Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Algèbre linéaire - Mercredi 13 juillet 2011

1 Espaces vectoriels

Exercice 1.1. *On note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et C le sous-ensemble formé des fonctions croissantes sur $\mathbb{R}$.*

1. *Le sous-ensemble C est-il un sous-espace vectoriel de E ?*
2. *Le sous-ensemble $F = \{f - g \,:\, f, g \in C\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?*

Exercice 1.2. ***Sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires.***

1. *Montrer que l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.*
2. *La réunion de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels de E est-elle un sous-espace vectoriel ?*
3. *Soit A un sous-ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.*
   Montrer que $Vect(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de la forme :
   $$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r \quad \text{avec } r \in \mathbb{N},\, x_1, \ldots, x_r \in A,\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}.$$
4. *Soient F et F' deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que*
   $$F + F' = Vect(F \cup F').$$

Exercice 1.3. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-ensembles suivants :*

$$V = \left\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\right\} \text{ et } W = \{(a-b; a+b; a-3b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. *Justifier que V et W sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Déterminer $V \cap W$ puis $V + W$.*

Exercice 1.4. *Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ tels que*

$$(A \cap C) \subseteq B, \quad C \subseteq (A + B) \quad \text{et} \quad B \subseteq C.$$

Démontrer que $B = C$.

Exercice 1.5. ***Sommes directes.***

1. *Montrer que $F_1, \ldots, F_r$ sont en* somme directe *dans E si et seulement si tout élément v de $F_1 + \ldots + F_r$ s'écrit de manière unique*
   $$v = v_1 + \ldots + v_r \quad \text{avec } v_k \in F_k.$$
2. *Caractériser ainsi le fait que F et F' soient supplémentaires dans E.*
3. *Vérifier que la caractérisation 1 est fausse si le critère pour une somme directe est*
   $$F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_r = \{0\}.$$
   (Un dessin dans le plan doit suffire pour $r = 3$.)

Exercice 1.6. ***Sous-espaces supplémentaires (1).***
Dans chacun des cas, répondre aux questions suivantes

(a) Les sous-ensembles V et W sont-ils des sous-espaces-vectoriels de E ?

(b) A-t-on $V + W = E$?

(c) Les sous-espaces V et W sont-ils en somme directe ?

(d) A-t-on $V \oplus W = E$?

1. $E = \mathbb{K}[X]$, *V est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 5, W est l'ensemble des polynômes nul ou de degré supérieur ou égal à 6.*
2. *E est l'ensemble des vecteurs de l'espace (usuel : à trois dimensions), V est un plan vectoriel, W est une droite vectorielle.*
3. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *est l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires).*
4. $E = \mathbb{R}^I$ *est l'ensemble des fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, V (resp. W) est l'ensemble des fonctions positives (resp. négatives) ou nulles.*
5. *E est l'ensemble des suites réelles convergentes, V (resp. W) est l'ensemble des suites admettant pour limite 0 (resp. des suites constantes).*
6. $E = \mathbb{K}(X)$ *est l'ensemble des fractions rationnelles sur $\mathbb{K}$, V est l'ensemble des polynômes, W est l'ensemble des fractions rationnelles de degré strictement négatif.*

Exercice 1.7. ***Bases (1).*** *Soit n un entier naturel non nul.*

1. *Rappeler ce qu'est la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $E = \mathbb{K}^n$.*

   Montrer que si $v_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} e_i$, alors $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
2. *Rappeler ce qu'est la base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. Quelle est la dimension de E ?*
3. *Même question que précédemment si $E = \mathbb{K}[X]$.*
4. *Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles indexées sur $\mathbb{N}$. On note $U^k = (u_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n^k = \delta_{k,n} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ si } n \neq k \end{cases}$. Que peut-on dire de la famille $\mathcal{F} = (U^k)_{k\in\mathbb{N}}$?*

Exercice 1.8. ***Bases (2).*** *On considère un polynôme P de degré n à coefficients réels.*

1. *Démontrer que la famille $\left(P, P', P^{(2)}, \dots, P^{(n)}\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*
2. *(Plus difficile) Démontrer l'équivalence suivante :*

$$\left(P, XP', X^2P^{(2)}, \dots, X^nP^{(n)}\right) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X] \iff \text{tous les coefficients de } P \text{ sont non nuls.}$$

Exercice 1.9. ***Sous-espaces supplémentaires (2).***
Déterminer un sous-espace supplémentaire de V dans E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}_5[X]$, *et* $V = \{P \in E : X^2 + 3 \text{ divise } P\}$
2. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *et* $V = \{f \in E : f(0) = 0\}$
3. $E = \mathbb{R}^{[0;1]}$ *et* $V = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$

2 Applications linéaires

Exercice 2.1. *Démontrer la propriété 2.1*

Exercice 2.2. ***La conjugaison complexe.***

1. *Vérifier que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?*
   Mêmes questions en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ puis par $\mathbb{Q}$.
2. *Vérifier que la conjugaison complexe $\mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire, $\mathbb{Q}$-linéaire mais pas $\mathbb{C}$-linéaire.*

Exercice 2.3. ***En caractéristique*** $p > 0$.
Soit $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$ le corps des fractions rationnelles sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
Montrer que l'application $\phi : E \to E : F \mapsto F^p$ (F à la puissance p) est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-linéaire et injective.

