### 4.2.2 Solution de la deuxième épreuve écrite

**Partie I**

1) On prend pour $f$ l'application de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définie par

$$f(t,x) = (x_2, -x_1 - qx_1^3),$$

où $x = (x_1, x_2)$ et $\mathrm{U} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2$.

2) On a $u_1' = u_2$ et $u_2' = -u_1$, donc la fonction $u_1$ est deux fois dérivable et satisfait à l'équation différentielle

$$u_1'' = -u_1.$$

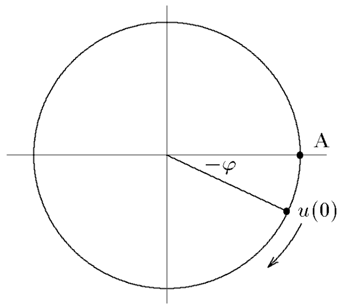
Les solutions de cette équation différentielle sont connues. Il existe deux nombres réels A et $\varphi$ tels que l'on ait, pour $t \in \mathbf{R}$,

$$u_1(t) = \mathrm{A}\cos(t+\varphi).$$

On en déduit

$$u_2(t) = u_1'(t) = -\mathrm{A}\sin(t+\varphi).$$

Ceci montre que le point $u(t)$ décrit le cercle de centre $(0,0)$, de rayon $|\mathrm{A}|$, dans le sens indirect.




3) a) Supposons $q > 0$ et posons $\gamma = u_1^2 + \dfrac{q}{2}\, u_1^4 + u_2^2$. On a alors

$$\gamma' = 2u_1u_1' + 2qu_1^3u_1' + 2u_2u_2' = 2u_1u_2 + 2qu_1^3u_2 + 2u_2(-u_1 - qu_1^3) = 0$$

La fonction $\gamma$ est donc constante sur $\mathbf{R}$. Soit $p \in \mathbf{R}$ sa valeur ; pour tout $t \in \mathbf{R}$ on a $\gamma(t) = p$ ; autrement dit le point $u(t)$ appartient à la courbe $\mathrm{C}_p$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) b) On a $p = u_1(t)^2 + \frac{q}{2}\, u_1(t)^4 + u_2(t)^2$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, de sorte que $p$ est toujours $\geqslant 0$. Si $p = 0$, chacun des trois termes de la somme est nul et l'on a $u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3) c) Supposons désormais $p > 0$. Pour $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, posons

$$\mathrm{F}(x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{q}{2}\, x_1^4 + x_2^2.$$

La courbe $\mathrm{C}_p$ est définie par l'équation $\mathrm{F}(x_1,x_2) = p$. La fonction F est polynomiale (donc de classe $\mathrm{C}^\infty$). Elle est invariante par les symétries $x_1 \mapsto -x_1$ et $x_2 \mapsto -x_2$. Ses dérivées partielles sont

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1} = 2x_1(1+qx_1^2), \qquad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2} = 2x_2.$$

Elles ne s'annulent simultanément qu'au point $(0,0)$ qui n'est pas sur la courbe $\mathrm{C}_p$. La courbe est donc régulière. Les points d'intersection avec les axes sont les suivants :

Pour $x_1 = 0$, on a $x_2 = \pm\sqrt{p}$ ; comme $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_1}(0,x_2) = 0$, les tangentes en ces points sont horizontales.

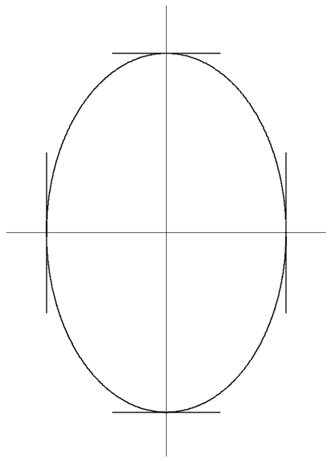
Pour $x_2 = 0$, on a $x_1 = \pm\lambda$, où $\lambda^2$ est la racine positive du polynôme $\frac{q}{2}\, x_1^4 + x_2^2 - p$. Remarquons l'inégalité $\lambda < \sqrt{p}$. Comme $\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_2}(x_1,0) = 0$, les tangentes en ces points sont verticales.

