UE Analyse. Pharmacie-Ingénieurs 3ème année

Bibliographie :

- Pierre Vigoureux, “Analyse”, tome 2. Éditions ellipses.
- Jean-Marie Monier “Analyse”. Édition Dunod.

Table des matières

1 Suites numériques

1.1 Suites convergentes et limites

Définition 1.1. *On appelle* suite réelle *toute application* $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*. Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \mapsto x(n) \in \mathbb{R}$ *et l'on note* $x_n = x(n)$*. La suite est notée* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, ou simplement* (x_n)*. On appellera aussi "suite réelle " les applications à valeur réelles dont l'ensemble de départ est* $\mathbb{N}$ *privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.*

Voici trois manières différentes de noter la même suite :
- La fonction $x\colon \mathbb{N}\backslash\{0,1,2,3\} \to \mathbb{R}$ définie par $x(n) = n^2$.
- La suite $(n^2)_{n\geq 4}$.
- La suite $(16, 25, 36, \ldots)$.

Rappelons que la *valeur absolue* $|x|$ d'un nombre réel x est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Si a et b sont deux nombres réels, $|a - b|$ exprime la distance entre les points qui répresentent a et b sur la droite réelle. Observons que, pour $a \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \qquad \text{et} \qquad |x| \geq a \iff (x \leq -a \quad \text{ou} \quad x \geq a),$$

comme on le voit en distinguant les deux cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

Définition 1.2. *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle.*

1. *On dit que la suite* (x_n) *converge si et seulement s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *(appelé* limite de la suite*), tel que :*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que :} \quad \forall n \geq N \quad \text{on a } |x_n - \ell| < \epsilon.$$

   On écrit alors $\lim_{n\to\infty} x_n = \ell$*, ou* $x_n \to \ell$*. Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

2. *On dit que la suite* (x_n) diverge à l'infini *si :*

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tel que : } \forall n \geq N, \quad |x_n| \geq M.$$

   On écrit dans ce cas $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Pour les suites réelles on peut donner aussi un sens (le faire) aux écritures suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Un résultat basique est le suivant :

Théorème 1.1 (Unicité de la limite)**.** *Si la limite* ℓ *d'une suite réelle existe (finie ou infinie), elle est unique.*

1.2 Opérations avec les limites

Étant données deux suites (x_n) et (y_n), on peut considérer la suite somme, produit, quotient, etc. On a alors le résultat suivant :

Théorème 1.2. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles convergentes. Alors les suites $(x_n + y_n)$ et $(x_n y_n)$ sont convergentes et elles convergent respectivement vers la somme et le produit des limites de (x_n) et (y_n). De plus, si $y_n \neq 0$ pour tout n et $\lim y_n \neq 0$, alors la suite quotient $(\frac{x_n}{y_n})$ est bien définie et elle converge vers le quotient des limites.*

Les opérations avec les limites infinies sont plus délicates : par exemple, supposons que $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 1$, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \infty$ et $\lim_{n\to+\infty} d_n = \infty$. Il n'y a pas de théorème général permettant de calculer les limites $\lim_{n\to+\infty}(a_n c_n)$, $\lim_{n\to+\infty}(c_n/d_n)$, ou $\lim_{n\to+\infty}(b_n)^{c_n}$: dans ce type de situations on essaye d'effectuer des simplifications afin de se ramener aux cas du théorème précédent. On exprime cette difficulté en disant que $[0 \cdot \infty]$, $[\infty/\infty]$, $[1^\infty]$ sont des *formes indeterminées*. D'autres exemple de forme indéterminée sont $[0/0]$ et $[+\infty - \infty]$.

Exemple 1.1. La limite $\lim_{n\to+\infty} x_n$, où $x_n = \frac{n^2+2}{2n^2+4n+5}$, se présente sous la forme indéterminée $[\infty/\infty]$. Mais l'on peut factoriser numérateur et dénominateur par n^2, simplifier et ensuite écrire $x_n = \frac{1+2/n^2}{2+4/n+5/n^2}$. Il n'y a plus de forme indéterminée et on voit que $x_n \to 1/2$.