Exercice 2.4. ***Vrai ou Faux ?***
Soient u une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B}$ une base de E.
Si aucun élément de $\mathcal{B}$ n'a pour image 0_F alors u est injective.

Exercice 2.5. *Soit f appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$ (f^k désigne ici $\underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k}$).*

Montrer que, pour tout vecteur v n'appartenant pas à $\ker f^2$, la famille $\big(v, f(v), f^2(v)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.6. ***Dérivation et applications linéaires.***

1. *On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.*
   (a) *Montrer que l'application u définie sur E par $u(P) = P'$ est un endomorphisme.*
   Est-il surjectif ? injectif ?
   (b) *Montrer que l'application v définie sur E par $v(P) = P - P'$ est un endomorphisme.*
   Est-il surjectif ? injectif ?
2. *Reprendre les questions précédentes avec l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n à coefficients réels.*
3. *Reprendre les questions précédentes avec l'espace $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ (remplacer P par f).*

Exercice 2.7. *Soient u un endomorphisme de E dans F.*
«Construire» un isomorphisme entre un supplémentaire quelconque de $\ker(u)$ et $\mathrm{im}(u)$.

Exercice 2.8. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n. On considère deux endomorphismes f et g de E.*

1. *On suppose que $f \circ g = 0$. Établir une majoration de $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.*
2. *On suppose qu'il existe une combinaison linéaire de f et g (dans $\mathcal{L}(E)$) qui soit un isomorphisme. Démontrer que $E = \mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g$. En déduire une minoration de $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.*

Exercice 2.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie (non nulle) sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -id$.*

1. *Démontrer que f est un isomorphisme.*
2. *On suppose qu'il existe p vecteurs v_1, v_2,…,v_p tels que la famille*
   $$(v_1, v_2, \ldots, v_p, f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p-1}))$$
   de $2p - 1$ vecteurs soit libre. Démontrer que la famille

$$(v_1, v_2, \ldots, v_p, f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p-1}), f(v_p))$$

de $2p$ vecteurs est libre.

3. *En déduire que la dimension de E est paire.*
4. *Un contre-exemple (simple) lorsque le corps de base est $\mathbb{C}$?*

Exercice 2.10. ***Cas particulier du lemme des noyaux.***
Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E tel que $u^2 + u - 6id = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$.
Démontrer l'égalité $E = \ker(u - 2id) \oplus \ker(u + 3id)$.

Exercice 2.11. *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et f et g deux endomorphismes de E.*
Démontrer les équivalences suivantes

$$\begin{gathered} \ker f = \ker g \circ f \iff \ker g \cap \operatorname{im} f = \{0\} \\ \operatorname{im} g \circ f = \operatorname{im} g \iff \ker g + \operatorname{im} f = E. \end{gathered}$$

Exercice 2.12. ***Homothéties - Projecteurs - Symétries.***
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (sur un corps de caractéristique différente de 2).

1. *Un endomorphisme h de E est appelé* homothétie *s'il existe un scalaire λ tel que $h = \lambda id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   Montrer que h est une homothétie si et seulement si, pour tout v dans E, la famille $(v, h(v))$ est liée.
2. *Un endomorphisme p de E est appelé* projecteur *s'il vérifie $p^2 (= p \circ p) = p$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Donner un exemple de projecteur sur $\mathbb{R}^2$, sur $\mathbb{R}^3$.*
   (b) *Démontrer que p de E est un projecteur si et seulement si $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$.*
   (c) *Vérifier que chacune des formules*

   $$p(f)(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \qquad et \qquad q(f)(x) = f(0) + (f(1 - f(0))x$$

   définissent des projecteurs p et q sur $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
3. *Un endomorphisme s de E est appellé* symétrie *s'il vérifie $s^2 (= s \circ s) = id$ dans $\mathcal{L}(E)$.*
   (a) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si l'endomorphisme $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur.*
   (b) *Démontrer que s est une symétrie si et seulement si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$.*

Exercice 2.13. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et deux applications linéaires f et g de E dans F.*

1. *Justifier l'inclusion $\operatorname{im}(f + g) \subseteq \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$.*
2. *Démontrer la double inégalité suivante :*

   $$|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| \leqslant \operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g).$$

3. *La double égalité peut-elle être vérifiée ?*

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Algèbre linéaire - Résumé de résultats - Mercredi 13 juillet 2011

Je renvoie aux livres [Mon06], [Gri02] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations (en particulier la définition de (sous)-espace vectoriel).

On considère un corps (commutatif) $\mathbb{K}$ dont les éléments seront parfois appelés des *scalaires*.

