Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation de Mathématiques : Algèbre & géométrie
Année 2006–2007

Questions de géométrie

I Géométrie affine

3° Equations de droites et de plans

(c) On note D la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et on définit de même D' et D''. On raisonne par disjonction des cas. Supposons que deux des droites se coupent, par exemple D et D'. En résolvant un système 2×2, on calcule les coordonnées (x, y) de l'intersection. Quand on les reporte dans l'équation de D'', on constate que (x, y) est solution de l'équation de D'' si, et seulement si le déterminant 3×3 évident est nul. Supposons à présent que les trois droites soient parallèles (ou confondues). Alors, les formes linéaires (définies sur $\mathbb{R}^2$) $ax+by$, $a'x+b'y$ et $a''x+b''y$ sont proportionnelles, ce qui entraîne que les deux premières colonnes du déterminant fatidique sont proportionnelles : ainsi, il s'annule.

Autre approche. Considérons nos trois droites comme plongées dans le plan d'équation $z = 1$ de $\mathbb{R}^3$. Par exemple, D est l'intersection du plan $\{z = 1\}$ et du plan P d'équation $ax+by+cz = 0$. On définit de même P' et P''. Pour étudier $D \cap D' \cap D''$, on commence par étudier l'intersection $\Delta = P \cap P' \cap P''$. C'est l'ensemble des solutions d'un système homogène (seconds membres nuls) donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Par le théorème du rang, on a : $\dim \Delta = 3 - r$, où r est le rang du système d'équations. Le déterminant fatidique est nul SSI $\dim \Delta \geq 1$. Comme on a implicitement supposé que (a, b) et consorts ne sont pas nuls, sa dimension est au plus 2. Trois cas peuvent se produire :

- si $\dim \Delta = 2$, cela signifie que $\Delta = P = P' = P''$, d'où on déduit : $D = P \cap \{z = 1\} = P' \cap \{z = 1\} = D' = D''$, les droites sont égales donc parallèles et le déterminant est nul ;
- si $\dim \Delta = 1$, alors Δ est une droite, deux sous-cas apparaissent et le déterminant est nul :
  - Δ est incluse dans le plan d'équation $z = 0$: alors, Δ et D sont parallèles car ce sont les intersections de P avec les plans parallèles $\{z = 0\}$ et $\{z = 1\}$; il en est de même de D' et D'', si bien que D, D' et D'' sont parallèles ;
  - Δ coupe le plan d'équation $z = 1$ en A : alors A appartient à P (car Δ est incluse dans P) et au plan $\{z = 1\}$ donc à D ; il en est de même pour D' et D'', si bien que D, D' et D'' sont concourantes ;
- si $\dim \Delta = 0$, alors les plans P, P' et P'' sont en position générale : ils se coupent deux à deux selon une droite et les trois droites ne se coupent qu'en l'origine ; par suite, D, D' et D'' ne sont ni parallèles, ni concourantes ; dans ce cas, le déterminant n'est pas nul.

(d) *Intersection de droites vectorielles* (seconds membres nuls). On note P_1 le plan d'équation $a_1x + b_1y + c_1z = 0$, on définit de même P_2, P_1' et P_2' ; on note D l'intersection $P_1 \cap P_2$ et on suppose que c'est une droite : cela signifie que les équations de P_1 et P_2 ne sont pas proportionnelles, c'est-à-dire que :

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2.$$

On définit de même D' et on suppose aussi que c'est une droite.
Montrons que $D = D'$ si et seulement si les déterminants suivants s'annulent :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{vmatrix}.$$

En effet, sachant que $P_1 \cap P_2$ et $P_1' \cap P_2'$ sont des droites, elles sont égales SSI $P_1 \cap P_2$ est incluse dans $P_1' \cap P_2'$ SSI $P_1 \cap P_2$ est incluse dans P_1' et dans P_2'.

Or, dire que $P_1 \cap P_2$ est inclus dans P_1', c'est dire, au choix, que l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_1'$ est une droite puis que le rang du système correspondant est de rang 2, ou que l'équation de P_1' est combinaison linéaire des équations de P_1 et P_2 puis que le premier des déterminants ci-dessus est nul.
Autre approche. Ayant supposé que $P_1 \cap P_2$ est une droite, l'égalité $P_1 \cap P_2 = P_1' \cap P_2'$ équivaut à dire que $\Delta = P_1 \cap P_2 \cap P_1' \cap P_2'$ est une droite. En effet, si $P_1 \cap P_2 = P_1' \cap P_2'$, on a :

$$P_1 \cap P_2 = P_1 \cap P_2 \cap P_1 \cap P_2 = P_1 \cap P_2 \cap P_1' \cap P_2',$$

qui est bien une droite. Inversement, si $P_1 \cap P_2 \cap P_1' \cap P_2'$ est une droite, comme elle est contenue dans les droites $P_1 \cap P_2$ et $P_1' \cap P_2'$, elle coïncide avec elles.
Or la codimension [1] de Δ est le rang du système. Dire que Δ est de dimension 1, c'est donc dire que le système des quatres équations de P_1,..., P_2' est de rang $3 - 1 = 2$:

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' \end{pmatrix} = 2.$$

Cela se traduit par l'annulation de tous les mineurs 3×3 (et résulte de l'annulation de 2 d'entre eux).

Intersection de droites affines (seconds membres quelconques). Notons P_1 (resp. P_1^0) le plan d'équation $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ (resp. $a_1x + b_1y + c_1z = 0$), de même pour $P_2, \cdots, P'^0_2$. Les droites $P_1 \cap P_2$ et $P_1' \cap P_2'$ sont égales SSI elles ont un point commun et la même direction vectorielle. En d'autres termes, le système évident de 4 équations à 3 inconnues (avec les second membres) doit avoir une solution et les droites vectorielles $P_1^0 \cap P_2^0$ et $P'^0_1 \cap P'^0_2$ doivent être égales. On a déjà traduit la deuxième condition, on la suppose réalisée.
On a donc affaire à un système de 4 équations à 3 inconnues de rang 2 dont les deux premières équations sont indépendantes. Sans perte de généralité, on suppose que $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, c'est-à-dire qu'on choisit pour inconnues principales x et y. Il s'agit d'exprimer que ce système « excédentaire » a une solution, ce qui est l'objet du théorème de Rouché-Fontené. Montrons que cela équivaut à l'annulation de deux déterminants [2] :

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_1' & b_1' & d_1' \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_2' & b_2' & d_2' \end{vmatrix}.$$

D'après les hypothèses sur le rang, le système homogène associé (décrivant $P_1^0 \cap P_2^0 \cap P'^0_1 \cap P'^0_2$) a une droite de solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} \alpha z \\ \beta z \\ z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(En effet, pour toute valeur de z, il y a une unique solution (x, y, z) qui dépend linéairement de z.) Si le système avec ses seconds membres a une solution particulière (x_0, y_0, z_0), alors la solution générale est de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_0 + \alpha z \\ y_0 + \beta z \\ z_0 + z \end{pmatrix}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

1. La codimension d'un sous-espace F d'un sous-espace E est : $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$. Par le théorème du rang, si F est l'ensemble des solutions d'un système linéaire, la codimension de F est égale au rang du système –interpréter F comme le noyau de l'application linéaire dont la matrice est la matrice du système.

2. Ces déterminants sont appelés *bordants* dans le cadre du théorème de Rouché-Fontené, voir par exemple `http://serge.mehl.free.fr/anx/th_rouche_font.html`.

(Quitte à remplacer z par $z + z_0$ et à changer x_0 et y_0 en conséquence, on peut d'ailleurs supposer $z_0 = 0$.) Il existe donc une solution de la forme $(x, y, 0)$ au système. Mais alors, les droites du plan $\{z = 0\}$ d'équations $a_1x + b_1y = d_1$, etc., sont concourantes : d'où l'annulation du déterminant par l'exercice précédent.
Inversement, si les déterminants sont nuls, les droites du plan $\{z = 0\}$ qui ont pour équations $a_1x + b_1y = d_1$, etc., sont concourantes (l'hypothèse $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$ fait qu'elles ne sont pas parallèles) donc l'intersection $P_1 \cap \cdots \cap P_2'$ n'est pas vide (il y a une solution $(x, y, 0)$). On peut conclure.

