Séries de Fourier.

Exercice 1 (Développement en série de Fourier et formule de Parseval)
Soit f la fonction paire, 2π-périodique définie sur $[0, \pi]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x \in]1, \pi]. \end{cases}$$

1. Déterminer la série de Fourier associée à la fonction f et préciser sa convergence.
2. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2} = \frac{\pi - 1}{2}.$$
3. Montrer que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2n)}{n} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 2 (L'inégalité de Wirtinger) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe C^1. On suppose que $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$. Le but de l'exercice est de montrer l'inégalité de Wirtinger :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 \, dt. \qquad (1)$$

1. Rappelons que si g est une fonction 2π-périodique et continue par morceaux, on note $c_n(g)$ son n-ième coefficient de Fourier défini par
$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} \, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$
Montrer que $c_n(f') = inc_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$.
2. En utilisant la formule de Parseval, en déduire (1).

Exercice 3 (Le développement eulérien du sinus) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. On désigne par f_α la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in]-\pi, \pi], \qquad f_\alpha(t) = \cos(\alpha t).$$

1. Calculer la série de Fourier de f_α. En déduire que

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \qquad \text{cotan}(t) = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

2. Fixons $x \in]0, \pi[$ et soit $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \begin{cases} \text{cotan}(t) - \frac{1}{t} & \text{si } 0 < t \leq x \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Vérifier que f est continue sur $[0, x]$ et montrer que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

3. En déduire que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \qquad \sin(t) = t \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right),$$

où l'égalité ci-dessus signifie que la suite $t \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{t^2}{n^2\pi^2}\right)$ converge vers $\sin(t)$ quand $N \to +\infty$.

Exercice 4 (Equations différentielles et séries de Fourier) On considère l'équation différentielle

$$(E_{a,b}) \qquad y''(t) + (a + be^{2it})y(t) = 0,$$

avec a, b deux nombres complexes.

1. On suppose dans cette question que a est réel et $b = 0$. Résoudre $(E_{a,0})$. L'équation $(E_{a,0})$ admet-elle des solutions non nulles 2π-périodiques ?
2. Soit f une fonction indéfiniment dérivable et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k strictement positif, on a lorsque n tend vers $+\infty$:

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right) \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

3. (a) Montrer que toute solution de $(E_{a,b})$, 2π-périodique, est indéfiniment dérivable, développable en série de Fourier ainsi que ses dérivées.
   (b) Soit g la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par $g(t) = (a + be^{2it})f(t)$. Pour tout entier n, calculer $c_n(g)$ en fonction de $c_n(f)$.
4. Montrer que les coefficients de Fourier $c_n(f)$ d'une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{a,b})$ vérifient la relation :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \qquad (n^2 - a)c_n(f) = bc_{n-2}(f).$$

5. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes définie par :

$$\begin{cases} \gamma_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \gamma_n = \frac{b\gamma_{n-1}}{4n^2}, \end{cases}$$

et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n e^{2int}$. Montrer que la fonction φ est une solution 2π-périodique de l'équation $(E_{0,b})$.

Exercice 5 (Le théorème de Féjer) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et 2π-périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_k(x) = e^{ikx}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k, \qquad C_n(f) = \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_n(f)}{n+1},$$

où les $c_k(f)$ sont les coefficients de Fourier de f et

$$\tilde{S}_n = \sum_{k=-n}^{n} e_k, \qquad \tilde{C}_n = \frac{\tilde{S}_0 + \tilde{S}_1 + \cdots + \tilde{S}_n}{n+1}.$$

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{C}_n(t)\,dt = 1.$$

2. Montrer que, pour tout $\alpha \in]0,\pi]$, la suite de fonction $(\tilde{C}_n)$ converge uniformément vers 0 sur $[-\pi,\pi] \setminus [-\alpha,\alpha]$.
3. Montrer, que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$C_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\tilde{C}_n(t)\,dt.$$

4. En déduire le théorème de Féjer : la suite de fonction $(C_n(f))$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.