1 Algèbre linéaire «statique» : espaces vectoriels

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. L'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E.
2. Si A est un sous-ensemble quelconque de E, alors $Vect(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subseteq F}} F$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant A, c'est le *sous-espace vectoriel engendré* par A.
3. Si $F_1, \ldots, F_r$ sont des sous-espaces vectoriels de E, la somme $F_1 + \ldots + F_r$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $v_1 + \ldots + v_r$ avec v_k dans F_k.

Définition 1.1 (**somme directe, supplémentaires**).
Soient E un sous-espace vectoriel et $F_1, \ldots, F_r$ des sous-espaces vectoriels de E.

1. *On dit que $F_1, \ldots, F_r$ sont en* somme directe *si $F_k \cap \left(F_1 + \ldots + \widehat{F_k} + \ldots + F_r\right) = 0_E$ pour tout indice $k = 1, \ldots, r$.*
   Leur somme peut alors être notée $F_1 \oplus \ldots \oplus F_r$.
2. *Deux sous-espaces vectoriels F et F' sont* supplémentaires *dans E si $E = F \oplus F'$ (c'est-à-dire $F + F' = E$ et $F \cap F' = \{0\}$).*

Définition 1.2. *S'il existe un ensemble fini A tel que $Vect(A) = E$, on dit que E est de* dimension finie *et dans ce cas, le nombre minimal d'éléments d'une telle partie A est la* dimension *de E.*

Propriété 1.1. *Si F et F' sont deux sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel :*

$$\dim(F + F') = \dim(F) + \dim(F') - \dim(F \cap F').$$

Définition 1.3 (**famille libre, génératrice, base, coordonnées, rang**).
Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = \{v_i\}_{i \in I}$ une famille (indexée sur l'ensemble I) de vecteurs de E.

1. *La famille $\mathcal{F}$ est* libre *si «toute combinaison linéaire finie et nulle d'éléments de $\mathcal{F}$ est triviale» : pour tout entier non nul r,*

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0_{\mathbb{K}}.$$

   (De manière équivalente, la famille $\{Vect(v_i)\}_{i \in I}$ de sous-espaces vectoriels est en somme directe.)

2. *La famille $\mathcal{F}$ est* génératrice *si «tout élément de E est une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v dans E, il existe r, $i_1, \ldots, i_r$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que*

$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r.$$

   (De manière équivalente, E est la somme vectorielle de la famille $\{Vect(v_i)\}_{i \in I}$.)

3. *La famille $\mathcal{F}$ est une* base *de E si «tout élément non nul de E s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire finie d'éléments de $\mathcal{F}$» : pour tout v non nul dans E, il existe r, $i_1, \ldots, i_r$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ uniques tels que*
$$v = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k v_{i_k} = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r.$$
(De manière équivalente, $E = \bigoplus_{i \in I} Vect(v_i)$.)
4. *Si $Vect(\mathcal{F})$ est de dimension finie, alors le* rang *de la famille $\mathcal{F}$ est $\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim Vect(\mathcal{F})$.*
5. *Si E est de dimension finie et $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une base de E, alors l'unique décomposition $v = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n$ définit les* coordonnées *$(x_1, \ldots, x_n)$ de v dans la base $\mathcal{B}$.*

Propriété 1.2. *Soit E un espace vectoriel (non trivial).*

1. *Il existe une base de E.*
2. *Si une base est finie, toute autre base est de même cardinal (égal à $\dim(E)$).*
3. *(a) (théorème de la base incomplète) Toute famille libre peut être complétée en une base.*
   (b) (existence d'un supplémentaire) Tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.
4. *De toute famille génératrice, on peut extraire une base.*
5. *Si E est de dimension finie n et $\mathcal{F} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ est une famille de E, alors on a :*
$$\mathcal{F} \text{ est libre} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une base} \Leftrightarrow \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

2 Algèbre linéaire «dynamique» : applications linéaires

Définition 2.1. *Une application $u : E \longrightarrow F$ entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F est* linéaire *($\mathbb{K}$-linéaire précisément) si*
$$u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y) \quad \text{pour tous } x, y \in E,\ \lambda \in \mathbb{K}.$$
L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathcal{L}(E; F)$.

Une application linéaire u de $\mathcal{L}(E; F)$ est complètement déterminée par les (coordonnées dans une base de F des) images des vecteurs d'une base de E.
Ces données constituent la *matrice* de u dans les bases concernées.

Propriété 2.1. *Soit u appartenant à $\mathcal{L}(E; F)$*

1. *L'image (directe) $u(V) = \{u(x) : x \in E\}$ d'un sous-espace vectoriel V de E est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *L'image réciproque $u^{-1}(W) = \{x \in E : u(x) \in W\}$ d'un sous-espace vectoriel W de F est un sous-espace vectoriel de E.*
3. *(le «miracle») Si u est bijective, l'application réciproque $u^{-1} : F \longrightarrow E$ est linéaire.*

Cas particuliers :

Définition 2.2 (image, rang, noyau).

