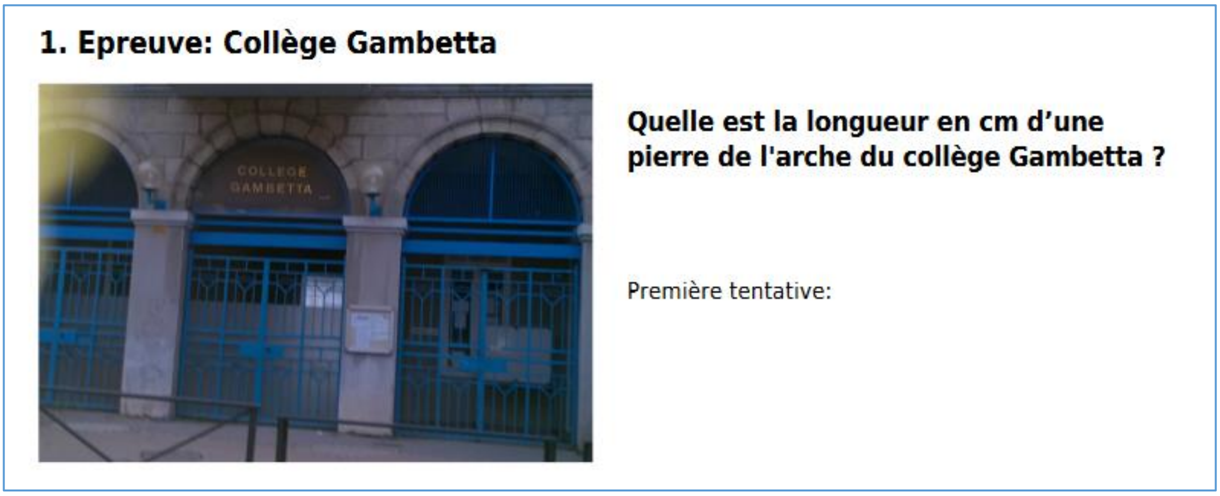

Figure 4: première épreuve du parcours

Pour cette première épreuve, il a fallu aux élèves un temps d'adaptation. Ils se sont retrouvés déstabilisés par l'énigme posée. Les gestes pour répondre à la question posée sont complètement différents des gestes de la classe. Les pierres de l'arche ne pouvant pas être mesurées directement, les élèves ont observé un moment la façade puis ils ont commencé à se concerter sur ce qu'ils devaient faire. Le premier obstacle pour deux groupes a été le mot « arche » : ils ne connaissaient pas ce mot. Un groupe a essayé de déplier entièrement le mètre dérouleur et à bout de bras les élèves ont essayé de mesurer une pierre. Lorsqu'un groupe a compris que l'arche avait la forme d'un demi-cercle (modélisation) et qu'il pouvait mesurer à leur hauteur le diamètre, les autres groupes ont fait de même (figure 5).

Figure 5: élèves mesurant le diamètre de l'arche

Cet effet domino a été constaté essentiellement sur cette épreuve car pour les épreuves suivantes, les groupes se sont dispersés et ne sont pas arrivés en même temps aux énigmes donc il leur était plus difficile de s'inspirer des autres groupes. La difficulté suivante a été de se souvenir de la formule du périmètre du cercle. Nous avions décidé que ce serait notre premier indice. Nous avons également mis en deuxième indice le nombre de pierres de l'arche.

b) Bilan pour l'épreuve 3 (figure 6) :

Figure 6: troisième épreuve du parcours

Deux procédures ont été observées. Deux groupes ont fait une estimation de la hauteur en réutilisant la réponse de l'énigme précédente. En effet dans l'énigme 2, les élèves devaient mesurer la hauteur du rez-de-chaussée d'un autre immeuble. Ils ont supposé que le rez-de-chaussée de cet immeuble avait la même hauteur. Ils ont ensuite évalué que l'on pouvait reporter quatre fois cette hauteur jusqu'en haut de l'immeuble et ont donc multiplié par cinq la réponse précédente, ce qui donnait la bonne réponse ! Nous n'avions pas anticipé cette procédure.

Les autres groupes ont repris la procédure de l'énigme précédente en mesurant la hauteur d'une pierre sur la façade de l'immeuble (figure 7) puis ont procédé comme les deux premiers groupes en évaluant à partir de cette longueur le reste de la hauteur de l'immeuble.