Il résulte alors de la forme de l'équation que la courbe $C_p$ est contenue dans le rectangle $-\lambda \leqslant x_1 \leqslant \lambda$, $-\sqrt{p} \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{p}$.

Pour $x_1$ donné dans l'intervalle $[0, \lambda]$, l'équation $F(x_1, x_2) = p$ possède une unique solution positive $x_2$ donnée par

$$x_2 = \sqrt{p - x_1^2 - \frac{q}{2}\, x_1^4}.$$

La fonction $t \mapsto \sqrt{p - t^2 - \frac{q}{2}\, t^4}$ est continue et décroissante de $\sqrt{p}$ à $0$ sur l'intervalle $[0, \lambda]$. Ceci donne une idée de la courbe $C_p$ dans le quart de plan $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$. Les symétries par rapport aux deux axes de coordonnées permettent de compléter.



3) d) Remarquons d'abord que la fonction $u$ est de classe $C^1$ puisque l'on a $u'(t) = f(t, u(t))$ où la fonction $f$ est continue (I.1). Une démonstration par récurrence montre d'ailleurs que la fonction $u$ est de classe $C^n$ pour tout entier $n \geqslant 1$, c'est-à-dire de classe $C^\infty$.

Posons $\rho(t) = |u(t)| = \sqrt{u_1(t)^2 + u_2(t)^2}$. Comme la fonction $u$ ne s'annule pas, la fonction $\rho$ est de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}$ et ne s'annule pas.

Pour démontrer l'existence d'une fonction $\theta$, on peut identifier $\mathbf{R}^2$ à $\mathbf{C}$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, le module du nombre complexe $u(t)/\rho(t)$ est égal à $1$. Le théorème de relèvement de l'exponentielle affirme l'existence d'une fonction $\theta$ de classe $C^1$ sur $\mathbf{R}$ telle que l'on ait $\exp(i\theta(t)) = u(t)/\rho(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. Posons $U(t) = u(t)/\rho(t)$. La fonction $\theta$ est caractérisée par sa dérivée $\theta'(t) = U'(t)/U(t)$ et par sa valeur en un point, par exemple $\theta(0)$, choisie (à $2\pi$ près) de telle sorte que $\exp(i\theta(0)) = U(0)$.

3) e) En substituant $\rho\cos\theta$ et $\rho\sin\theta$ à $u_1$ et $u_2$ dans le système différentiel du début, on obtient un nouveau système :

$$\rho' \cos\theta - \rho\,(\sin\theta)\,\theta' = \rho\,\sin\theta,$$

$$\rho' \sin\theta + \rho\,(\cos\theta)\,\theta' = -\rho\,\cos\theta - q\,\rho^3(\cos\theta)^3.$$

De ce système, on déduit

$$\theta' = -1 - q\,\rho^2(\cos\theta)^4.$$

Il en résulte que l'on a $\theta'(t) < -1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$. On en déduit $\theta(t) \leqslant \theta(0) - t$ pour $t \geqslant 0$, et $\theta(t) \geqslant \theta(0) - t$ pour $t \leqslant 0$. La fonction $\theta$ décroit de $\infty$ à $-\infty$ lorsque $t$ varie de $-\infty$ à $\infty$.

Pour voir que la courbe $C_p$ est entièrement parcourue par le point $u(t)$, il suffit de remarquer que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, la courbe $C_p$ possède exactement un point dont l'angle polaire est $\alpha$. En effet, substituons $(r\cos\alpha, r\sin\alpha)$ à $(x_1, x_2)$ dans l'équation de la courbe $C_p$ :

$$\frac{q}{2}\,(\cos\alpha)^4 r^4 + r^2 - p = 0.$$

Le carré $r^2$ est racine du polynôme $\frac{q}{2}(\cos\alpha)^4\,\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - p$ ; or ce polynôme a une unique racine $> 0$, d'où deux valeurs opposées et $\neq 0$ pour $r$.

