Université Claude Bernard Lyon 1
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2013–2014

Espaces affines

Lectures recommandées :

[1] Michèle Audin : *Géométrie.* EDP-Sciences, Grenoble, deuxième édition, 2006,

[2] Yves Ladegaillerie : *Géométrie pour le CAPES de mathématiques*, Ellipses, 2002 ou *Géométrie affine, projective, euclidienne et anallagmatique*, Ellipses, 2003,

[3] Jean Fresnel : *Méthodes modernes en géométrie*, Hermann, 2010 (un livre *très* riche que les notations rendent difficile d'accès).

Soit $\mathbb{K}$ un corps : ce sera le corps des scalaires de tous les espaces vectoriels considérés. On convient qu'«espace vectoriel» est un raccourci pour «espace vectoriel de dimension finie».

1° Espaces affines

Définition ([1])**.** Un ensemble $\mathscr{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ et d'une application Θ qui associe un vecteur de E à tout couple de points de $\mathscr{E}$:

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathscr{E}\times\mathscr{E} & \longrightarrow & E \\ & (M,N) & \longmapsto & \overrightarrow{MN} \end{array}$$

telle que :

– pour tout point M de $\mathscr{E}$, l'application partielle $\Theta_M : N \mapsto \overrightarrow{MN}$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur E ;

– pour tous points M, N et C de $\mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN}$ (relation de Chasles).

On dit alors que E est la *direction* de $\mathscr{E}$ et on appelle sa dimension la *dimension* de $\mathscr{E}$.

Exemple. Soit n un entier et E l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. On fait de l'ensemble $\mathscr{E} = \mathbb{K}^n$ un espace affine en posant, pour $M = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $N = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$: $\Theta(M,N) = (b_i - a_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E$.

Exemple. Plus généralement, soit E un espace vectoriel. On fait de E un espace affine en posant, pour $v, w \in E$: $\Theta(v,w) = w - v$. Cela correspond intuitivement à «oublier» l'origine $\overrightarrow{0}$ de E.

Définition. On appelle *espace affine* la donnée d'un ensemble $\mathscr{E}$ muni d'une action simplement transitive du groupe additif d'un espace vectoriel E sur $\mathscr{E}$, c'est-à-dire la donnée d'une famille de bijections de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ appelées *translations* $(t_v)_{v\in E}$ telle que :

(i) pour tout couple $(v, v') \in E^2$, on a : $t_v \circ t_{v'} = t_{v+v'}$;

(ii) pour tout couple de points $(M,N) \in \mathscr{E}$, il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que $N = t_v(M)$; on note alors $\overrightarrow{MN}$ le vecteur v.

La condition (i) traduit que l'application de E vers le groupe des bijections de $\mathscr{E}$ est un morphisme, tandis que (ii) exprime que l'action correspondante est simplement transitive.

Exercice. Démontrer que ces deux définitions sont équivalentes.

Notation. Étant donnés deux points M et N d'un espace affine $\mathscr{E}$ et $v = \overrightarrow{MN}$, on peut noter $N = M + v$ pour exprimer que $N = t_v(M)$.

Exercice. Justifier que si v' est un autre vecteur, on a alors : $M + (v + v') = (M + v) + v'$.

2° Repères

a) Repères et coordonnées

Définition. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine dirigé par un espace vectoriel E de dimension n. Un *repère* de $\mathscr{E}$ est une $(n+1)$-liste $\mathbf{r} = (O, e_1, \ldots, e_n)$ formée par un point O de $\mathscr{E}$ et une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On appelle *coordonnées* de M dans $\mathbf{r}$ l'unique n-liste de scalaires $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Lemme. *Étant donné un repère d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathbb{K}^n$ qui, à un point associe ses coordonnées dans le repère, est une bijection.*

b) Changement de repère

Proposition. *Soient $\mathscr{E}$ un repère affine et $\mathbf{r} = (O, e_1, \ldots, e_n)$, $\mathbf{r}' = (O', e'_1, \ldots, e'_n)$ deux repères de $\mathscr{E}$. Soit M un point de $\mathscr{E}$, on note $X = (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $X' = (x'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ ses coordonnées dans $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ respectivement. Alors :*

$$X = PX' + B,$$

où $P = P_{\mathbf{e},\mathbf{e}'}$ est la matrice de passage de $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ à $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ et $B = (b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est la colonne de coordonnées de O' dans $\mathbf{r}$.

DÉMONSTRATION. Laissée en exercice.

Remarque. Rappelons que la matrice de passage de la proposition est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de «la nouvelle» base $\mathbf{e}$ exprimées dans «l'ancienne» base $\mathbf{e}$; c'est aussi la matrice de l'identité dans les base $\mathbf{e}'$ et $\mathbf{e}$ (attention à l'inversion).
Moyen mnémotechnique : il faut savoir *souffrir* ! En général, on veut passer dans un repère adapté ; on cherche les «nouvelles» coordonnées X' alors qu'on connaît les «anciennes» X : pour cela, il faut souffrir, c'est-à-dire résoudre un système. Enfin, on trouve B en simplifiant la formule : B, c'est X lorsque $X' = 0$.