1. *L'*image *de u est le sous-espace vectoriel $\mathrm{im}\, u = u(E)$ de F.*
2. *Le* rang *de u est la dimension (si finie) de cette image : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{im}\, u)$.*
3. *Le* noyau *de u est le sous-espace vectoriel $\ker u = u^{-1}(\{0_F\})$ de E.*

Théorème 2.1 (du rang). *Soit u une application linéaire de E dans F avec E* ***de dimension finie****. Alors*
$$\dim(E) = \operatorname{rg}(u) + \dim\ker(u).$$

Schéma récapitulatif des conditions d'injectivité, de surjectivité, de bijectivité :
Attention aux conditions qui ne sont valables qu'en dimension finie.
Les conditions sur le déterminant et les mineurs ne sont pas indiquées.

<table>
<tr><td>$u \in \mathcal{L}(E;F)$</td><td>image d'une base de E</td><td>image/rang</td><td>noyau</td></tr>
<tr><td>injective</td><td>famille libre de F</td><td>$\operatorname{rg}(u) = \dim(E)$</td><td>$\ker(u) = \{0_E\}$</td></tr>
<tr><td>surjective</td><td>famille génératrice de F</td><td>$\operatorname{im}(u) = F$
$(\Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(F))$</td><td>$\dim\ker(u) = \dim(E) - \dim(F)$</td></tr>
<tr><td>bijective</td><td>base de F</td><td colspan="2">$(2 \text{ sur } 3) \begin{cases} \ker(u) = \{0_E\} \\ \operatorname{im}(u) = F \ (\Leftrightarrow \operatorname{rg}(u) = \dim(F)) \\ \dim(E) = \dim(F) \end{cases}$</td></tr>
</table>

Nomenclature des morphismes d'espaces vectoriels :

$u \in \mathcal{L}(E;F)$	E, F quelconques	$E = F$
quelconque	application linéaire	**endomorphisme**
bijective $\begin{pmatrix} \Leftrightarrow \text{injective} \\ \Leftrightarrow \text{surjective} \\ \text{en dim finie} \end{pmatrix}$	**isomorphisme**	**automorphisme**

L'ensemble $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E;E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E est (avec la conjugaison) une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative si $\dim(E) \geqslant 2$).
L'ensemble des automorphismes d'un espace vectoriel E forme (pour la conjugaison) le *groupe linéaire* $GL(E)$ dont l'élément neutre est id_E.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. *Algèbre linéaire.* Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4^{e}édition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2006.

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Algèbre linéaire - Éléments de correction

1 Espaces vectoriels

Exercice 1.1. 1. *Le sous-ensemble C n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (pas stable par multiplication par un réel négatif).*

2. *Le sous-ensemble $F = \{f - g : f, g \in C\}$ est bien un sous-espace vectoriel (strict : $\cos \notin F$) de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Exercice 1.2. ***Sous-espaces vectoriels et combinaisons linéaires.***

1. *L'intersection de sous-espaces vectoriels de E contient 0_E et est stable par combinaisons linéaires.*
2. *La réunion de deux (ou plus) sous-espaces vectoriels de E n'est généralement pas un sous-espace vectoriel. Exceptions :*
   - *Si l'un des sous-espaces vectoriels contient tous les autres*
   - *S'il y a «suffisament» de sous-espaces dans la réunion (la réunion de toutes les droites vectorielles du plan par exemple ; dans le cas d'un corps fini, cette collection est finie).*
3. *L'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A est un sous-espace vectoriel de E et contient A donc il contient $Vect(A)$.*
   De plus il est contenu dans tout sous-espace vectoriel contenant A. D'où l'égalité.
4. *Même principe. On peut d'ailleurs appliquer le résultat précédent avec $A = F \cup F'$.*

Exercice 1.3. 1. *Les sous-ensembles V et W sont des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.*

2. $V \cap W = \{(a-b; a+b; a-3b) : a, b \in \mathbb{R}$ *et* $(a-b)+(a+b)-(a-3b)+0\} = \ldots = Vect\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}\right\}$

   est une droite vectorielle donc $V + W = \mathbb{R}^3$ (argument de dimensions).

Exercice 1.4. *On a $B \subseteq C$.*
Réciproquement, si $c \in C \subseteq (A + B)$, alors $c = a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B \subseteq C$ donc $a = c - b \in (A \cap C) \subseteq B$. D'où $c = a + b \in B$. Donc $C \subseteq B$.