Ceci établi, on a vu que toute valeur $\alpha$ de l'angle polaire est atteinte par la fonction $\theta$. D'où le résultat.

## Partie II : Barrières

1) Pour $t \in [a,b]$, posons $\Lambda(t) = h(t)e^{-\mathrm{K}t}$. La fonction $\Lambda$ est dérivable et l'on a

$$\Lambda'(t) = (h'(t) - \mathrm{K}h(t))\,e^{-\mathrm{K}t} \leqslant 0.$$

Comme $\Lambda(a) = 0$, on a $\Lambda(t) \leqslant 0$, d'où aussi $h(t) \leqslant 0$ sur $[a,b]$.

2) a) On suppose l'exacte négation du résultat visé, à savoir qu'il existe, dans l'intervalle $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$, un nombre réel $t^* \geqslant t_0$ et tel que $\alpha(t^*) > u(t^*)$.

La fonction $u - \alpha$ est $\geqslant 0$ au point $t_0$ et $< 0$ au point $t^*$, et elle est continue. L'ensemble X des points $x$ de l'intervalle $[t_0, t^*]$ (contenu dans $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$) tels que $u(x) - \alpha(x) \geqslant 0$, est fermé dans $\mathbf{R}$ et contient le point $t_0$, mais pas le point $t^*$.

Soit $t_1$ la borne supérieure de l'ensemble X. Le point $t_1$ appartient à l'ensemble X qui est fermé dans $\mathbf{R}$ ; on a donc $t_0 \leqslant t_1 < t^*$ et $u(t_1) \geqslant \alpha(t_1)$. Par ailleurs, on a $u(t) - \alpha(t) < 0$ pour $t_1 < t \leqslant t_0$ puisque la borne supérieure $t_1$ est un majorant de l'ensemble X. En raison de la continuité des fonctions $u$ et $\alpha$, on a donc $u(t_1) - \alpha(t_1) \leqslant 0$, d'où finalement $u(t_1) = \alpha(t_1)$.

2) b) La fonction $f$ est localement lipschitzienne en $x$, et le point $(t_1, u(t_1))$ appartient à U. Il existe donc deux nombres réels $\varepsilon > 0$ et $\mathrm{C} > 0$ tels que le rectangle

$$\Gamma(\varepsilon, \mathrm{C}) = [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon] \times [u(t_1) - \varepsilon, u(t_1) + \varepsilon]$$

soit inclus dans U et que, pour tous points $(t, x_1)$ et $(t, x_2)$ de $\Gamma(\varepsilon, \mathrm{C})$, on ait

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leqslant \mathrm{C}|x_1 - x_2|.$$

Fixons $\varepsilon$ et C ayant ces propriétés.

Les fonctions $u$ et $\alpha$ sont continues. Il existe donc un nombre réel $t_2$ tel que $t_1 < t_2 \leqslant t^*$ et $t_2 \leqslant t_1 + \varepsilon$ et que l'on ait

$$|u(t) - u(t_1)| \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad |\alpha(t) - \alpha(t_1)| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour} \quad t_1 \leqslant t \leqslant t_2.$$

Rappelons que l'on a $\alpha(t_1) = u(t_1)$ ; ainsi, pour $t \in [t_1, t_2]$, les points $(t, u(t))$ et $(t, \alpha(t))$ appartiennent au rectangle $\Gamma(\varepsilon, \mathrm{C})$ et l'on a

$$|f(t,u(t)) - f(t,\alpha(t))| \leqslant \mathrm{C}|u(t) - \alpha(t)|.$$

2) c) Pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t))$ et $u'(t) = f(t, u(t))$. D'après (II.2.b), pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a

$$\alpha'(t) - u'(t) \leqslant f(t,\alpha(t)) - f(t,u(t)) \leqslant |f(t,\alpha(t)) - f(t,u(t))| \leqslant \mathrm{C}|\alpha(t) - u(t)|.$$

D'après (II.2.a), on a $\alpha(t) - u(t) \geqslant 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$ ; on en déduit

$$\alpha'(t) - u'(t) \leqslant \mathrm{C}(\alpha(t) - u(t)).$$

En appliquant la question (II.1) à la fonction $h = \alpha - u$, on obtient $\alpha(t) - u(t) \leqslant 0$ pour $t \in [t_1, t_2]$, ce qui contredit (II.2.a).