Théorème 1.3. *Si $x_n \to x$ et $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue en x, alors on a $f(x_n) \to f(x)$.*

Exemple 1.2. Si (x_n) est la suite de l'exemple précédent, on a $\exp(x_n) \to \sqrt{e}$, puisque l'exponentielle est une fonction continue et $\exp(1/2) = \sqrt{e}$.

Proposition 1.4. *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell_1$ et $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell_2$. Alors $\ell_1 \leq \ell_2$.*

Théorème 1.5 (théorème des gendarmes)**.** *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$. On suppose que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = \ell$ (avec $\ell \in \mathbb{R}$, ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$). Alors $\lim_{n\to+\infty} y_n = \ell$.*

Exemple 1.3. En appliquant le théorème de gendarmes, on voit que $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5(-1)^n}{2n} = \frac{3}{2}$.

1.3 Suites remarquables

Rappelons le comportement de quelques suites fondamentales.

Suites arithmétiques. Ces sont les suites (u_n) vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + b$. On trouve facilement la formule $u_n = u_0 + nb$ permettant de calculer explicitement u_n si l'on connait u_0.

Suites géométriques. Ce sont les suites de la forme $u_{n+1} = r u_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Le coefficient $r \in \mathbb{R}$ s'appelle *raison* de la suite. On trouve facilement que $u_n = u_0 r^n$.

- si $r > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$,
- si $|r| < 1$ la alors $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$.
- Pour $r = 1$, la suite géométrique r^n est constante égale à 1 et pour $r = -1$ c'est une suite divergente bornée : $(1, -1, 1, -1, \ldots)$.

La première affirmation est une conséquence de l'inégalité de Bernouilli [1] :

$$(1+\eta)^n \geq 1 + n\eta, \qquad n \in \mathbb{N},\ \eta > 0,$$

appliquée à $r = 1 + \eta$, où $\eta > 0$. La seconde découle en prenant la valeur absolue et en observant que la réciprique tend vers $+\infty$.

1. Exercice : Démontrer l'inégalité de Bernouilli. On peut utiliser une récurrence sur n, ou sinon faire appel à la formule de la puissance du binôme.

Suites de la forme $(\sqrt[n]{a})$**,** $a > 0$ **fixé.** On vérifie que $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$. Observons que $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\ln(a)}$.

Le lemme suivant fournit un critère parfois utile pour décider si une suite diverge ou converge.

Lemme 1.6. *Soit* (x_n) *une suite telle que* $x_n > 0$ *pour tout* n *et* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$*. Si* $\ell > 1$*, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$*. Si* $0 \le \ell < 1$ *alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$*.*

En effet, intuitivement, sous les hypothèses du lemme la suite (u_n) se comporte pour n grand comme la suite géométrique ℓ^n, qui diverge pour $\ell > 1$ et converge pour $0 \le \ell < 1$.

Croissances comparées. Les trois limites du théorème ci-dessous se présentent sous la forme indeterminée $[\frac{\pm\infty}{+\infty}]$. Le calcul de ces limites n'est donc pas immédiat. Ce qu'il faut retenir est que le factoriel “l'emporte sur les suites géométriques”, les suites géométriques “l'emportent sur les puissances”, et les puissances “l'emportent sur les logarithmes”. Plus précisément :

Théorème 1.7 (de croissances comparées)**.** *Définissons, pour* $n \in \mathbb{N}^*$*, le* factoriel *de* n *comme* $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ *(et par convention,* $0! = 1$*). On a*

$$\forall\, a > 1\colon \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty.$$

De plus

$$\forall\, a > 1, \quad \forall\, \alpha > 0\colon \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

Et

$$\forall\, a > 0, \quad \forall\, \alpha > 0\colon \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{\ln(n)^\alpha} = +\infty,$$

Ce théorème (au moins le deux premières conclusion) est une application directe du lemme précédent.

