1 Recherche des entiers naturels n tels que $n+5 \mid n^3+5$

1. Décrire les formules à utiliser dans une feuille de tableur qui contiendrait :
   (a) en colonne 1 : les entiers n de 1 à 500 ;
   (b) en colonne 2 : les entiers $n+5$;
   (c) en colonne 3 : les entiers n^3+5 ;
   (d) en colonne 4 : le message "oui" lorsque $n+5$ divise n^3+5 et un message vide sinon.
2. Relever la liste des entiers naturels (non nuls) obtenus.
3. Cette liste contient-elle tous les entiers strictement positifs n tels que $n+5 \mid n^3+5$? Démontrer.

2 Corrigé

1. Feuille tableur (Open Office Calc) :

	A	B	C	D	E
1	Valeur de n	Valeur de $n+5$	Valeur de n^3+5	Test	
2	1	$=A2+5$	$=A2\hat{}3+5$	=SI(MOD(C2 ;B2)=0 ;"oui" ;"")	
3	2	$=A3+5$	$=A3\hat{}3+5$	=SI(MOD(C3 ;B3)=0 ;"oui" ;"")	
4	3	$=A4+5$	$=A4\hat{}3+5$	=SI(MOD(C4 ;B4)=0 ;"oui" ;"")	
⋮	⋮				

La fonction MOD(cellule1 ; cellule2) renvoie le reste de la division euclidienne du contenu de la cellule1 par le contenu de la cellule2 et vaut donc 0 lorsque l'entier de la cellule2 divise l'entier de la cellule1.

2. La liste obtenue :
$$\mathscr{L} = \{1; 3; 5; 7; 10; 15; 19; 25; 35; 55; 115\}$$

3. (a) Soit n un entier vérifiant $n+5 \mid n^3+5$.
   $n+5$ divise n^3+5 et divise $n+5$ donc $n+5$ divise la combinaison linéaire à coefficients entiers (CLCE) suivante de ces deux entiers : $(n^3+5) - n^2(n+5) = 5 - 5n^2$.
   $n+5$ divise $5-5n^2$ et divise $n+5$ donc $n+5$ divise la CLCE suivante de ces deux entiers : $(5-5n^2)+5n(n+5) = 25n+5$.
   $n+5$ divise $25n+5$ et divise $n+5$ donc $n+5$ divise la CLCE suivante de ces deux entiers : $(25n+5)-25(n+5) = -120$.
   On recherche donc les entiers n vérifiant $n+5 \mid n^3+5$ parmi les entiers n tels que $n+5$ est un diviseur de 120.
   Comme n est un entier naturel non nul, on a $n > 0$ et $n+5 \geqslant 6$.
   Les diviseurs de 120 supérieurs ou égaux à 6 sont les suivants : 6 ;8 ;10 ;12 ;15 ;20 ;24 ;30 ;40 ;60 ;120.
   En enlevant 5, on en déduit que si n vérifie $n+5 \mid n^3+5$ alors $n \in \mathscr{L}$.
   D'après les calculs faits à la machine, tous ces entiers sont effectivement solutions.
   Ainsi la liste des solutions est exactement la liste $\mathscr{L}$.

   (b) Pour réduire la recherche aux diviseurs de 120, on peut aussi utiliser un logiciel de calcul formel.
   Avec le logiciel Maxima, on entre la ligne suivante :
```
divide(n^3+5, n+5);
```
   Le logiciel renvoie :
$$[n^2 - 5\,n + 25, -120]$$
   ce qui signifie que l'on a :
$$n^3 + 5 = (n+5)\left(n^2 - 5\,n + 25\right) - 120$$
   Un entier n tel que $n+5$ divise n^3+5 divise la CLCE $\left(n^3+5\right) - \left(n^2 - 5\,n + 25\right)(n+5) = -120$ et on poursuit comme précédemment.
   Les heureux possesseurs de la ti 89 peuvent aussi essayer ceci :
```
expand((x^3+5)/(x+5))
```

ou encore ceci :

`propFrac((x^3+5)/(x+5))`

cette sympathique petite machine renvoie :

$$\frac{-120}{x+5}+x^2-5x+25$$

ce qui s'interprète comme ci-dessus.

3 Calculatrice

La partie test des capacités logiciels devient plus intéressante si un programme sur calculatrice est imposé : utilisation d'une boucle et d'un test conditionnel.

Traitement	Pour n allant de 1 à 500 Si $n+5$ divise n^3+5 Alors afficher n FinSi FinPour

Ce que l'on peut aussi écrire :

Traitement	Pour n allant de 1 à 500 Si $E\left(\frac{n^3+5}{n+5}\right)=\frac{n^3+5}{n+5}$ Alors afficher n FinSi FinPour

Sur machine :

Ti

```
For(N,1,500)
If int((N^3+5)/(N+5)) = (N^3+5)/(N+5)
Then
Pause N
End
End
```

Casio

```
For 1⟶ N To 500
If Intg((N^3+5) ÷ (N+5)) = (N^3+5) ÷ (N+5)
Then N◢
IfEnd
Next
```

Un exemple de fonction sur ti 89 :

Ti 89

```
obelix(n)
Func
Local i,liste
{0}→liste
For i,1,n
If (i^3+5)/(i+5)=floor((i^3+5)/(i+5)) Then
augment(liste,{i})→ liste
EndIf
EndFor
Return liste
EndFunc
```

obelix(500) renvoie la liste demandée (avec 0 qui n'est pas demandé dans l'énoncé mais qui est bien solution).