Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

samedi 10 décembre 2011

Durée : 6 heures - Ce sujet comporte 6 pages.

Merci de préciser l'avancement de la copie après 4 heures de composition.

DF

Notations

- On note $\mathbf{C}$ (resp. $\mathbf{R}$) le corps des nombres complexes (resp. réels) et E l'espace vectoriel $\mathbf{C}^d$ où d est un entier naturel non nul.
- En l'absence de précision, le terme *vecteur* désigne un élément de E et le terme *endomorphisme* désigne une application $\mathbf{C}$-linéaire de E dans E. L'endomorphisme « identité » est noté id.
- L'espace vectoriel E est muni de sa structure hermitienne canonique : si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $E = \mathbf{C}^d$, alors $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{d} \overline{x_j}.y_j$.
  En particulier, pour tous vecteurs x et y de E, on a $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$.
  La norme hermitienne associée sera notée $\|.\|$: si x appartient à E , alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
  On notera $|||.|||$ la norme subordonnée à la norme $\|.\|$: si u est un endomorphisme, alors
$$|||u||| = \max_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}.$$
- Pour un polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ à une indéterminée à coefficients complexes, $Q(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ désigne l'évaluation de Q en un nombre complexe z.
  Si u est un endomorphisme, Qu désigne l'endomorphisme
$$Qu = \sum_{k=0}^{n} a_k u^k = a_0 id + \cdots + a_n u^n$$
  où la puissance u^k désigne l'endomorphisme composé $\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k}$.
- Pour tout entier naturel n, on considère le polynôme
$$T_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} X^k = \frac{1}{n+1} \left(1 + \cdots + X^n\right).$$

On s'intéresse à la suite $(T_n u)_n$ des moyennes des puissances successives de l'endomorphisme u.

Partie I.

1. (a) On suppose que l'endomorphisme u et le vecteur x vérifient $u(x) = \lambda x$ où λ est un nombre complexe. Vérifier que, pour tout polynôme Q :
$$(Qu)(x) = (Q(\lambda))\, x.$$
   (b) Vérifier que $T_n(1) = 1$ pour tout entier naturel n.
   (c) En utilisant l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ valable pour tous nombres complexes z_1 et z_2, démontrer, pour tous nombres complexes z et z', les inégalités
$$\begin{array}{rcl} |z - z'| & \leqslant & |z| + |z'| \\ \text{et} \quad \Big| |z| - |z'| \Big| & \leqslant & |z - z'| \end{array}$$

(d) On suppose ici que λ est un nombre complexe différent de 1. Montrer que

$$T_n(\lambda) = \frac{1-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)(n+1)}.$$

puis en déduire que

$$0 \leqslant \frac{1}{|1-\lambda|} \times \frac{\left|1-|\lambda|^{n+1}\right|}{n+1} \leqslant |T_n(\lambda)| \leqslant \frac{1}{|1-\lambda|} \times \frac{1+|\lambda|^{n+1}}{n+1}.$$

(e) Déterminer la limite de $|T_n(\lambda)|$ lorsque n tend vers $+\infty$. On pourra distinguer différents cas en fonction du nombre $|\lambda|$.

(f) On suppose dans cette question que le vecteur x est un vecteur propre de l'endomorphisme u pour la valeur propre λ.
Démontrer que la suite $(T_n u(x))_n$ est convergente dans E si et seulement si $|\lambda| \leqslant 1$.

2. On rappelle qu'un endomorphisme p de E est un *projecteur* si $E = \ker(p - id) \oplus \ker(p)$.

   (a) Démontrer qu'un endomorphisme p de E est un *projecteur* si et seulement si $p^2 = p$.

   (b) Démontrer que, si p est un projecteur, alors la suite d'endomorphismes $(T_n p)_n$ est convergente.

3. (a) Justifier, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante entre polynômes :

$$T_{n+1} + (n+1)\,(T_{n+1} - T_n) = X^{n+1}.$$

   (b) On suppose ici que l'endomorphisme u et l'entier naturel n vérifient

$$T_{n+2}u = T_{n+1}u = T_n u.$$

   (α) Démontrer que $u^{n+1} = u^{n+2}$.

