Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Analyse
Année 2004–2005

Devoir n°5
Suites équi-réparties

Soit I le segment $[0,1]$; une fonction réelle f, définie sur l'intervalle I, est continue par morceaux s'il existe une subdivision finie de I : $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ telle que la restriction de la fonction f à chacun des intervalles ouverts $]x_{i-1}, x_i[$, $1 \leq i \leq n$, est continue et se prolonge en une fonction continue sur l'intervalle fermé $[x_{i-1}, x_i]$. Il est admis qu'une fonction f continue par morceaux sur I est bornée. La borne supérieure des valeurs prises par la fonction $|f|$ est désignée par $||f||$:

$$||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Soit E l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues par morceaux sur I. Il est admis que $(E, ||.||)$ est un espace vectoriel normé.
Les suites considérées dans ce problème sont des suites de nombres réels indexés par des entiers strictement positifs : $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

<u>Suite équi-répartie dans I</u> : une suite $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels appartenant à l'intervalle I, $(0 \leq a_n \leq 1$ pour tout $n)$ est équi-répartie dans I, si et seulement si, pour toute fonction f de E, on a :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

<u>Suite équi-répartie modulo I</u> : étant donnée une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de réels définis par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = r_n - [r_n],$$

où $[r_n]$ est la partie entière du réel r_n. La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I, si et seulement si la suite des réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est équi-répartie dans I.

1° Un critère d'équi-répartition

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à l'intervalle I. Soit F_A le sous-ensemble des fonctions f de l'espace E pour lesquelles la relation ci-dessous a lieu :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(a_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Démontrer que le sous-ensemble F_A de E est un sous-espace vectoriel de E et que toutes les fonctions constantes de E appartiennent au sous-espace F_A.
(b) Soit g une fonction de l'espace E telle que, pour tout ε strictement positif donné, il existe deux fonctions f_1 et f_2 appartenant à F_A telles que l'on ait :

- pour tout réel x de I, $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$;
- $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$

Démontrer que la fonction g appartient au sous-espace vectoriel F_A.
(c) Démontrer que pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que le sous-espace vectoriel F_A contienne une partie P de E dense dans E.

2° Une condition nécessaire et suffisante d'équi-répartition

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels appartenant à l'intervalle I. Soit J un intervalle, contenu dans l'intervalle I, d'extrêmités c et d ; soit h_J la fonction caractéristique de J :

$$h_J(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in J \subset I \text{ ;} \\ 0 & \text{si } x \in I,\, x \notin J. \end{cases}$$

(a) Démontrer que pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que, pour tout intervalle J inclus dans I, la fonction h_J appartienne au sous-espace F_A de E.
(b) Soit J un intervalle dont les extrêmités c et d vérifient les inégalités : $0 < c < d < 1$. Etant donné un réel strictement positif ε ($\varepsilon > 0$), déterminer deux fonctions continues f_1 et f_2 vérifiant les relations :

- $f_1(0) = f_1(1)$, $f_2(0) = f_2(1)$ et pour tout réel x de I, $f_1(x) \leq h_J(x) \leq f_2(x)$;
- $\displaystyle\int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \leq \int_0^1 h_J(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon.$

La construction claire des graphes des deux fonctions f_1 et f_2 tient lieu de réponse.

Il est admis que la conclusion précédente est valable pour tout intervalle $J \subset I$, sans que la condition $0 < c < d < 1$ sur ses extrêmités soit réalisée.
(c) En déduire : pour que la suite A soit équi-répartie dans I, il suffit que toutes les fonctions continues prenant les mêmes valeurs aux extrêmités 0 et 1 de l'intervalle I appartiennent au sous-espace vectoriel F_A de E.
(d) Etant donné un entier strictement positif N, on note

$$N(J) = \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{N}^*, \quad 1 \leq n \leq N \ \text{ et } \ a_n \in J\right\}.$$

Démontrer que, pour que la suite soit équi-répartie dans I, il faut et il suffit que, pour tout intervalle J, on ait :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{N(J)}{N} = d - c.$$

3° Un critère d'équi-répartition modulo I : le théorème de Bohl

Etant donnés une suite de réels $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et deux entiers naturels k et N strictement positifs, soit $C(R,k,N)$ le nombre complexe défini par la relation suivante :

$$C(R,k,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k r_n}.$$

(a) On suppose que la suite $R = (r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I. Démontrer que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi k r_n} = 0.$$

(b) Démontrer réciproquement, qu'une suite de réels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équi-répartie modulo I si, pour tout entier k strictement positif, la limite, lorsque l'entier N croît vers l'infini, de l'expression $C(R,k,N)$ est nulle.
(c) Exemple : soit θ un réel donné. Démontrer que la suite $n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$, est équi-répartie modulo I si et seulement si le réel θ est irrationnel.

Dans les question suivantes, le résultat classique de Cesaro est admis et peut être utilisé : si une suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et de limite ℓ, alors la suite de terme général

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_n, \qquad N \in \mathbb{N}^*,$$

est convergente et de limite ℓ.

4° Exemples de suites équi-réparties modulo I

Dans toute cette question, on fixe une fonction $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. La fonction φ est supposée à valeurs positives, de classe $\mathcal{C}^2$, et concave ($\varphi'' \leq 0$). En outre, dans un voisinage de l'infini, sa dérivée φ' est négligeable devant 1 et la fonction $t \mapsto 1/t$ devant $\varphi'(t)$:

$$\varphi'(t) = o(1), \quad \frac{1}{t} = o(\varphi'(t)).$$

On considère la suite $R = (r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad r_n = \varphi(n).$$

On considère également les suites complexes $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d_n = r_{n+1} - r_n, \quad A_n = e^{2i\pi r_n}.$$

(a) Etablir que pour tout entier n strictement positif, d_n est strictement positif.

(b) Démontrer que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n\, d_n} = 0.$$

Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de nombres complexes définis par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{A_{n+1}}{d_{n+1}} - \frac{A_n}{d_n} \right).$$

Il est admis que, pour tout entier n strictement positif, l'inégalité ci-dessous a lieu :

$$|A_n - B_n| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \frac{1}{d_{n+1}} - \frac{1}{d_n} \right| + \pi |d_n|.$$

(c) Démontrer que l'on a :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} A_n = 0.$$

(d) Est-ce que la suite de réels $(\varphi(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$, est équi-répartie modulo I ?

5° Suites $(\ln^\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$

Etant donné un réel α supérieur ou égal à 1 ($\alpha \geq 1$), soient R_α la suite de réels $(\ln^\alpha(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et ψ_α la fonction définie sur la demi-droite $[1, +\infty[$: $x \mapsto \ln^\alpha(x)$.

(a) Pour quelles valeurs du réel α, les résultats de la question 4° permettent d'affirmer que la suite R_α est équi-répartie modulo I ?

(b) Soit f la fonction définie sur la demi-droite $]0, +\infty[$: $x \mapsto e^{2i\pi \ln(x)}$. Déterminer une primitive de cette fonction.

(c) Etant donné un entier N, strictement positif, soient L_N et I_N les deux nombres complexes définis par les relations suivantes :

$$L_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi \ln(n)}, \quad I_N = \frac{1}{N} \int_0^N e^{2i\pi \ln(x)}\, \mathrm{d}x.$$

Déterminer les limites, lorsque l'entier N croît vers l'infini, du module $|I_N|$ de I_N et de la différence $L_N - I_N$.

(d) Est-ce que la suite R_1, définie ci-dessus, est équi-répartie modulo I ?