3° Sous-espaces affines

a) Définition

Définition. Soit $\mathscr{F}$ une partie d'un espace affine $\mathscr{E}$ dirigé par E. On dit que $\mathscr{F}$ est un *sous-espace affine* s'il n'est pas vide et si, pour un point $M \in \mathscr{F}$, l'ensemble $\Theta_M(\mathscr{F}) = \{\overrightarrow{MN},\ N \in \mathscr{F}\}$ est un sous-espace vectoriel (sev) de E.

Exercice. Vérifier que cette définition est indépendante de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire que pour $M, M' \in \mathscr{F}$, $\Theta_M(\mathscr{F})$ est un sev SSI $\Theta_{M'}(\mathscr{F})$ est un sev. Dans ce cas, $\Theta_M(\mathscr{F}) = \Theta_{M'}(\mathscr{F})$: c'est la *direction* de $\mathscr{F}$, qui ne dépend que de $\mathscr{F}$.

Exemple. Soit M un point d'un espace affine $\mathscr{E}$ et F un sous-espace vectoriel de la direction de $\mathscr{E}$. Alors l'ensemble $M + F = \{M + v,\ v \in F\}$ est un sous-espace affine. En effet, par construction, on a : $\Theta_M(M + F) = F$. On dit que $\mathscr{F}$ est le sous-espace affine contenant M et dirigé par F.

b) Sous-espace engendré et repère affine

Soient $(M_0, \ldots, M_r)$ une famille finie de points de $\mathscr{E}$. Fixons $k \in \{0, \ldots, r\}$. Le sous-espace vectoriel F_k engendré par $\overrightarrow{M_k M_i}$ $(0 \leqslant i \leqslant r)$ et le sous-espace affine $M_k + F_k$ ne dépendent pas du choix de k. On l'appelle sous-espace engendré par les points $M_0, \ldots, M_r$.

Montrons l'affirmation précédente. Soient k et ℓ compris entre 0 et r. Si $1 \leqslant i \leqslant r$, on a : $\overrightarrow{M_\ell M_i} = \overrightarrow{M_k M_i} - \overrightarrow{M_k M_\ell} \in F_k$, d'où il résulte que $F_\ell \subset F_k$; l'inclusion inverse se déduit par symétrie. Ensuite, si $N \in M_\ell + F_\ell$, il existe $v \in F_\ell = F_k$ tel que $\overrightarrow{M_\ell N} = v$, d'où : $\overrightarrow{M_k N} = \overrightarrow{M_k M_\ell} + v \in F_k$ et $N \in M_k + F_k$. D'où : $M_\ell + F_\ell \subset M_k + F_k$.

Définition. On dit qu'un famille de points $(M_0, \dots, M_r)$ est un *repère affine* de $\mathscr{E}$ si le sous-espace affine qu'ils engendrent est $\mathscr{E}$ tout entier et si $r = \dim \mathscr{E}$ (où il y a $r+1$ points !).

Exercice. Montrer que $(M_0, \dots, M_r)$ est un repère affine SSI $(M_0, (\overrightarrow{M_0 M_i})_{1 \leqslant i \leqslant r})$ est un repère.

c) Sous-espaces affines en coordonnées

Exemple (Système d'équations). Soit $\mathscr{E} = \mathbb{K}^n$. On se donne une matrice $A \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathbb{K}^m$. Alors, s'il n'est pas vide, l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions $X \in \mathbb{K}^n$ du système $AX = B$ est le sous-espace affine passant par X_0 et dirigé par le noyau de A. En effet, si $X_0 \in \mathscr{F}$, alors on a, pour $X \in \mathscr{E}$:

$$X \in \mathscr{F} \;\Leftrightarrow\; AX = B \;\Leftrightarrow\; AX = AX_0 \;\Leftrightarrow\; A(X - X_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; X \in X_0 + \mathrm{Ker}(A).$$

Exemple (Présentation paramétrique). Dans $\mathbb{K}^n$, on se donne p vecteurs $B_1, \dots, B_p$ et un point X_0. L'ensemble des points $X_0 + \sum_{j=1}^{p} t_j B_j$ où $(t_j)_{1\leqslant j \leqslant p}$ décrit $\mathbb{K}^p$ est un sous-espace affine.

Exercice. Considérons les matrices réelles

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une présentation paramétrique de l'ensemble $\mathscr{F}$ des solutions $X \in \mathbb{R}^4$ du système $AX = B$. (Gauss est ton ami.)
2. Donner un système d'équations du sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ contenant $(-2, -3, 1)$ dont la direction est engendrée par les colonnes de A. (Gauss est ton ami.)