L'exponentielle et le nombre e**.** Rappelons que la fonction exponentielle $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable dans $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et vérifiant $\exp(0) = 1$. On peut démontrer que cette fonction existe et elle est unique. On peut alors définir le nombre irrationnel $e = \exp(1) = 2.718\ldots$. Ce nombre intervient dans les limites remarquables (se présentant sous la forme indéterminée $[1^\infty]$) ci-dessous :

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e, \qquad \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}.$$

La notion de suite de Cauchy permet détablir qu'une suite donnée est convergente, même lorsque l'on ignore la valeur de la limite.

1.4 Sous-suites

Définition 1.3. *étant donnée une suite* (x_n) *on appelle* suite extraite *(ou* sous-suite*) de* (x_n) *toute suite de la forme* $(x_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$*, où* $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une fonction strictement croissante. On utilise également la notation* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *(cela est justifié par le fait que* ϕ *définit une suite d'entiers, dans ce cas la suite croissantes* $n_k = \phi(k)$*).*

Par exemple, la suite (x_{3n}), extraite de la suite $x_n = \cos\frac{2\pi n}{3}$ ci-dessus, est la suite constante $x_{3n} = 1$. La suite extraite (x_{3n+1}) est la suite constante égale à $-1/2$.

Proposition 1.8. *Une suite* (x_n) *converge vers une limite* ℓ *si et seulement si toute suite extraite de* (x_n) *converge vers* ℓ

Lorsqu'une suite extraite (x_{n_k}) d'une suite (x_n) converge vers une limite L, on dit que L est une *valeur d'adhérence* pour la suite (x_n).

Exemple 1.4 (La série harmonique)**.** Démontrons que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$, où $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ diverge. Si par contradiction $\exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \to \ell$, alors on aurait $x_{2n} \to \ell$ et donc $x_{2n} - x_n \to 0$. Mais $x_{2n} - x_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde.

1.5 Borne supérieure et borne inférieure

Nous commençons par rappeler quelques notions étroitement liées à la relation d'ordre $\leq$ définie dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Définition 1.4. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et m, M deux nombre réels.*

- *On dit que M est un* majorant de A dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si : $\forall a \in A$ on a $a \leq M$.* *Si un tel majorant existe, on dit que la partie A est* majorée *(ou* bornée supérieurement*).*
- *On dit que m est un* minorant de A dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si $\forall a \in A$, on a $m \leq a$.* *Si un tel minorant existe, on dit que la partie A est* minorée *(ou* bornée inférieurement*).*

Exemple 1.5. L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, est minoré par 0 (en fait, tout nombre réel ≤ 0 est un minorant pour l'ensemble $\mathbb{N}$). Par contre, l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas majoré.

Définition 1.5. *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble.*

- *Si A admet un majorant M et si de plus $M \in A$, alors on dit que M est le* maximum *de A ou le* plus grand élément de A*). On écrit alors $M = \max A$*
- *Si A admet un minorant m et si de plus $m \in A$, alors on dit que m est le* minimum *de A ou le* plus petit élément de A*). On écrit alors $M = \min A$*

Exemple 1.6. On a $\max([0, 1]) = 1$. Par contre, $\max([0, 1[)$ n'existe pas

L'exemple précédent montre qu'un ensemble majoré, parfois, peut ne pas admettre de maximum.

La borne supérieure

Définition 1.6. *Étant donnée une partie A non vide de $\mathbb{R}$:*

- *Si A est majoré, on appelle* borne supérieure de A dans $\mathbb{R}$ *le plus petit des majorants de A dans $\mathbb{R}$. Cet élément est noté* $\sup A$.
- *Si A n'est pas majorée, on écrit* $\sup A = +\infty$.

Exemple 1.7. On a $\sup([0, 1]) = 1$. (Lorsque le maximum d'un ensemble A existe, on a toujours $\max A = \sup A$. Dans le cas de l'ensemble $[0, 1[$, la borne supérieure existe, contrairement au maximum. En effet, $\sup([0, 1[) = 1$, puisque 1 est le plus petit majorant de l'ensemble $[0, 1[$.

