Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011

Espaces euclidiens, hermitiens et endomorphismes - 12 octobre 2011

Ces exercices portent sur la section 6 du programme officiel (Algèbre linéaire euclidienne et hermitienne). Pour revoir/travailler ces notions, je renvoie aux références habituelles ([Mon06], [Mon07], [Gri02] et [Gou94]) à adapter selon les habitudes et les goûts de chacun.

Exercice 1. ***(matrices orthogonales, unitaires)***

1. *Montrer qu'une matrice orthogonale (resp. unitaire) admet pour déterminant* ± 1 *(resp. un nombre complexe de module* 1*).*
2. *Montrer que toute valeur propre d'une matrice orthogonale (resp. unitaire) est de module* 1.
3. *Montrer que* 1 *est valeur propre de toute matrice de* $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$. *Que représente l'espace propre associé (discuter selon la dimension) ?*

Exercice 2. ***(une norme euclidienne sur l'espace des matrices carrées)***

1. *Vérifier que l'application* $(A;B) \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ *définit un produit scalaire sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   On note $\|.\|$ *la norme associée à ce produit scalaire.*
2. *Exprimer la norme* $\|A\|$ *d'une matrice* $A = (a_{ij})$ *en fonction de ses coefficients.*
3. *Vérifier que les «matrices indicatrices»* E_{ij} *(coefficients tous nuls sauf celui d'indice* (i,j) *égal à* 1*) forment une base orthonormée de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. *Vérifier qu'une matrice orthogonale est de norme* $\sqrt{n}$.
5. *Démontrer que, pour toute matrice* ***symétrique*** $A = (a_{ij})$ *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de valeurs propres* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *on a l'égalité*
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$
   Indication : Une matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale.
6. *Adapter les questions précédentes à* $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *muni de la forme hermitienne* $(A;B) \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^t\overline{A}B\right)$.

Exercice 3. ***(projecteur orthogonal et moindres carrés)***

On rappelle qu'un endomorphisme d'un espace vectoriel E *est un projecteur si* $p \circ p = p$, *cette condition étant équivalente à la décomposition* $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$.
On suppose pour la suite que $(E, \langle .;. \rangle)$ *est un espace vectoriel réel euclidien de norme associée* $\|.\|$.

1. *Soit* p *un projecteur de* E. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes*
   (*i*) *p est un endomorphisme symétrique*
   (*ii*) $\ker p = (\operatorname{im} p)^{\perp}$
   Indication : Pour (ii) $\Rightarrow$ *(i) : calculer* $\langle p(x); y\rangle$ *(resp.* $\langle x; p(y)\rangle$*) en décomposant* y *(resp.* x*).*
   On parle alors de ***projecteur orthogonal*** *(sur le sous-espace* $F = \operatorname{im} p$, *parallélement à* $F^{\perp}$*).*
2. *Exemple : si* n *est un vecteur non nul de* E, *décrire l'application* p *définie pour tout vecteur* v *de* E *par*
$$p\,(v) = v - \frac{\langle v; n\rangle}{\|n\|} n.$$
3. *Soit* p *le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel* F *de* E. *Vérifier que, pour tout* x *dans* E *:*
$$\|p(x) - x\| = \inf_{y\in F} \|y - x\| = \min_{y\in F} \|y - x\| = \inf_{x'\in E} \|p(x') - x\| = \min_{x'\in E} \|p(x') - x\|.$$
   Indication : Utiliser le théorème de Pythagore.

4. ***Application : détermination de la droite de régression linéaire d'un nuage de points.*** *On considère n points $\{A_i(x_i;y_i)\}_{i=1,\dots,n}$ dans $\mathbb{R}^2$ et on recherche une droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = ax+b$ qui soit «la plus proche possible» des points A_i. On cherche à minimiser la distribution des écarts $y_i - (ax_i+b)$ au sens suivant : trouver a et b afin de minimiser la quantité*

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - (ax_i+b))^2 .$$

On considère les vecteurs $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *et* $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *de $\mathbb{R}^n$ et f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $f(a;b) = a\underline{x} + b\underline{1}$.*

   (a) *Montrer que le problème consiste à déterminer $(a;b)$ tel que $\|f(a;b) - \underline{y}\|$ soit minimal.*

   (b) *Montrer que le couple $(a;b)$ recherché vérifie*

$$\begin{cases} a\langle \underline{x};\underline{x}\rangle + b\langle \underline{1};\underline{x}\rangle &= \langle \underline{x};\underline{y}\rangle \\ a\langle \underline{1};\underline{x}\rangle + b\langle \underline{1};\underline{1}\rangle &= \langle \underline{1};\underline{y}\rangle \end{cases}$$

   Indication : Utiliser le projecteur orthogonal p de $\mathbb{R}^n$ sur $\operatorname{im} f$ et la famille génératrice $\{\underline{x};\underline{1}\}$ de $\operatorname{im} f$.

   (c) *Résoudre le système précédent puis vérifier que*

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^n x_iy_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_iy_i\right)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}$$

   (d) *Vérifier (avec quelques points) qu'une calculatrice ou un tableur fournit la même droite de régression linéaire.*

Exercice 4. ***(la dimension 2)*** *L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la structure euclidienne canonique.*

1. *Démontrer que les matrices de $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. *Vérifier que le groupe $\mathrm{SO}(2,\mathbb{R})$ est commutatif. Est-ce le cas du groupe $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$?*
3. *Décomposer l'endomorphisme défini par la matrice* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ *en produit de deux réflexions dont on donnera les matrices dans le base canonique.*

Exercice 5. ***(la dimension 3)*** *L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique.*

1. *Décrire l'endomorphisme défini par la matrice* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. *Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x-2y+2z=0$.*
   Indication : Cette symétrie s'écrit $2p - id$ avec p un certain projecteur ortogonal.
3. *Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4e édition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2006.

[Mon07] Jean-Marie Monier. *Algèbre et géométrie MP, Cours, méthodes et exercices corrigés 5e édition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2007.