Exercice 1.5. ***Sommes directes.***

1. *Si $v \in F_k \cap \left(F_1 + \ldots + \widehat{F_k} + \ldots + F_r\right)$, alors $v = v_k = v_1 + \ldots + \widehat{v_k} + \ldots + v_r$ et l'unicité de l'écriture implique la nullité de ce vecteur.*
   Réciproquement, si $v_1 + \ldots + v_r = w_1 + \ldots + w_r$ avec $v_k, w_k \in F_k$, alors, pour tout indice k, on a

   $$w_k - v_k = (v_1 - w_1) + \ldots + (\widehat{v_k - w_k}) + \ldots + (v_r - w_r) \in F_k \cap \left(F_1 + \ldots + \widehat{F_k} + \ldots + F_r\right) = \{0_E\}$$

   donc $w_k = v_k$.
2. *F et F' sont supplémentaires dans E si et seulement si tout vecteur u de E s'écrit de manière unique $u = v + v'$ avec $v \in F$ et $v' \in F'$.*
3. *La condition $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_r = \{0\}$ n'est pas adaptée si $r \geqslant 3$: dessiner trois droites vectorielles distinctes du plan.*

Exercice 1.6. ***Sous-espaces supplémentaires (1).***

1. *V est un sous-espace vectoriel mais W n'en est pas un : $(X^6 + 1) - (X^6) \notin W$.*

2. *On a $V \oplus W = E$ si et seulement si la droite vectorielle W n'est pas incluse dans le plan vectoriel V.*

3. *On a bien la décomposition $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = V \oplus W$: toute fonction s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. L'égalité*

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)}_{paire} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right)}_{impaire}$$

est la seule possible (voir aussi l'exercice 2.12).

4. *L'ensemble des fonctions positives (resp. négatives) ne forme pas un sous-espace vectoriel. (L'égalité $E = V + W$ est correcte cependant : toute fonction est bien la somme d'une fonction positive et d'une fonction négative, sans qu'il y ait unicité d'autre part.)*

5. *Les ensembles V et W sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.*
   Étude : si $(u_n)_n$ converge vers le réel ℓ, la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = u_n - \ell$ et la suite $(w_n)_n$ constante égale à ℓ conviennent pour écrire $u = v + w$. La somme est directe car $V \cap W = \{0\}$.

6. *On a bien $E = V \oplus W$ et c'est approximativement le théorème de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle. Plus précisément : si $F = \frac{A}{B}$ et si $A = BQ + R$ est la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ de A par B, alors $F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ convient : $deg\left(\frac{R}{B}\right) = deg(R) - deg(B) < deg(B) - deg(B) = 0$. La somme est directe car $V \cap W = \{0\}$.*

Exercice 1.7. ***Bases. (1)***

1. *Base canonique $(e_1, \ldots, e_n)$ de $E = \mathbb{K}^n$: e_i est le n-uplet constitué uniquement de $0_{\mathbb{K}}$ sauf la i-ième coordonnée qui est $1_{\mathbb{K}}$.*
   Si $v_k = \sum_{i=1}^{k} e_i$, alors $(v_1, \ldots, v_n)$ est libre ($\sum \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_n = 0 \Rightarrow \lambda_{n-1} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_1 = 0$) donc est une base de $\mathbb{K}^n$.

2. *La base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}_n[X]$ est $(1_{\mathbb{K}}, X, \ldots, X^n)$. La dimension de E est $n+1$ (le nombre de coefficients à priori non nuls d'un polynôme de degré au plus n).*

3. *La base canonique de l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ est la famille infinie $(1_{\mathbb{K}}, X, \ldots, X^n, \ldots)$.*
   Il ne s'agit pas d'un espace vectoriel de dimension finie.

4. *La famille $\mathcal{F} = (U^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est libre mais pas génératrice : Une suite qui n'est pas nulle à partir d'un certain rang ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire* ***finie*** *d'éléments de $\mathcal{F}$.*

Exercice 1.8. ***Bases. (2)***

1. *Le cardinal $(n+1)$ de la famille est égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre en utilisant par exemple le degré :*

$$\underbrace{a_0 P}_{\substack{deg= \\ n \text{ ou } -\infty}} + \underbrace{a_1 P' + \ldots + a_n P^{(n)}}_{deg \leqslant n-1} = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$$

$$\Longrightarrow \underbrace{a_1 P'}_{\substack{deg= \\ n-1 \text{ ou } -\infty}} + \underbrace{a_2 P^{(2)} + \ldots + a_n P^{(n)}}_{deg \leqslant n-2} = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 \Longrightarrow \ldots$$

2. *Le cardinal de la famille $\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \left(P, XP', X^2P^{(2)}, \ldots, X^nP^{(n)}\right)$ étant égal à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, cette famille est une base si et seulement si elle est libre (respectivement génératrice). Notons $P = a_nX^n + \ldots + a_0$ avec $a_n \neq 0$.*

$\boxed{\Rightarrow}$ *Soit k entier, $0 \leqslant k \leqslant n$. Si $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ est génératrice, il existe des réels c_i tels que $X^k = \sum_{i=0}^n c_i X^i P^{(i)}$ c'est-à-dire (en identifiant les termes de degré k) $X^k = a_k \left(\sum_{i=0}^n \frac{c_i.k!}{(k-i)!}\right) X^k$ donc $a_k \neq 0$.*