Remarque 1.8. Si $S \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante de la borne supérieure :

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A \colon a \leq S \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, a \in A \text{ tel que } S - \epsilon < a. \end{cases}$$

En effet, la première ligne exprime le fait que S est un majorant de l'ensemble. La seconde ligne précise le fait que S est le plus petit des majorants. Dans la pratique, pour déterminer la borne supérieure S d'une partie A de $\mathbb{R}$ on utilise la caractérisation suivante, qui fait intervenir les suites.

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A \colon a \leq S \\ \exists (a_n) \subset A \quad \text{telle que} \quad a_n \to S. \end{cases}$$

Ceci est une conséquence de la définition de limite et de la caractérisation précédente.

La borne inférieure

Définition 1.7. *Étant donnée une partie A non vide de $\mathbb{R}$:*

- *Si A est minoré, on appelle* borne inférieure de A dans $\mathbb{R}$ *le plus grand des minorants de A dans $\mathbb{R}$. Cet élément est noté* $\inf A$.
- *Si A n'est pas minoré, on écrit* $\inf A = -\infty$.

Exemple 1.9. On a $\inf([0,1]) = \min([0,1]) = 0$. (Lorsque le minimum d'un ensemble A existe, on a toujours $\min A = \sup A$.
Si $A = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$, on a $\inf A = 0$. Mais $0 \notin A$, ce qui signifie que le minimum de A n'existe pas.

Remarque 1.10. Si $I \in \mathbb{R}$, on a la caractérisation suivante de la borne supérieure :

$$I = \inf A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A \colon I \leq a \\ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, a \in A \text{ tel que } a < I + \epsilon. \end{cases}$$

La première ligne exprime ici le fait que I est un minorant de l'ensemble. La seconde ligne précise que I est le plus grand des minorants.

Dans la pratique, pour déterminer la borne inférieure I d'une partie A de $\mathbb{R}$ on utilise la caractérisation suivante, qui fait intervenir les suites :

$$S = \sup A \iff \begin{cases} \forall\, a \in A \colon I \leq a \\ \exists (a_n) \subset A \quad \text{telle que} \quad a_n \to I. \end{cases}$$

Nous admettons le théorème suivant, que l'on établit lorsque l'on construit rigoureusement l'ensemble $\mathbb{R}$, (dans certains ouvrages la propriété ci-dessous est connue comme l' "l'axiome du sup").

Théorème 1.9. *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Toute partie non-vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure dans $\mathbb{R}$.*

1.6 Application des bornes supérierues et inférieures à l'étude des suites

Définition 1.8.

- *Une suite réelle (x_n) est dite* croissante *si $x_{n+1} \geq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est dite* décroissante *si $x_{n+1} \leq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *On dit qu'une suite réelle (x_n) est* majorée *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Elle est* minorée *s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \geq m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Une suite qui est simultanément minorée et majorée est dite* bornée.

Dans la pratique, pour établir qu'une suite (x_n) donnée est *décroissante* on peut utiliser l'une des technique suivantes :

- vérifier que $x_n - x_{n+1} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- dans le cas où $x_n > 0$ pour tout n : vérifier que $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
- chercher une fonction dérivable $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que $x_n = f(n)$ et $f' \leq 0$ dans $\mathbb{R}^+$.

Pour les questions de convergence ou divergence que nous allons étudier, les premiers termes de la suite ne vont jouer aucun rôle. Il sera important de reconnaitre si les suites données sont croissantes ou décroissantes *à partir d'un certain rang* : c'est à dire s'il existe N tel que $(x_n)_{n \geq N}$ est croissante ou décroissante.

Exemple 1.11.

- La suite $x_n = \frac{5^n}{n!}$ est décroissante à partir d'un certain rang. On le voit facilement à l'aide de la deuxième méthode.
- La suite $x_n = \sin n + 2n$ est croissante. Dans ce cas il convient d'étudier le signe des différences $x_n - x_{n+1}$.

- La suite $x_n = \frac{n^2+10n+5}{n^2+1}$ n'est ni croissante, ni décroissante. La troisième méthode montre cependant qu'elle est décroissante à partir d'un certain rang.

Théorème 1.10. *Toute suite réelle convergente est bornée.*

Le résultat suivant sera un outil indispensable dans l'étude des séries.