On a ainsi démontré, par l'absurde, que l'on a $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

3) a) Prenons $\alpha(t) = \dfrac{1}{\lambda - t}$ pour $t \in ]-\infty, \lambda[$ ; on a

$$\alpha'(t) = \frac{1}{(\lambda - t)^2} \leqslant \frac{1}{(\lambda - t)^2} + \Big(\sin\frac{t}{\lambda - t}\Big)^2 = f(t, \alpha(t)).$$

3) b) Soient $\mathrm{I}$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une solution de l'équation (E). Soit $t_0 \in \mathrm{I}$ un nombre réel tel que $u(t_0) > 0$. Choisissons un nombre réel $\lambda > t_0$ assez grand pour que $u(t_0) \geqslant 1/(\lambda - t_0)$, par exemple $\lambda = t_0 + 1/u(t_0)$, et démontrons que $\lambda$ est un majorant de $\mathrm{I}$.

L'application $\alpha$ de la question (II.3.a) est une barrière inférieure de l'équation (E). La fonction $f$ est de classe $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2$, donc localement lipschitzienne en $x$ (voir le préambule). On peut appliquer la question (II.2) d'où l'on déduit que l'on a $u(t) \geqslant \alpha(t)$ pour $t \in [t_0, \lambda[ \cap \mathrm{I}$. Si $\lambda$ n'était pas un majorant de l'intervalle $\mathrm{I}$, ce serait un point intérieur à $\mathrm{I}$ et $[t_0, \lambda]$ serait contenu dans $\mathrm{I}$. Lorsque $t$ tend vers $\lambda$ dans $[t_0, \lambda[$, $\alpha(t)$ tend vers $\infty$, donc $u(t)$ aussi, ce qui est contradictoire avec la continuité de la fonction $u$ au point $\lambda$. On a ainsi démontré par l'absurde que $\lambda$ est un majorant de $\mathrm{I}$.

4) *Lemme de la barrière supérieure* : On suppose que $\mathrm{I}$ est un intervalle réel non trivial et $\beta : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le point $(t, \beta(t))$ appartienne à $\mathrm{U}$ et que l'on ait l'inégalité

$$\beta'(t) \geqslant f(t, \beta(t)).$$

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On suppose $\beta(t_0) \geqslant u(t_0)$ ; on a alors $\beta(t) \geqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$.

Pour démontrer cela, on peut adapter la démonstration de la question (II.2) ; ou bien on *utilise* ce résultat, en remarquant que la fonction $-\beta$ est une barrière inférieure de l'équation différentielle $x' = -f(t, -x)$.

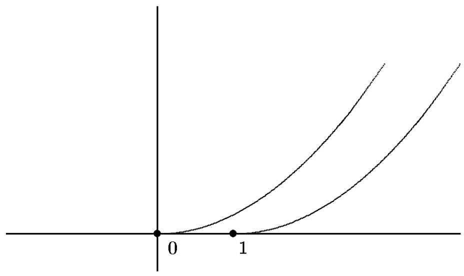
5) a) Toute solution de l'équation différentielle (E) en est à la fois barrière supérieure et barrière inférieure. Sous les hypothèses de l'énoncé, d'après les questions précédentes, on a donc $u_2(t) = u_1(t)$ dans $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$ pour $t \geqslant t_0$.

Pour traiter la partie $\leqslant t_0$ de l'intervalle $\mathrm{J}_1 \cap \mathrm{J}_2$, on change $t$ en $-t$. Plus précisément, les fonctions $t \mapsto u_1(-t)$ et $t \mapsto u_2(-t)$ sont solutions de l'équation différentielle $x' = -f(-t, x)$ à laquelle on peut appliquer le résultat précédent.