   (β) En utilisant le polynôme $Q = T_{n+1} - T_n$, démontrer que 0 n'est pas valeur propre de l'endomorphisme u puis en déduire que $u = id$.

   (c) Démontrer l'équivalence des quatre assertions suivantes :

   (*i*) la suite $(T_n u)_n$ est constante ;

   (*ii*) la suite $(T_n u)_n$ est constante à partir d'un certain rang ;

   (*iii*) trois termes consécutifs de la suite $(T_n u)_n$ sont égaux ;

   (*iv*) $u = id$.

4. On suppose dans cette question que l'endomorphisme u vérifie $u^b = id$ pour un certain entier $b \geqslant 2$.
Pour tout entier naturel n, on note q_n (resp. r_n) le quotient (resp. reste) de la division euclidienne de l'entier n par l'entier b. On a donc $n = bq_n + r_n$ et $0 \leqslant r_n \leqslant b-1$.

   (a) Déterminer les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r_n+1}{n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b(q_n+1)}{n+1}$.

   (b) Démontrer, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$(n+1)T_n u = b(q_n+1)T_{b-1}u + (r_n+1)T_{r_n}u.$$

   (c) En déduire que la suite $(T_n u)_n$ est convergente vers l'endomorphisme $T_{b-1}u$.

   (d) Justifier que les polynômes $X-1$ et T_{b-1} sont premiers entre eux.

(e) Vérifier l'égalité $(u - id)T_{b-1}u = 0$ et démontrer que

$$E = \ker(u - id) \oplus \ker(T_{b-1}u) .$$

(f) Démontrer que l'endomorphisme $T_{b-1}u$ est un projecteur sur le sous-espace vectoriel $\ker(u - id)$.

Partie II.

La somme directe $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$ de E est dite *orthogonale* si les sous espaces vectoriels $F_1, \cdots, F_r$ sont orthogonaux deux à deux. On note alors $E = F_1 \overset{\perp}{\oplus} \cdots \overset{\perp}{\oplus} F_r$.

On appelle *projecteur orthogonal* un projecteur p de E tel que $E = \ker(p - id) \overset{\perp}{\oplus} \ker(p)$.

On se propose dans cette partie d'établir le résultat suivant :

Théorème : *Si u est un endomorphisme de E vérifiant $|||u||| \leqslant 1$, alors la suite $(T_n u)_n$ converge vers le projecteur orthogonal p sur le sous-espace vectoriel* $\ker(u - id)$.

1. On suppose dans cette question que $|||u||| < 1$.

   (a) Justifier le sous-espace $\ker(u - id)$ est réduit au vecteur nul.

   (b) Justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité

$$|||T_n u||| \leqslant \frac{1}{(n+1)(1 - |||u|||)}.$$

   (c) Démontrer le théorème ergodique pour l'endomorphisme u.

La suite de cette partie est dédiée à la démonstration du théorème dans le cas général.

2. On rappelle que pour tout endomorphisme u, il existe une unique application de E dans E, notée u^* vérifiant la propriété suivante : pour tous vecteurs x et y de E,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle.$$

   L'application u^* est linéaire et est dénommée l'*adjoint* de u.

   (a) Justifier les égalités

$$id^* = id \qquad ; \qquad (u^*)^* = u \qquad \text{et} \qquad (u - v)^* = u^* - v^*$$

   pour tous endomorphismes u et v de E.

   (b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, justifier, pour tout endomorphisme u et tout vecteur x, l'inégalité

$$\|u^*(x)\|^2 \leqslant |||u||| . \|u^*(x)\| . \|x\|$$

   puis montrer que $|||u^*||| \leqslant |||u|||$.

   (c) Déduire de ce qui précède l'égalité $|||u^*||| = |||u|||$.

3. (a) Soit f un endomorphisme de E. Démontrer l'égalité suivante :

$$\ker f^* = (\operatorname{im} f)^{\perp}$$

(b) En déduire, pour tout endomorphisme u, la décomposition

$$E = \ker(u - id)^* \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{im}(u - id).$$

Le but des questions 4 et 5 est de démontrer, sous deux hypothèses différentes et de manières indépendantes, l'égalité

$$\ker(u - id)^* = \ker(u - id). \tag{$\star$}$$

4. On suppose, uniquement pour cette question, que u est un endomorphisme hermitien (c'est-à-dire que $uu^* = u^*u = id$)

   (a) Montrer que $u(u - id)^* = id - u$.