Théorème 1.11 (Théorème de la limite monotone)**.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.*
- *Si la suite est croissante et majorée, alors elle converge et la limite est la borne supérieure de l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.*
- *Si la suite est décroissante et minorée, alors elle converge et la limite est la borne inférieure de l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$.*

Dém. On considère ici le cas d'une suite (x_n) croissante et majorée (l'autre cas est analogue). Notons par E l'ensemble des valeurs de la suites (x_n) : $E = \{x_n \colon c \in \mathbb{N}\}$. Notons $S = \sup E$ (Ce réel S existe car (x_n) est majorée). Comme S est le plus petit majorant de E, pour tout $\epsilon > 0$, $S - \epsilon$ n'est plus un majorant de E. Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $S - \epsilon < x_N \leq S$. Mais comme la suite est croissante, on a

$$\forall\, n \geq N \colon S - \epsilon < x_N \leq x_n \leq S.$$

En conséquence, $|x_n - S| < \epsilon$, ce qui prouve la convergence de la suite (x_n). La limite est précisement le sup de la suite. □

Remarque 1.12. Si (x_n) est une suite réelle croissante, mais non majorée, elle ne peut pas être convergente. Dans ce cas on a $\lim_{n\to\infty} = +\infty$. De même, si (x_n) est une suite décroissante, non minorée, alors $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

2 Les nombres complexes. Quelques rappels

2.1 Le corps $\mathbb{C}$

Certaines équations algébriques de degré ≥ 2 et d'inconnue réelle, comme par exemple $x^2 + 1 = 0$, n'ont pas de solutions. Nous allons maintenant élargir le corps des réels $\mathbb{R}$ en introduisant le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Dans $\mathbb{C}$ une équation algébrique de degré n possède toujours n solutions (en comptant les ordres de multiplicité). L'étude de $\mathbb{C}$ est utile en géométrie plane et en trigonométrie. De plus, $\mathbb{C}$ fournit le cadre naturel où étudier les séries entières.

Définition 2.1. *Le corps $\mathbb{C}$ est l'ensemble $\mathbb{R}^2$, muni des opération de somme et de multiplication suivantes : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x'y') \in \mathbb{R}^2$:*

$$(x, y) + (x'y') = (x + x', y + y'), \qquad (x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y').$$

On écrit très souvent $x + iy$ (notation algébrique) à la place de (x, y) (notation géométrique). Il convient de simplifier la notation algébrique des nombres complexes $(x, 0)$ et $(0, y)$: on écrit alors $x + i0 = x$ et $0 + iy = iy$ si x et y sont des réelles. En particulier, on peut voir tout nombre réelle x comme un nombre complexe : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

On voit que si $z = x + iy$ et $z' = x + iy'$ sont deux nombres complexes, alors

$$z + z' = (x + x') + i(y + y'), \qquad zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

En particulier $0 = 0 + i0$. En outre, $i = 0 + i1$ est la notation algébrique du nombre complexe $(0, 1)$, appelé *unité imaginaire*. La formule ci-dessus montre que $i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = -1$.

Le théorème ci-dessous exprime le fait que $\mathbb{C}$ est un *corps commutatif*.

Théorème 2.1. *L'opération de somme définie ci-dessus est commutative, associative, elle admet un élément neutre, qui est $0 = 0 + i0$. Tout élément z de $\mathbb{C}$ possède un opposé dans $\mathbb{C}$, noté $-z$. Si $z = x + iy$, alors $-z = -x + i(-y)$ (noté aussi $-x - iy$).*

L'opération de produit définie ci-dessus est commutative, associative, distributive par rapport à la somme, elle admet un élément neutre qui est $1 = 1 + i0$. Tout élément z de $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ possède un élément inverse, noté z^{-1} ou $\frac{1}{z}$. Si $z = x + iy$ avec x et y réels, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