$\boxed{\Leftarrow}$ *Supposons $a_k \neq 0$ pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $P^{(k)}(0) \neq 0$ pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$. On montre que $\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$ est libre à l'aide d'une récurrence forte et en évaluant en 0 :*

$$0 = \sum_{k=0}^n c_k X^k P^{(k)} \Rightarrow 0 = c_0 \underbrace{P^{(0)}(0)}_{\neq 0} \Rightarrow c_0 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=1}^n c_k X^k P^{(k)} = X \left(\sum_{k=1}^n c_k X^{k-1} P^{(k)}\right) \Rightarrow c_1 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = \sum_{k=2}^n c_k X^k P^{(k)} = X^2 \left(\sum_{k=2}^n c_k X^{k-2} P^{(k)}\right) \Rightarrow c_2 = 0 \dots$$

Exercice 1.9. ***Sous-espaces supplémentaires (2).***

1. *Dans $E = \mathbb{R}_5[X]$, $V = \{P \in E : X^2 + 3$ divise $P\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire $W = \{P \in E : deg(P) \leqslant 1\} \simeq \mathbb{R}_1[X]$ (l'ensemble des restes possibles dans la division euclidienne par $X^2 + 3$).*
2. *Dans $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $V = \{f \in E : f(0) = 0\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire $W = \{f \in E : f$ est constante$\}$ ou $W' = \{f \in E : f(x) = \lambda e^x, \lambda \in \mathbb{R}\}$ ou n'importe quelle droite vectorielle constituée (à part l'origine) de fonctions ne s'annulant pas en 0.*
3. *Dans $E = \mathbb{R}^{[0;1]}$, $V = \{f \in E : f(0) = f(1) = 0\}$ admet (par exemple) pour supplémentaire le sous-espace W des fonctions affines car, pour toute fonction f, la fonction affine $g : x \mapsto (f(1) - f(0))\,x + f(0)$ est affine et telle que $f - g$ appartient à V (voir l'exercice 2.12).*

2 Applications linéaires

Exercice 2.1.

1. *$u(x) + \alpha u(y) = u(x + \alpha y) \in u(V)$ pour tous x, y dans V et α dans $\mathbb{K}$.*
2. *Si $u(x)$ et $u(y)$ appartiennent à W, alors $u(x+\alpha y) = u(x)+\alpha u(y) \in W$ donc $x+\alpha y \in u^{-1}(W)$ pour tout α dans $\mathbb{K}$.*
3. *Si u est bijective, alors $u^{-1}(x)+\alpha u^{-1}(y)$ vérifie $u\left(u^{-1}(x) + \alpha u^{-1}(y)\right) = u\left(u^{-1}(x)\right)+\alpha u\left(u^{-1}(y)\right) = x + \alpha y$ donc $u^{-1}(x) + \alpha u^{-1}(y) = u^{-1}(x + \alpha y)$ pour tous x, y dans F et α dans $\mathbb{K}$.*

Exercice 2.2. ***La conjugaison complexe.***

1. *Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 et un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension infinie.*
2. *On a $\overline{\lambda z} = \overline{\lambda}.\overline{z}$ pour tous complexes z et λ ce qui donne $\overline{\lambda z} = \lambda.\overline{z}$ si λ est réel (donc s'il est rationnel).*

Exercice 2.3. ***En caractéristique*** $p > 0$. *L'additivité de l'application $\phi : F \mapsto F^p$ est une conséquence du fait que les coefficients binomiaux $\binom{p}{k}$ sont divisibles par p si $1 \leqslant k \leqslant p-1$ et donc que la formule du binôme appliquée à $(F+G)^p$ se simplifie en $F^p + G^p$ dans $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$.*
La $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-linéarité est une conséquence du petit théorème de Fermat : $(aF)^p = a^p F^p = aF^p$ si a appartient à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
L'injectivité est une conséquence du fait que $E = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}(X)$ est un corps (en particulier un anneau intègre) : $F^p = 0 \Rightarrow F = 0$.

Exercice 2.4. ***Vrai ou Faux ?***
Cette affirmation est fausse sauf si E est de dimension 1 : si w est un vecteur non nul de F et u est l'application linéaire définie par $f(v) = w$ pour tout élement v de la base $\mathcal{B}$ de E, alors deux vecteurs distincts de $\mathcal{B}$ ont même image.