4° Applications affines

Proposition. *Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines dirigés par E et F et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *il existe $\varphi : E \to F$ linéaire telle que pour tous $M, N \in \mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\big(\overrightarrow{MN}\big)$;*

(2) *il existe $\varphi : E \to F$ linéaire et $O \in \mathscr{E}$ tel que pour tout $N \in \mathscr{E}$, on a : $\overrightarrow{f(O)f(N)} = \varphi\big(\overrightarrow{ON}\big)$;*

(3) *étant donnés des repères de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$, il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_{\dim(\mathscr{F}),\dim(\mathscr{E})}(\mathbb{K})$ et un vecteur $B \in \mathbb{K}^{\dim(\mathscr{F})}$ tels que les coordonnées X et Y d'un point quelconque et de son image par f soient reliées par l'égalité : $Y = AX + B$.*

Remarque. On verra qu'une autre condition équivalente est la préservation du barycentre.

Définition. Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ deux espaces affines dirigés par E et F et soit $f : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application. On dit que f est *affine* si elle satisfait aux conditions de la proposition. Dans ce cas, l'application φ est unique : on l'appelle *application linéaire associée* à f, notée parfois $\overrightarrow{f}$.

Remarque. Sur les réels, l'application linéaire associée à une application affine est sa *différentielle.*

Démonstration. D'évidence, (1) implique (2). Supposons que (2) soit satisfaite. On a donc une application linéaire φ, notons A sa matrice dans les bases évidentes et B les coordonnées de $f(O)$. Soit $M \in \mathscr{E}$, X ses coordonnées et Y les coordonnées de $f(M)$. Alors, X est également la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$; par suite, AX est celle de $\varphi(\overrightarrow{OM})$; d'autre part, $Y - B$ est celle de $\overrightarrow{f(O)f(M)}$. L'égalité $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \varphi(\overrightarrow{OM})$ donne alors : $Y = AX + B$, ce qui prouve (3). Enfin, supposons que (3) soit satisfaite. Soit $\varphi : E \to F$ l'application linéaire qui a pour matrice A dans les bases tirées des repères donnés. Soient $M, N \in \mathscr{E}$, X les colonnes des coordonnées de M et N, Y et Y' celles de $f(M)$ et $f(N)$, on a donc : $Y = AX + B$ et $Y' = AX' + B$, d'où : $Y' - Y = A(X' - X)$. Or, $Y' - Y$ est la colonne des coordonnées de $\overrightarrow{f(M)f(N)}$, $X' - X$ celle de $\overrightarrow{MN}$, d'où l'on déduit : $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi(\overrightarrow{MN})$, ce qui prouve (1).

Exercice. Montrer que l'image (resp. l'image réciproque) d'un sous-espace affine par une application affine est un sous-espace affine.

5° Barycentres

a) Définition

Lemme. *Soient $r \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une famille de points dans un espace affine $\mathscr{E}$ et $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une famille de scalaires. Si $\sum_{i=1}^r \lambda_i \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\sum_{i=1}^r \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.*

Définition. Avec les notations du lemme, on appelle G le *barycentre* du système de points pondérés $\big((A_i, \lambda_i)\big)_{1 \leqslant i \leqslant r}$. Cette notation de S. Parmentier n'est pas standard mais bien pratique :

$$G = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_r \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix}.$$

Lemme (Associativité). *Si $\sum_{j=1}^s \lambda_j \neq 0$, alors :* $G = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & A_s \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_s \end{bmatrix} & A_{s+1} & \cdots & A_r \\ \sum_{j=1}^s \lambda_j & \lambda_{s+1} & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix}$.

Lemme. *Avec les notations ci-dessus, on a pour tout point O :* $\overrightarrow{OG} = \displaystyle\sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^r \lambda_j} \overrightarrow{OA_i}$.

b) Applications affines et préservation du barycentre

Exercice. On dit qu'une application préserve le barycentre si l'image du barycentre de tout système de points pondérés est le barycentre des images. Montrer que cette condition est équivalente à la préservation du barycentre pour les systèmes de *deux* points pondérés.

Proposition. *Une application est affine si et seulement si elle conserve le barycentre.*

Exercice. Toute isométrie est affine. (Si $\lambda \in [0, 1]$, $M = \begin{bmatrix} A & B \\ 1 - \lambda & \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow AM + MB = AB$ et $AM = \lambda AB$.)

c) Coordonnées barycentriques

Lemme. *Soit $(A_0, \ldots, A_n)$ un repère affine d'un espace affine $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ dont la somme n'est pas nulle telle que*

$$M = \begin{bmatrix} A_0 & A_1 & \cdots & A_n \\ \lambda_0 & \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

De plus, la famille $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est unique à multiplication par un scalaire non nul près.

Définition. Avec ces notations, l'unique famille $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ forme les *coordonnées barycentriques* de M dans le repère affine $(A_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$.