Autre approche. Plongeons dans $\mathbb{R}^4$ en introduisant une variable t et les hyperplans vectoriels $Q_1, \ldots, Q_2'$ d'équations $a_1x+b_1y+c_1z-d_1t = 0$, etc. On retrouve P_1, etc., comme l'intersection de Q_1, etc., et du plan d'équation $t = 1$.
Par exemple, les équations de Q_1 et Q_2 ne sont pas proportionnelles donc $Q_1 \cap Q_2$ est de dimension 2. La droite $P_1 \cap P_2$ est l'intersection du plan $Q_1 \cap Q_2$ et de l'hyperplan $\{t = 1\}$. L'intersection $F = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_1' \cap Q_2'$ est de dimension ≤ 2 (car contenue dans $Q_1 \cap Q_2$). Sa codimension est le rang d'un système de 4 équations à 4 inconnues (de rang ≥ 2). On peut distinguer deux cas :
– si le système est de rang 3 ou 4, F est $\{0\}$ ou une droite vectorielle et $F \cap \{t = 1\}$ ne peut pas être une droite affine ;
– si le système est de rang 2, F est un plan qui peut être décrit par 2 équations indépendantes quelconques parmi les 4 du système : vu les hypothèses, on a : $F = Q_1 \cap Q_2 = Q_1' \cap Q_2'$, d'où il résulte : $P_1 \cap P_1 = P_1' \cap P_2'$.
Au bilan, une CNS pour que les deux systèmes définissent la même droite est :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1' & b_1' & c_1' & d_1' \\ a_2' & b_2' & c_2' & d_2' \end{pmatrix} = 2.$$

II Quatre preuves du théorème de Ptolémée

Dans un plan affine euclidien, on se donne quatre points A, B, C, D. Alors, A, B, C et D sont sur un même cercle et dans cet ordre si, et seulement si :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

(Retenir : le produit des diagonales est la somme des produits des côtés opposés. Remarquer que si $ABCD$ est un rectangle, l'égalité de Ptolémée s'écrit : $AB^2 + BC^2 = AC^2$, ce qui redonne le théorème de Pythagore. Des esprits bien faits [3] sauraient en tirer l'idée de la preuve géométrique ci-dessous.)

1° Preuve géométrique du sens direct

On introduit K sur le segment $[AC]$ de sorte que les angles $\widehat{ABK}$ et $\widehat{BDC}$ soient égaux.
Les triangles BAK et BDC sont semblables : en effet, $\widehat{ABK}$ et $\widehat{DBC}$ sont égaux par construction ; $\widehat{KAB}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux par le théorème de l'angle inscrit car ils interceptent la même corde $[BC]$. On en déduit : $BA/BD = AK/DC$.
De même, les triangles BDA et BCK sont semblables, d'où $BD/BC = KC/AD$. En exploitant : $AK + KC = AC$, l'égalité de Ptolémée en résulte.

Dans la suite, on identifie le plan affine avec le plan complexe par le choix d'un repère orthonormé.

3. Ce qui consiste à dire qu'à l'inverse, je ne comprends pas bien la situation.

2° **Trigonométrie pour le sens direct**

Supposons que a, b, c et d soient sur un même cercle dans cet ordre. Par une similitude convenable, on transforme ce cercle en le cercle-unité. Par une rotation, on suppose que le point d'affixe 1 se trouve sur l'arc de cercle d'extrémités A et D. Ces opérations multiplient toutes les distances par une constante et mais ne changent pas la relation de Ptolémée.
Ainsi, on peut supposer que les points a, b, c et d sont sur le cercle unité et que leurs arguments satisfont à $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < \delta < 2\pi$. De la sorte, on a par exemple : $(\beta - \alpha)/2 < \pi$ donc : $\sin(\beta - \alpha)/2 > 0$, etc.
Calculons les distances AB, etc. On a d'abord en factorisant les arcs-moitiés :

$$(*) \qquad e^{i\beta} - e^{i\alpha} = e^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \left(e^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\beta-\alpha}{2}} \right) = 2ie^{i\frac{\beta+\alpha}{2}} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Il vient donc : $AB = 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$.
Pour démontrer le théorème de Ptolémée, il s'agit donc de prouver :

$$\sin \frac{\gamma - \alpha}{2} \sin \frac{\delta - \beta}{2} = \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \sin \frac{\delta - \gamma}{2} + \sin \frac{\delta - \alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}.$$

En utilisant la relation célèbre :

$$2 \sin \frac{q + p}{2} \sin \frac{q - p}{2} = \cos p - \cos q,$$

qui résulte d'ailleurs de la relation $(*)$ ci-dessus, on transforme chaque produit de sinus en différence de cosinus : dans le membre de droite, deux d'entre eux se simplifient et le reste est égal au membre de gauche.
On peut aussi tout multiplier par $(2i)^2 e^{\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}}$, ce qui ramène à vérifier :

$$(e^{i\gamma} - e^{i\alpha})(e^{i\delta} - e^{i\beta}) = (e^{i\beta} - e^{i\alpha})(e^{i\delta} - e^{i\gamma}) + (e^{i\delta} - e^{i\alpha})(e^{i\gamma} - e^{i\beta}),$$

mais c'est essentiellement la preuve suivante.