2.2 Partie réelle et imaginaire. Conjugué. Module et argument

Définition 2.2. *Pour tout complexe $z = x + iy$, avec x et y réels, on définit :*

i) *Le* conjugué *de z, noté $\bar{z}$, par $\bar{z} = x - iy$.*

ii) *La* partie réelle *de z, par $\mathrm{Re}z = x$ et sa* partie imaginaire, *par $\mathrm{Im}z = y$.*

iii) *Le* module *de z, par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. (Dans le cas particulier où $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve la définition usuelle de la valeur absolue de x).*

iv) *L'*argument *de z (lorsque $z \neq 0$), noté $\mathrm{Arg}(z)$. Il s'agit de l'angle orienté (exprimé en radians) entre le demi-axe des abscisses positives et le vecteur $\vec{OP}$, où $P = (x, y)$ est le point qui représente z dans $\mathbb{R}^2$.*

Remarque 2.1. Le module $|z|$ exprime la distance entre z (vu come point de $\mathbb{R}^2$) et l'origine. Si $z \in \mathbb{C}$, avec $z \neq 0$, si θ désigne l'argument de z, on a :

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{(notation trigonométrique de } z\text{)}.$$

Bien entendu, si θ est un argument de z, alors $\theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) l'est aussi. L'argument θ d'un nombre complexe $z = x + iy \neq 0$ est tel que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Remarque 2.2. Voici quelques identités élémentaires, valables pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$.
2. $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$, $\qquad (z \neq 0)$.
3. $|z|^2 = z\bar{z}$.
4. $|zz'| = |z|\ |z'|$.

Mentionnons également deux inégalités très utiles :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \qquad \text{(inégalité triangulaire)},$$
$$\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z - z'|.$$

Rappellons la notation suivante : si θ et ϕ sont deux nombres réels on écrit

$$\theta = \phi \mod 2\pi \iff \exists\, k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta = \phi + 2k\pi.$$

Cette notation est utile pour établir des identités entre les arguments des nombres complexes.

La définition d'argument et les formules d'addition des fonctions sin et cos permettent d'établir les propriétés suivantes.

Remarque 2.3.

1. $\mathrm{Arg}(\bar{z}) = -\mathrm{Arg}z \mod 2\pi$.
2. $\mathrm{Arg}(zz') = \mathrm{Arg}(z) + \mathrm{Arg}(z') \mod 2\pi$.
3. $\mathrm{Arg}\frac{1}{z} = -\mathrm{Arg}(z) \mod 2\pi$.
4. $\mathrm{Arg}(z^n) = n\mathrm{Arg}(z) \mod 2\pi, \quad (n \in \mathbb{Z})$.

2.3 Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Les nombres complexes de la forme $z = iy$, avec $y \in \mathbb{R}$ s'appellent *imaginaires purs*. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$\exp(i\theta) = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Le lien avec les fonction trigonométrique est donné par les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Observons que

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}, \qquad (\theta, \theta' \in \mathbb{R}).$
3. $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
4. $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, \qquad n \in \mathbb{Z}.$

Une réecriture de la dernière identité donne la formule de de Moivre :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Tout nombre complexe peut donc s'écrire sous sa forme exponentielle :

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad \text{où } \rho = |z| \text{ et } \theta = \mathrm{Arg}(z).$$

On passe facilement de la notation exponentielle à la notation algébrique $z = x+iy$, en observant que

$$x = \rho\cos\theta, \quad \text{et} \quad y = \rho\sin\theta.$$

2.4 Suites complexes

Les notions suivantes généralisent celles données pour les suites réelles.

Définition 2.3. *On appelle* suite complexe *toute application* $z\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $n \mapsto z(n) \in \mathbb{R}$ *et l'on note* $z_n = z(n)$. *La suite est notée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *ou simplement* (z_n). *On appellera aussi "suite complexe " les applications à valeur complexes dont l'ensemble de départ est* $\mathbb{N}$ *privé de ses premiers éléments jusqu'à un certain rang.*

En remplaçant la valeur absolue par le module, on obtient les notions de suite complexe convergente et de limite.