   (b) En déduire l'égalité ($\star$).

On suppose, dans toute la suite de cette partie que u est un endomorphisme vérifiant $|||u||| \leqslant 1$.

5. (a) Justifier que, pour tout vecteur x :

$$|\langle u(x), x\rangle| \leqslant \|u(x)\|.\|x\| \leqslant \|x\|^2.$$

   (b) Démontrer que, si x est un vecteur vérifiant $\langle u(x), x\rangle = \|x\|^2$, alors $u(x) = \lambda x$ avec λ un nombre complexe que l'on déterminera.

   (c) En déduire les deux équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} u(x) = x &\iff \langle u(x), x\rangle = \|x\|^2 \\ \text{et} \qquad u^*(x) = x &\iff \langle u^*(x), x\rangle = \|x\|^2 \end{aligned}$$

   (d) Démontrer l'équivalence

$$u^*(x) = x \iff u(x) = x$$

   puis en déduire l'égalité ($\star$).

6. On note p le projecteur orthogonal de E sur le sous-espace vectoriel $\ker(u - id)$.

   (a) Justifier à l'aide des résultats précédents, la décomposition

$$E = \ker(u - id) \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{im}(u - id).$$

   (b) On suppose ici que x est un vecteur appartenant au sous-espace $\ker(u - id)$.
   Vérifier que

$$T_n u(x) = p(x).$$

   (c) On suppose ici que x est un vecteur appartenant au sous-espace $\operatorname{im}(u - id)$.
   Vérifier qu'il existe un vecteur y tel que

$$\|T_n u(x)\| \leqslant \frac{2\|y\|}{n+1}.$$

   (d) Démontrer que la suite $(T_n u)_n$ converge vers le projecteur p.

Partie III.

On note $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ (resp. $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$) l'algèbre des matrices carrées de taille d à coefficients complexes (resp. réels). Toute matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ sera considérée comme endomorphisme de $E = \mathbf{C}^d$ (pour la multiplication matricielle usuelle).

1. On suppose ici que $d = 2$ et on considère la matrice $U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que $|||U||| > 1$.
   (b) On note D la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Justifier que $U = RDR^{-1}$ où R est une matrice inversible. On précisera un couple (R, R^{-1}) de matrices vérifiant cette égalité.
   (c) Déterminer les coefficients de la matrice $T_n D$ puis en déduire la limite de la suite $(T_n D)_n$.
   (d) En déduire que la suite $(T_n U)_n$ converge vers une matrice P que l'on déterminera.
   (e) Vérifier que la matrice P définit un projecteur sur $\mathbf{R}^2$ et que ce projecteur n'est pas orthogonal.

2. Une matrice $A = (a_{ij})_{ij}$ appartenant à $\mathcal{M}_d(\mathbf{C})$ est dite *stochastique* si elle vérifie les deux conditions suivantes :
   – Pour tous indices i, j tels que $1 \leqslant i, j \leqslant d$, le coefficient a_{ij} est un réel positif.
   – Pour tout indice i tel que $1 \leqslant i \leqslant d$, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{d} a_{ij} = 1$.

   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques.
   (a) Montrer que toute matrice stochastique A admet le réel 1 pour valeur propre et vérifie $|||A||| \geqslant 1$.
   (b) Montrer que si les matrices A et B appartiennent à $\mathcal{S}$, alors la matrice AB appartient à $\mathcal{S}$.
   (c) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est convexe.
   (d) Déduire de ce qui précède que, si U appartient à $\mathcal{S}$, alors $T_n U$ appartient à $\mathcal{S}$ pour tout entier naturel n.
   (e) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est fermé dans $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$.
   (f) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ est borné (on rappelle que toutes les normes sur $\mathcal{M}_d(\mathbf{R})$ sont équivalentes).
   (g) Déduire de ce qui précède que, si la matrice U est stochastique, alors la suite $(T_n U)_n$ admet une sous-suite convergente vers une matrice stochastique.

FIN DU PROBLÈME