Exercice 2.5. *Puisque le cardinal de la famille $\big(v, f(v), f^2(v)\big)$ est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que cette famille est libre. Si $0 = av + bf(v) + cf^2(v)$, alors $0 = f^2(0) = a\underbrace{f^2(v)}_{\neq 0_E} + b\underbrace{f^3(v)}_{0_E} + c\underbrace{f^4(v)}_{0_E}$ donc $a = 0$. Et on recommence avec $0 = bf(v) + cf^2(v)$: $0 = f(0) = b\underbrace{f^2(v)}_{\neq 0_E} + c\underbrace{f^3(v)}_{0_E}$ donc $b = 0$ puis $0 = c\underbrace{f^2(v)}_{\neq 0_E}$ pour obtenir $a = b = c = 0$.*

Exercice 2.6. ***Dérivation et applications linéaires.***

1. *On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels.*
   (a) *L'endomorphisme $u : P \mapsto P'$ est surjectif mais pas injectif : $\ker u$ est constitué des polynômes constants.*
   (b) *L'endomorphisme $v : P \mapsto P - P'$ est bijectif (identification des coefficients par exemple).*
2. *Si $E = \mathbb{R}_n[X]$:*
   (a) *L'endomorphisme $u : P \mapsto P'$ n'est pas surjectif (degré) (donc, car la dimension est finie) ni injectif.*
   (b) *L'endomorphisme $v : P \mapsto P - P'$ est bijectif.*
3. *Si $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:*
   (a) *L'endomorphisme $u : f \mapsto f'$ est surjectif (existence d'une primitive) et non injectif.*
   (b) *L'endomorphisme $v : f \mapsto f - f'$ n'est pas injectif ($\ker v = \{\lambda \exp : \lambda \in \mathbb{R}\}$) et est surjectif (existence d'une solution de l'équation différentielle $y' - y = g$).*

Exercice 2.7. *Soient u un endomorphisme de E dans F et V un supplémentaire de $\ker(u)$: $E = \ker(u) \oplus V$. La restriction $\tilde{u} = u\,|_V$ de u au sous-espace V est un isomorphisme de V sur $\mathrm{im}(u)$:*
- *La linéarité de $\tilde{u} = u\,|_V$ découle de la linéarité de u.*
- *Injectivité : $\tilde{u}(x) = 0_F \Rightarrow x \in V \cap \ker(u) = \{0_E\}$.*
- *Surjectivité : tout élement y de $\mathrm{im}(u)$ s'écrit $y = u(x)$ avec $x = x_1 + x_2 \in E = \ker(u) \oplus V$ ($x_1 \in \ker(u)$ et $x_2 \in V$). On a alors $y = u(x_2) \in \mathrm{im}\,(\tilde{u})$.*

On déduit de cet isomorphisme le théorème du rang car $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{im}(u)) = \dim(V) = dim(E) - \dim(\ker(u))$.

Exercice 2.8.
1. $f \circ g = 0 \Leftrightarrow \mathrm{im}\, g \subseteq \ker f \Rightarrow \mathrm{rg}(g) = \dim(\mathrm{im}\, g) \leqslant \dim(\ker f) = n - \mathrm{rg}(f) \Rightarrow \mathrm{rg}(g) + \mathrm{rg}(f) \leqslant n$.
2. *Si $\alpha f + \beta g$ est un isomorphisme, alors $\mathrm{im}(\alpha f + \beta g) = E$. Or $\mathrm{im}(\alpha f + \beta g) \subseteq \mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g$ donc $E = \mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g$.*
   On obtient alors $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = \dim(\mathrm{im}\, f) + \dim(\mathrm{im}\, g) \geqslant \dim(\mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g) = \dim E = n$.

Exercice 2.9. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie (non nulle) sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -id$.*

1. *Il suffit de vérifier l'injectivité. Si $f(x) = 0$, alors $0 = f^2(x) = -x$ donc $x = 0$.*
2. *Posons $v = \sum_{i=1}^p a_i v_i + b_i f(v_i)$ avec a_i, b_i réels et supposons que $v = 0_E$. On a alors $b_p f(v) - a_p.v = 0$ donc*

$$0 = b_p f\left(\sum_{i=1}^p a_i v_i + b_i f(v_i)\right) - a_p \sum_{i=1}^p a_i v_i + b_i f(v_i) = \ldots = \sum_{i=1}^p \underbrace{(b_p a_i - a_p b_i)}_{=0 \ si\ i=p} f(v_i) - (b_p b_i + a_p a_i) v_i$$

est donc une combinaison linéaire de la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_p, f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_{p-1}))$ qui est supposée libre ce qui implique la nullité de tous les coefficients $b_pa_i - a_pb_i$ et $b_pb_i + a_pa_i$. En particulier avec $i = p$, on obtient $b_p^2 + a_p^2 = 0$ donc (réels) $a_p = b_p = 0$. La combinaison linéaire nulle $0 = v = \sum_{i=1}^{p} a_iv_i + b_if(v_i)$ est donc une combinaison linéaire de la famille $(v_1, \ldots, v_p, f(v_1), \ldots, f(v_{p-1}))$ donc tous les coefficients sont nuls.