Définition 2.4. *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite complexe.*

1. *On dit que la suite* (z_n) *converge si et seulement s'il existe* $\ell \in \mathbb{C}$ *(appelé* limite de la suite*), tel que :*

$$\forall\, \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que :} \quad \forall\, n \geq N \quad \textit{on a } |z_n - \ell| < \epsilon.$$

   On écrit alors $\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$, *ou* $z_n \to \ell$. *Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

2. *On dit que la suite* (x_n) diverge à l'infini *si :*

$$\forall\, M > 0 \quad \exists\, N \in \mathbb{N} \textit{ tel que : } \forall n \geq N, \quad |z_n| \geq M.$$

   On écrit dans ce cas $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Observons que

$$z_n \to \ell \iff |z_n - \ell| \to 0.$$

Théorème 2.2. *Une suite (z_n), où $z_n = x_n + iy_n$ avec x_n et y_n réels, est convergente si et seulement si les suites des parties réelles et complexes convergent. Dans ce cas,* $\lim_{n\to\infty} z_n = (\lim_{n\to\infty} x_n) + i(\lim_{n\to\infty} y_n)$.

Sous les conditions du théorème précédent, on a $|z_n| \to |\ell|$ et, si $\ell \neq 0$, $\mathrm{Arg}(z_n) \to \mathrm{Arg}(\ell) \mod 2\pi$ (comment pourrait-on définire cette notion de convergence "convergence modulo-2π ?). Observons également que $z_n \to 0$ si et seulement si $|z_n| \to 0$ et que $z_n \to \infty$ si et seulement si $|z_n| \to \infty$.

Remarque 2.4.
- Le théorème d'unicité de la limite, et le théorème de la limite d'une somme, produit ou quotient restent valable pour les suites de nombres complexes.
- Une suite complexe (z_n)est dite *bornée* si et seulement si la suite réelle $(|z_n|)$ est bornée. Comme dans le cas réel, toute suite complexe convergente est bornée.

Exemple 2.5. La suite (i^n) est bornée, mais elle ne converge pas. En revanche, la suite $(\frac{i^n}{n})$ converge vers 0. La suite $(1+\frac{1}{n})e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})}$ converge vers i.

Pour des suites de nombres complexes, les inégalités $z_n \leq z_{n+1}$, n'ont pas de sens, parce qu'il n'y a pas dans $\mathbb{C}$ une relation d'ordre naturelle. En particulier le théorème des gendarmes, ou le théorème des suites monotones (croissantes ou décroissantes) vus dans la section précédente n'ont pas d'analogue pour les suite complexes. Pour cette même raison, les notions de $\limsup$ et $\liminf$ ne sont pas définies pour des suites complexes.

En revanche, la notion de sous-suite est parfaitement définie pour des suites de nombres complexes et le résultat de la proposition 1.8 reste vrai.

3 Séries dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

étant donnée une suite (x_n) de nombres réels ou complexes, on peut former une nouvelle suite (S_n) en considérant ses *sommes partielles* d'ordre n :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = x_0 + \cdots + x_n.$$

Exemple 3.1.
- Si $x_n = (-1)^n$ la suite des sommes partielles associée à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$.
- Si $x_n = n$, la suite des sommes partielles associée à $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\frac{n(n+1)}{2})_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si $z_n = i^n$, la suite des sommes partielles associée à $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1+i, i, 0, 1, 1+i, i, 0, \ldots).$$

Définition 3.1. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est appelée* série *de terme général x_n. Elle est notée $\sum x_n$. On dit que la série $\sum x_n$ converge (resp. diverge) si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (resp. diverge). Si la série converge, on note*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Ce nombre réel ou complexe est appelé la somme *de la série.*

Pour toute série $\sum x_n$ convergente la suite (R_n), où $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_n$ est bien définie. On appele R_n le *reste d'ordre n*. On a donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S_N + R_N \qquad \text{(décomposition somme partielle+reste).}$$

Observons que pour toute série convergente, la suite des restes vérifie $R_n \to 0$. Très souvent, on n'arrivera pas à calculer explicitement les sommes exacte des séries. On pourra cependant fournir une valeur approchée avec une précision arbitrairement grande, pourvu que l'on sache estimer la vitesse à laquelle (R_n) converge vers zéro.