3° **Birapport**

(a) Rappelons que le birapport de quatre nombres complexes distincts a, b, c, d est :[4]

$$[a, b, c, d] = \frac{c - a}{d - a} \times \frac{d - b}{c - b}.$$

Propriétés :
– le birapport est invariant par homographie (calcul direct ou...) ;
– le birapport est réel SSI les points sont cocycliques ou alignés (théorème de l'angle inscrit, essentiellement).

(b) **Aparté.** On peut ajouter les propriétés suivantes :
– si a, b, c et d sont sur un même cercle dans cet ordre et si $a = e^{i\alpha}$, etc., on a :

$$[a, b, c, d] = \frac{\sin \frac{\gamma-\alpha}{2} \sin \frac{\delta-\beta}{2}}{\sin \frac{\delta-\alpha}{2} \sin \frac{\gamma-\beta}{2}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

– quand on permute les arguments (24 permutations), le birapport ne prend que 6 valeurs : si $r = [a, b, c, d]$, les autres[5] sont $1 - r$, $1/r$, $1/(1 - r)$, $1 - 1/r$, $1/(1 - 1/r)$.

4. Il semble que j'aie donné une autre définition mercredi, ce qui m'ennuie un peu mais qui ne change rien de fondamental ; cela correspond à permuter les points a et b et pourrait expliquer les problèmes pour mes formules de la dernière minute où plus personne n'écoutait de toute façon.

5. Il est intéressant de constater et d'expliquer que les six valeurs, qui sont des homographies en r, forment par composition un groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$, quotient de $\mathfrak{S}_4$.

Vérifions le calcul du birapport. Quitte à faire une similitude convenable (pourquoi est-ce possible ?), on peut supposer que a, b, c et d sont sur le cercle unité et que $0 \leq \alpha < \beta < \gamma < \delta$. En utilisant le calcul de $(e^{i\beta} - e^{i\alpha})$ au paragraphe précédent, il vient (tous les $2i$ et les arcs-moitiés se simplifient) :

$$[a, b, c, d] = \frac{e^{i\gamma} - e^{i\alpha}}{e^{i\delta} - e^{i\alpha}} \times \frac{e^{i\delta} - e^{i\beta}}{e^{i\gamma} - e^{i\beta}} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}}{\sin\frac{\delta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}} = \frac{AC \cdot BD}{AD \cdot BC}.$$

Soit alors quatre droites D_k ($1 \leq k \leq 4$) ayant un point commun P. Si les D_k coupent une droite-témoin Δ en A_k ($1 \leq k \leq 4$), alors le birapport $[a_1, a_2, a_3, a_4]$ ne dépend que des droites D_k et pas de Δ.
Prouvons-le. Quitte à les permuter, on suppose que les droites sont « dans cet ordre » (sens ? pourquoi une telle permutation n'importe pas ?). Via une inversion de pôle P composée avec la conjugaison complexe, on remplace Δ par un cercle contenant P ; en appliquant une similitude, on peut supposer que les images a'_k des a_k sont sur le cercle unité et que leurs arguments satisfont à $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$. Ni les droites D_k, ni le birapport n'ont changé dans cette opération car on a appliqué une homographie. Mais par le théorème de l'angle inscrit, l'angle $(\alpha_k - \alpha_\ell)/2$ est l'angle $(\overrightarrow{PA'_\ell}, \overrightarrow{PA'_k}) = \widehat{A_k P A_\ell}$. Ainsi, le birapport s'exprime :

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] = [a'_1, a'_2, a'_3, a'_4] = \frac{\sin\widehat{A'_3PA'_1}\sin\widehat{A'_4PA'_2}}{\sin\widehat{A'_4PA'_1}\sin\widehat{A'_3PA'_2}}.$$

Cette expression ne dépend manifestement que des droites (P, A_k et A'_k sont alignés).
(c) Application au théorème de Ptolémée (avec réciproque). En échangeant a et b, le birapport s'écrit :

$$[b, a, c, d] = \frac{(c-b)(d-a)}{(d-b)(c-a)} = \frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC}\, e^{i\theta}, \quad \text{où } \theta = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})\ [2\pi].$$

En supposant A, B, C, D sur un même cercle dans cet ordre, on a : $\theta = 0\ [2\pi]$. Permutons a et c : on vérifie de même que $[b, c, a, d]$ est un réel strictement positif, puisque son argument est $\theta' = (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) - (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CA})$. On obtient alors :

$$\frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC} + \frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC} = [b, a, c, d] + [b, c, a, d] = \frac{(b-c)(d-a)}{(b-d)(c-a)} + \frac{(b-a)(c-d)}{(b-d)(c-a)}.$$

