TP Angle maximum et produit scalaire

Généralisation du problème à deux points quelconques du diamètre [AB]

Sujet n°4

Cr **est un cercle de centre O et de rayon 1. [AB] est un diamètre. I et J sont deux points de [AB] distincts de A et de B. M est un point mobile sur le cercle *Cr*.**
Existe-t-il une position de M pour laquelle l'angle $\widehat{IMJ}$ a une mesure maximale ?

Trois activités de recherche sont proposées.

A- Observations géométriques et résolution expérimentale du problème

Du fait que la figure admet la droite (AB) comme axe de symétrie, on limitera la recherche au demi-cercle supérieur de diamètre [AB], les autres solutions se déduisant par symétrie.

Soit M distinct de A et de B. Les droites (MI) et (MJ) recoupent respectivement le cercle *Cr* en C et D.

- Observer la position de la droite (CD) par rapport à la droite (AB) quand l'angle est maximal.
- La perpendiculaire en C à la droite (CD) recoupe la droite (AB) en K. Observer la position de K sur (AB) quand M se déplace sur le demi-cercle. Faire une conjecture.
- Déduire des observations précédentes une construction du point M_0 solution du problème.

B- Résolution en utilisant un produit scalaire et un logiciel de calcul formel

On appelle *a* et *b* les abscisses respectives des point I et J dans un repère orthonormé direct (O ; $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB'}$). En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MJ}$, déterminer en fonction de *a* et de *b* l'abscisse x_0 du point M lorsque l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximal.

Remarque : la mise en équation est intéressante, mais les calculs sont compliqués. La réponse est pourtant relativement simple : $x_0 = (a+b)/(1+ab)$*. Il est donc conseillé dans cette partie d'utiliser un logiciel de calcul formel qui donne rapidement la solution.*

On peut aussi déterminer l'abscisse du point K : $x_k = \dfrac{b-a}{ab-1}$ *et donc vérifier qu'elle ne dépend pas de x.*

C- Résolution géométrique

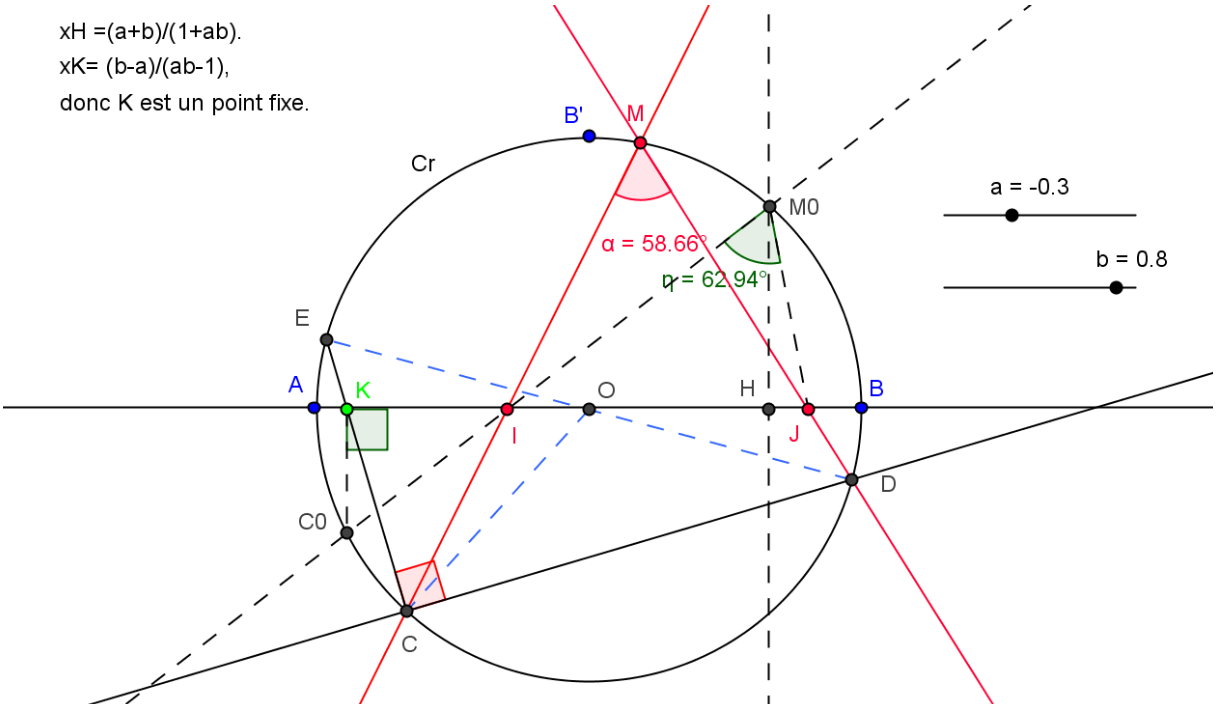
Soit E le deuxième point d'intersection de la droite (CK) avec le cercle *Cr,* et [OQ] la hauteur issue de O du triangle OCE.

Tracer les rayons [OC] et [OE]. Observer les angles $\widehat{COQ}$ et $\widehat{COD}$. Exprimer OQ en fonction de α, mesure de l'angle $\widehat{CMD}$. Comparer les longueurs OQ et OK.

Montrer que l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximal quand la longueur OQ est maximale. Quelle est la position du point Q dans ce cas ? Conclure.

- <u>La construction de la solution</u>

Avec $a = -0.3$ et $b = 0.8$.



- <u>Le calcul de l'abscisse de la solution avec le logiciel DERIVE</u>

Soit x l'abscisse de M et $f(x) = \cos(\widehat{IMJ})$