5) b.i) Les applications $(t, x) \mapsto x$, $y \mapsto |y|$ et $z \mapsto \sqrt{z}$ sont continues ; la fonction $f$ est donc continue comme composée d'applications continues.

L'application $f$ n'est pas localement lipschitzienne en $x$ au point $(0,0)$. En effet $\sqrt{|x|}/|x|$ tend vers l'infini quand $x$ tend vers $0$, avec $x \neq 0$, et ne peut être borné.

5) b.ii) Pour $x > 0$, l'égalité $x' = \sqrt{|x|}$ est équivalente à $(\sqrt{x})' = 1/2$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = 1/2$ sont les fonctions $t \mapsto (t - \gamma)/2$, où $\gamma$ est un nombre réel arbitraire. Comme $\sqrt{x}$ est $> 0$, les solutions strictement positives *maximales* de (E) sont les fonctions $u_\gamma$ définies sur les intervalles $]\gamma, \infty[$ par $u_\gamma(t) = (t - \gamma)^2/4$.




5) b.iii) Pour $\gamma \in \mathbf{R}$, notons $v_\gamma$ la fonction sur $\mathbf{R}$ obtenue en prolongeant la fonction $u_\gamma$ par $0$ sur l'intervalle $]-\infty, \gamma]$. Remarquons que $u'_\gamma(t) = (t - \gamma)/2$ tend vers $0$ quand $t$ tend vers $\gamma$ avec $t > \gamma$. Il en résulte que la fonction $v_\gamma$ est de classe $\mathrm{C}^1$. Elle est bien solution de l'équation différentielle (E).

Les fonctions $v_0$ et $v_1$ coïncident en $t = 0$ , mais pas pour $t > 0$ .

## Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

1) Soit A un nombre réel tel que $|g'(t)| \leqslant \mathrm{A}$ pour $p < t < q$ . Alors la fonction $h$ définie sur l'intervalle $]p, q[$ par $h(t) = g(t) + \mathrm{A}t$ est dérivable et l'on a $h'(t) = g'(t) + \mathrm{A}$ .

On en déduit d'abord $h'(t) \geqslant 0$ de sorte que la fonction $h$ est croissante. Ensuite, on a $h'(t) \leqslant 2\mathrm{A}$ . D'après le théorème des accroissements finis, pour $t_0$ et $t$ dans $]p, q[$ , on a $|h(t) - h(t_0)| \leqslant 2\mathrm{A}|t - t_0|| \leqslant 2\mathrm{A}(q - p)$ . Ceci prouve que la fonction $h$ est bornée sur l'intervalle $]p, q[$ .

La fonction $h$ , croissante et majorée, admet une limite quand $t$ tend vers $q$ , avec $t < q$ . Il en est de même pour la fonction $g$ .

On peut aussi utiliser l'inégalité des accroissements finis pour voir que, pour toute suite $(t_n)$ de points de l'intervalle $]p, q[$ qui tend vers $q$ , la suite $(g(t_n))$ satisfait à la condition de Cauchy, et conclure.

2) a) Les conditions de l'énoncé expriment que la fonction $\alpha$ est une barrière inférieure et la fonction $\beta$ une barrière supérieure. La conclusion résulte des questions (II.2) et (II.4) (lemmes des barrières inférieure et supérieure).

2) b) Démontrons que si l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ n'est pas contenu dans J , la solution $u$ n'est pas maximale.

Le point $t_0$ appartient à I et à J . En outre, d'après l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz, l'intervalle de définition J de la solution maximale $u$ est ouvert dans $\mathbf{R}$ . Dire que $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ n'est pas contenu dans J , c'est dire qu'il existe un nombre réel $t_1 \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{J} \cap [t_0, \infty[= [t_0, t_1[$ .