Figure 7: élève mesurant une hauteur de pierre

En face de cet immeuble, se trouve un pupitre sur lequel on peut voir une photo de l'immeuble avec une explication historique. Nous pensions que les élèves pourraient se servir de cette photo pour utiliser la notion d'échelle afin de trouver la hauteur. Nous avions formulé nos indices afin de faire émerger cette procédure mais aucun groupe n'a procédé ainsi.

La difficulté de mise en œuvre d'une procédure a été beaucoup moins présente lors de cette épreuve. Les élèves avaient déjà acquis de l'expérience avec les deux autres épreuves précédentes.

c) Bilan pour l'épreuve 5 (figure 8) :

Figure 8: cinquième épreuve du parcours

Cette épreuve a été celle qui a posé le plus de difficultés aux élèves. Le premier obstacle a été la notion de pente. Aucun élève ne connaissait comment se définissait une pente et donc comment elle se calculait. Nous n'avions pas interdit l'utilisation du smartphone pour chercher des informations mais les élèves n'ont pas le réflexe, pour une connaissance scolaire, de chercher la définition sur internet. Un groupe d'élèves a essayé de mesurer l'angle avec un rapporteur de bureau (figure 9). Les élèves avaient donc fait le lien entre pente et mesure d'angle. Dans ce groupe, un des élèves était cycliste, il avait donc une idée de la valeur de la pente mais les autres élèves n'avaient aucun ordre de grandeur. Certains ont proposé au hasard 15% !

Figure 9 : élève utilisant un rapporteur demi-disque pour mesurer la pente

Nous avions proposé comme indice de mesurer la longueur des éléments de bordure et la différence de hauteur entre le début de l'élément et la fin de l'élément. Un groupe a fait ces mesures et à chercher comment calculer la pente avec celles-ci.

d) Bilan pour l'épreuve 6 (figure 10) :

Figure 10: sixième épreuve du parcours

Pour cette dernière épreuve, on retrouve la même difficulté que pour la première. Une partie des élèves n'a pas compris l'expression « couronne de la fontaine ». Plusieurs procédures ont pu être observée. Un premier groupe à évaluer avec son pas le diamètre de la fontaine (figure 11) pour trouver le diamètre extérieur et a ensuite essayé d'évaluer approximativement à partir de cette mesure le diamètre intérieur afin de soustraire l'aire du disque intérieur à l'aire du grand disque. D'autre groupe ont procédé avec la même démarche mais en mesurant avec le mètre les deux diamètres.

Figure 11 : élève mesurant le diamètre de la fontaine à l'aide de son pas.

Un groupe a essayé de calculer l'aire d'une des pierres de la margelle afin de la multiplier par le nombre de pierre mais il a supposé que la forme était rectangulaire et l'approximation était trop grande. C'est cette procédure que nous avions privilégiée dans les indices en donnant la formule de l'aire d'un trapèze.

Conclusion

Cette expérimentation a été vraiment positive. Nous avons vu des élèves motivés, qui se sont engagés avec sérieux et intérêt dans la recherche des différentes énigmes.

A la fin du parcours, nous leur avons demandé leurs impressions. La première remarque a été de dire que cela changeait des mathématiques qu'ils faisaient en classe « avec leurs stylos et leur calculatrice ». Ils ont tous soulignés qu'ils avaient appréciés coopérer et réfléchir pour faire des mathématiques. L'utilisation des instruments différents des instruments traditionnellement de la classe a été également un point qui a été mentionné plusieurs fois. Ils ont également apprécié de faire des activités « qui sortent de l'ordinaire » et de leur « petit collège » en particulier dans leur environnement proche qu'ils ont appris à découvrir.

Enfin, ils ont apprécié de mettre en œuvre des technologies innovantes d'une part pour la géolocalisation des épreuves et d'autre part pour la possibilité d'avoir immédiatement un retour sur la réponse qu'ils ont trouvée.

Nous avons pu observer les mêmes attitudes et le même intérêt avec la classe de troisième ce qui conforte notre sentiment que les parcours d'énigmes avec MathCityMap sont des moments privilégiés de mathématique où l'élève met en œuvre ses connaissances scolaires pour répondre à des défis dans l'espace réel. Il apprécie de sortir de sa classe, d'utiliser des technologies de son quotidien et de coopérer pour réussir. A nous d'imaginer d'autres défis qui ne se cantonneraient pas au champ de la mesure.

Références

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *RDM*, Vol 4 n° 2, 165-198. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Ludwig, M. (2018). MathCityMap, *Colloque CII collège,* Juin 2018, Lyon.

MEN. (2018). Programme de cycle 4.