3. *Supposer E de dimension finie paire et démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, il existe une famille libre de cardinal $2p$ de la forme $(v_1, \ldots, v_p, f(v_1), \ldots, f(v_{p-1}), f(v_p))$ pour obtenir une contradiction.*
4. *Sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ (de dimension 1), la multiplication par i est un contre-exemple.*

Exercice 2.10. ***Cas particulier du lemme des noyaux.***
Les espaces $E_2 = \ker(u - 2id)$ et $E_{-3} = \ker(u + 3id)$ sont des sous-espaces vectoriels de E en somme directe (si $x \in E_2 \cap E_{-3}$, alors $2x = -3x$ donc $x = 0$). Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, on utilise la relation (polynôme annulateur de u) $u^2 + u - 6id = 0$ sous la forme $(u-2id)\circ(u+3id) = 0 = (u+3id)\circ(u-2id)$ qui permet de montrer que, pour tout x dans E, $u(x)+3x \in E_2$ et $u(x)-2x \in E_{-3}$. Ainsi $x = \frac{1}{5}\left((u(x) + 3x) - (u(x) - 2x)\right)$ appartient à la somme (directe) $E_2 \oplus E_{-3}$.

Exercice 2.11.

- *Si $\ker f = \ker g\circ f$ et $y \in \ker g \cap \operatorname{im} f$, alors $0 = g(y) = g(f(x))$ donc $x \in \ker f$ donc $y = f(x) = 0$.*
- *L'inclusion $\ker f \subseteq \ker g \circ f$ est toujours vraie. Si $x \in \ker g \circ f$ alors $f(x) \in \ker g \cap \operatorname{im} f$ donc $f(x) = 0$ si cette intersection est réduite à $\{0\}$. Donc $x \in \ker f$.*
- *Supposons $\operatorname{im} g \circ f = \operatorname{im} g$. Pour tout x dans E, il existe y dans E tel que $g(x) = g \circ f(y)$ d'où $g(x - f(y)) = 0$. On peut alors décomposer $x = (x - f(y)) + f(y)$ dans $\ker g + \operatorname{im} f$.*
- *L'inclusion $\operatorname{im} g \circ f \subseteq \operatorname{im} g$ est toujours vraie. Si $E = \ker g + \operatorname{im} f$, tout vecteur x de E s'écrit $x = x' + f(y)$ avec x' dans $\ker g$ et y dans E. On a alors $g(x) = g(x' + f(y)) = 0 + g(f(y))$ dans $\operatorname{im} g \circ f$.*

Exercice 2.12. ***Homothéties - Projecteurs - Symétries.***

1. *Si $h = \lambda id$, alors la famille $(v, h(v))$ est liée car $\lambda v - 1.h(v) = 0$. Réciproquement supposons que toutes les familles $(v, h(v))$ sont liées. Si v et v' sont deux vecteurs, alors $h(v) = \lambda v$ et $h(v') = \lambda' v'$ avec λ et λ' deux scalaires (éventuellement nuls, dépendant à priori des vecteurs). On veut montrer que $\lambda = \lambda'$ ce qui est évident si v et v' sont colinéaires. Si la famille (v, v') est libre, la relation $\lambda v + \lambda' v' = h(v + v') = \lambda''(v + v') = \lambda'' v + \lambda'' v'$ montre que $\lambda = \lambda'' = \lambda'$.*
2. (a) *Projections orthogonales ou non sur un plan, une droite.*
   (b) *Si $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$, la relation $p^2 = p$ se vérifie simplement.*
   Pour la réciproque, utiliser la décomposition $v = (v - p(v)) + p(v)$.
   (c) *Ces deux formules correspondent à des décompositions en somme directe de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ étudiées précédemment.*
3. (a) *Si $p = \frac{1}{2}(s + id)$, alors $p^2 = \frac{1}{2}(s^2 + 2s + id)$. Donc $p^2 = p \Leftrightarrow 2id = s^2 + id \Leftrightarrow s^2 = id$.*
   (b) *Si $E = \ker(s + id) \oplus \ker(s - id)$, la relation $s^2 = id$ se vérifie simplement.*
   Pour la réciproque : $p = \frac{1}{2}(s + id)$ est un projecteur donc $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$ et on vérifie que $\ker p = \ker(s + id)$ et $\operatorname{im} p = \ker(s - id)$.

Exercice 2.13.

1. *On a $(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \operatorname{im} f + \operatorname{im} g$ pour tout vecteur x de E.*
2. *Ce qui précède montre que $\operatorname{rg}(f + g) \leqslant \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g)$. Pour l'autre inégalité, c'est le même raisonnement :*
   – *avec $f = (f + g) - g$, on obtient $\operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-g) = \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(g)$;*
   – *avec $g = (f + g) - f$, on obtient $\operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(-f) = \operatorname{rg}(f + g) + \operatorname{rg}(f)$;*
   donc $\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g) \leqslant \operatorname{rg}(f + g)$ et $\operatorname{rg}(g) - \operatorname{rg}(f) \leqslant \operatorname{rg}(f + g)$. D'où l'inégalité en valeur absolue.
3. $|\operatorname{rg}(f) - \operatorname{rg}(g)| = \operatorname{rg}(f + g) = \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \Rightarrow \operatorname{rg}(f) = 0$ *ou* $\operatorname{rg}(g) = 0 \Rightarrow f = 0$ *ou* $g = 0$.