Soit K l'ensemble des points $(t, x)$ de U tels que

$$t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t).$$

Comme les fonctions $\alpha$ et $\beta$ sont continues, l'ensemble K est fermé et borné dans $\mathbf{R}^2$ . Il est donc compact. La fonction $f$ est continue ; elle est donc bornée sur K ; soit A un majorant de $f$ sur K . De la question (III.2.a), on déduit que, pour $t \in [t_0, t_1[$ , le point $(t, u(t))$ appartient à K et que l'on a donc $|u'(t)| \leqslant \mathrm{A}$ .

D'après la question (III.1), la fonction $u$ admet une limite finie $m$ quand $t$ tend vers $t_1$ , avec $t < t_1$ . Le point $(t_1, m)$ est la limite des points $(t, u(t))$ ; il appartient donc aussi à l'ensemble K (qui est fermé dans $\mathbf{R}^2$ ). En particulier, le point $(t_1, m)$ appartient à l'ensemble U .

La dérivée $u'(t) = f(t, u(t))$ tend vers $n = f(t_1, m)$ quand $t$ tend vers $t_1$ , avec $t < t_1$ . La fonction $u$ prolongée par $u(t_1) = m$ est dérivable à gauche au point $t_1$ et sa dérivée est égale à $n$ . C'est un résultat classique que l'on peut admettre. On peut aussi le démontrer. Pour cela, soit $\varepsilon$ un nombre réel $> 0$ . Comme $u'(t)$ tend vers $n$ , il existe un nombre réel $\eta > 0$ tel que l'on ait $t_0 \leqslant t_1 - \eta$ et $|u'(t) - n| \leqslant \varepsilon$ pour $t_1 - \eta \leqslant t < t_1$ . Pour $t$ et $t' \in [t_1 - \eta, t_1[$ , l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction $u(t) - nt$ s'écrit $|u(t) - u(t') - n(t - t')| \leqslant \varepsilon|t - t'|$ . Lorsque $t'$ tend vers $t_1$ , avec $t' < t_1$ , on obtient $|u(t) - m - n(t - t_1)| \leqslant \varepsilon|t - t_1|$ . Ceci démontre le résultat annoncé.

Ainsi, on a prolongé la solution $u$ au point $t_1$ ; elle n'est donc pas maximale, ce qui est contradictoire. Par suite l'intervalle $\mathrm{I} \cap [t_0, \infty[$ est contenu dans J , autrement dit la solution $u$ va jusqu'au bout de l'entonnoir $\Delta$ pour $t \geqslant t_0$ , $t \in \mathrm{I}$ .

3) a) Les fonctions $\alpha$ et $\beta$ sont dérivables ; on a $\alpha(t) < t < \beta(t)$ et

$$\alpha'(t) = 1 + \lambda e^t, \quad \alpha(t) < t, \quad \text{d'où} \quad g(t, \alpha(t)) \geqslant 1, \quad f(t, \alpha(t)) = \lambda e^t + g(t, \alpha(t)) \geqslant \alpha'(t),$$

$$\beta'(t) = 1 - \lambda e^t, \quad \beta(t) > t, \quad \text{d'où} \quad g(t,\beta(t)) \leqslant 1, \quad f(t,\beta(t)) = -\lambda e^t + g(t,\beta(t)) \leqslant \beta'(t).$$

3) b) La fonction $f$ est de classe $C^1$, donc localement lipschitzienne, et on peut appliquer les résultats de la question (III.2). Soit $u : J \to \mathbf{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle (E). L'intervalle J n'est pas vide ; choisissons $t_0 \in J$ quelconque. Choisissons $\lambda > 0$ assez grand pour que

$$t_0 - \lambda e^{-t_0} \leqslant u(t_0) \leqslant t_0 + \lambda e^{-t_0}.$$

Pour cette valeur de $\lambda$, l'entonnoir

$$\Delta = \{(t,x) \mid t \in \mathbf{R} \quad \text{et} \quad \alpha(t) \leqslant x \leqslant \beta(t)\}$$

contient le point $(t_0, u(t_0))$. D'après (III.2), l'intervalle J n'est pas majoré et l'on a, pour $t \geqslant t_0$, $\alpha(t) \leqslant u(t) \leqslant \beta(t)$, autrement dit

$$t - \lambda e^{-t} \leqslant u(t) \leqslant t + \lambda e^{-t}.$$

Ceci montre que la droite d'équation $x = t$ est asymptote à la courbe $x = u(t)$ pour $t$ tendant vers $\infty$.