Pour le théorème de Ptolémée, il suffit donc de montrer que ceci vaut 1, ou bien :

$$(b-c)(d-a) + (b-a)(c-d) = (b-d)(c-a),$$

ce qui est immédiatement vérifiés pour tous a, b, c, d.
Une fois l'énoncé algébrisé, on peut aussi démontrer la réciproque. En effet, on a pour a, b, c et d quelconques, par l'inégalité triangulaire :

$$1 = |[b, a, c, d] + [b, c, a, d]| \leq |[b, a, c, d]| + |[b, c, a, d]| = \frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC} + \frac{BC \cdot AD}{BD \cdot AC},$$

avec égalité [6] SSI $[b, a, d, c]$ et $[b, c, a, d]$ ont le même argument. Notons θ' celui de $(b, c, a, d]$. On en déduit que

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC,$$

avec égalité SSI $\theta = \theta'\ [2\pi]$, c'est-à-dire SSI

$$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) + \pi\ [2\pi],$$

ce qui signifie que A, B, C et D sont cocycliques (égalité modulo π) et, plus précisément, que B et D ne sont pas sur le même arc d'extrémités A et C (égalité modulo 2π) : en d'autres termes, A, B, C et D sont sur un même cercle dans cet ordre.

6. En effet, pour z et w non nuls, la relation d'al-Kashi donne : $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| \cos \operatorname{Arg}(z/w)$.

4° Inversion

(a) Définition et premières propriétés. Une inversion de centre A et de rayon/rapport $k > 0$ est l'appplication du plan privé de $\{A\}$ dans lui-même qui, à un point M, associe le point M' de la demi-droite $[AM)$ d'origine A tel que : $AM \cdot AM' = k^2$. En complexes, si a est l'affixe de A, z et z' celles de M et M', on a :

$$z' - a = \frac{k^2}{\overline{z - a}}.$$

(En effet, $z' - a$ et $z - a$ ont alors le même argument, d'où l'appartenance de M' à $[AM)$ et les bons modules.)
Propriétés de l'inversion :

1. une inversion est une involution ;
2. l'image d'une droite ou d'un cercle est une droite ou un cercle ; (plus précisément, une droite contenant A est globalement invariante ; l'image d'une droite ne contenant pas A est un cercle contenant A (privé de A) dont la tangente en A est parallèle à la droite, l'image d'un cercle ne contenant pas A en est un autre ;)
3. si B et C sont distincts de A et B', C' leurs images, on a :

$$B'C' = \frac{k^2\, BC}{AB \cdot AC}.$$

Prouvons ces propriétés. La première est évidente. La clé de la seconde, c'est qu'une inversion est la composée de la conjugaison et d'une homographie $z \mapsto k^2/(z - a)$.
Étant donné une droite ou un cercle $\mathcal{C}$, on choisit trois points b, c et d ; on caractérise alors $\mathcal{C}$ comme l'ensemble des z tels que $[z, b, c, d]$ est réel. Mais le birapport est invariant par homographie et un réel est invariant par conjugaison : par suite, l'image de z appartient à la droite ou au cercle contenant les images de b, c et d ; on conclut facilement à l'égalité grâce à la surjectivité de l'inversion.
La version précisée demande un peu de calcul ; on peut les faire avec les complexes ou en coordonnées cartésiennes ; il est suffisant de calculer l'image d'un cercle centré sur $\mathbb{R}^+$ ou d'une droite $x = x_0$ avec $x_0 > 0$ (pourquoi ?).
Quant à la dernière assertion, elle est facile :

$$|c' - b'| = \left| \frac{k^2}{\overline{c - a}} - \frac{k^2}{\overline{b - a}} \right| = \frac{k^2 |b - c|}{|c - a| \cdot |b - a|}.$$

(b) Application au théorème de Ptolémée (avec réciproque). Effectuons une inversion de centre A et de rapport 1 (peu importe le rapport). Si A, B, C et D sont cocycliques dans cet ordre, les images B', C' et D' de B, C et D sont alignées et dans cet ordre (on s'en convainc facilement). On a donc : $B'D' = B'C' + C'D'$. Avec la propriété 3 des inversions, on a :

$$\frac{BD}{AB \cdot AD} = \frac{BC}{AB \cdot AC} + \frac{CD}{AC \cdot AD},$$

ce qui est l'égalité de Ptolémée.
Inversement, si l'égalité ci-dessous est satisfaite, on en déduit avec la même formule que $B'D' = B'C' + C'D'$, ce qui entraîne l'alignement de B', C' et D' puis, par inversion, la cocyclicité de A, B, C et D.