4) Soient $u_1, u_2 : I \to \mathbf{R}$ deux solutions de l'équation différentielle (E) telles que $(t, u_1(t))$ et $(t, u_2(t))$ appartiennent à l'anti-entonnoir A pour tout $t \in \mathbf{R}$. D'après la question (II.5), il suffit qu'il existe un point $t$ de I tel que $u_1(t) = u_2(t)$ pour que $u_1 = u_2$ partout.

Raisonnons par l'absurde et supposons les solutions $u_1$ et $u_2$ distinctes ; alors la fonction $v = u_2 - u_1$ ne s'annule jamais. Sur l'intervalle I, la fonction continue $v$ a donc un signe constant. Quitte à échanger $u_1$ et $u_2$, on peut supposer $v > 0$ sur I. L'hypothèse sur la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ entraîne que, pour $t$ fixé, la fonction partielle $x \mapsto f(t,x)$ est croissante. On a donc, pour $t \in I$,

$$v'(t) = u_2'(t) - u_1'(t) = f(t, u_2(t)) - f(t, u_1(t)) \geqslant 0.$$

La fonction $v$ est donc croissante.

Par ailleurs, comme le point $(t, u(t))$ se trouve dans l'anti-entonnoir A, on a $\beta(t) \leqslant u_1(t) \leqslant u_2(t) \leqslant \alpha(t)$, d'où $0 \leqslant v(t) \leqslant \alpha(t) - \beta(t)$. Enfin, l'énoncé suppose que $\alpha(t) - \beta(t)$ tend vers 0 quand $t$ tend vers $b$ avec $t < b$ ; donc $v(t)$ tend aussi vers 0 dans les mêmes conditions.

La fonction $v$ est positive, croissante et tend vers 0 à l'extrémité droite de l'intervalle I ; elle est donc identiquement nulle sur I, ce qui est contradictoire avec le fait que $u_1$ et $u_2$ soient distinctes.

On a prouvé l'unicité demandée.

5) a) Le calcul donne $\widetilde{f}(t,x) = -f(-t,x)$.

5) b) Cela résulte aussi d'un calcul sans difficulté.

5) c) Soit $n$ un entier $\geqslant 1$. En application du théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution maximale $w_n$ de l'équation différentielle $(\widehat{\mathrm{E}})$ telle que $w_n(-t_n) = \widehat{\alpha}(-t_n)$. Comme on a $\widehat{\beta}(-t_n) \leqslant w_n(-t_n) \leqslant \widehat{\alpha}(-t_n)$, en appliquant (III.2.b) à l'entonnoir $\widehat{\Delta}$, on voit que la solution $w_n$ est définie sur un intervalle contenant $[-t_n, -t_0]$. Pour $t \in [t_0, t_n]$, posons $u_n(t) = w_n(-t)$. Alors $u_n$ est solution de l'équation différentielle (E) et satisfait à $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$.

La construction de $v_n$ est analogue.

5) d) Rappelons d'abord que, si $u$ et $v$ sont des solutions distinctes de (E) sur un même intervalle J, on a démontré en (II.5) que $u(t) \neq v(t)$ en tout point $t$ de J. Par suite la fonction $u - v$ a un signe constant sur l'intervalle J.

On a $u_n(t_n) = \alpha(t_n)$ et $v_n(t_n) = \beta(t_n)$ ; comme on a $\beta(t_n) \leqslant \alpha(t_n)$, on en déduit $v_n(t_n) \leqslant u_n(t_n)$ d'où $v_n(t) \leqslant u_n(t)$ pour $t \in [t_0, t_n]$ et en particulier $v_n(t_0) \leqslant u_n(t_0)$ d'après la remarque ci-dessus.