Exemple 3.2 (Séries téléscopiques)**.** Il arrive parfois que le terme générale de la série $\sum x_n$ puisse s'écrire facilement comme

$$x_n = b_{n+1} - b_n$$

où (b_n) est une autre suite. Dans ce cas la série $\sum x_n$ converge si et seulement si la suite (b_n) converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n - b_0.$$

Cet identité vient de ce que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(b_{k+1} - b_k) = b_{n+1} - b_0$ et en prenant la limite pour $n \to \infty$ dans cet identité.

Exemple 3.3 (Série géométrique)**.** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z \neq 1$. Alors on voit par récurrence que les sommes partielles sont $\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$.

- Si $|z| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$, et $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1}{1-z}$. Donc $\sum z^n$ converge et sa somme est $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.
- Si $|z| \geq 1$, la série géométrique *diverge grossièrement* (voir ci-dessous).

Proposition 3.1 (Propriétés élémentaires)**.** *Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles ou complexes et $\lambda \in \mathbb{C}$.*

1. *Si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ convergent alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda x_n + y_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} x_n + \sum_{n=0}^{+\infty} y_n.$$

2. *Si $\lambda \neq 0$, si $\sum x_n$ diverge et $\sum y_n$ converge alors $\sum(\lambda x_n + y_n)$ diverge.*

Observons que si $\sum x_n$ et $\sum y_n$ divergent, on peut avoir quand même $\sum(x_n + y_n)$ qui converge. C'est le cas si par exemple $x_n = -y_n$.

3.1 Une condition nécessaire de convergence

Proposition 3.2. *Si $\sum x_n$ converge, alors* $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Dém. Soit $S \in \mathbb{R}$ la somme de la série. On a alors $S = \lim_{n\to\infty} S_n$, où $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ sont les sommes partielles. On a $x_n = S_n - S_{n-1}$ et l'on trouve $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$. □

On utilise souvent le résultat précédent sous sa forme contraposée :

$$x_n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad \sum x_n \quad \text{diverge.}$$

On dit dans ce cas que la série est *grossierement divergente.* à titre d'exemple, considérons la suite géométrique (z^n), où $z \in \mathbb{C}$ et $|z| \geq 1$. Comme $|z^n| = |z|^n \not\to 0$, la série géométrique est dans ce cas grossièrement divergente.

En revanche, si on a une suite (x_n) telle que $x_n \to 0$, on a parfois que $\sum x_n$ converge, et parfois que $\sum x_n$ converge.

3.2 Séries réelles à termes positifs

Les séries de termes positifs sont les séries $\sum x_n$, où $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous allons établir plusieurs critères de convergence ou divergence pour ce type de séries. L'applicabilité des critères de cette section sera autorisée aussi pour les séries qui sont à termes positifs uniquement à partir d'un certain rang.

Proposition 3.3 (critère de comparaison)**.** *Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Alors*
i) si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge,
ii) si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge.

Dém.

i) Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T_n$. Si $\sum y_n$ converge, notons $T = \lim_{n\to+\infty} T_n$. Comme $\sum y_n$ est à termes positifs, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n \leq T$. De plus, comme $\sum x_n$ est à termes positifs, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Comme elle est majorée par T, elle est convergente.

ii) Si $\sum x_n$ diverge, puisqu'elle est à termes positifs, $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

□

Définition 3.2 (Suites équivalentes, suites négligeables)**.** *Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles ou complexes.*

- *On dit que les deux suites sont* équivalentes *à l'infini et l'on note $x_n \overset{n\to\infty}{\sim} y_n$ si et seulement si*

$$x_n = y_n(1+\varepsilon(n)) \qquad \text{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0.$$

- *On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* négligeable *devant $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'infini, et on note $x_n \overset{n\to\infty}{=} o(y_n)$ si et seulement si $x_n = y_n\varepsilon(n)$ avec $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$.*

Exemple 3.4 (Formule de Stirling)**.** Nous admettons la formule de Stirling ci-dessous, qui fournit un équivalent simple à utiliser pour le factoriel de n :

$$n! \overset{n\to\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

Proposition 3.4 (Critère asymptotiques pour les séries)**.** *i) Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles à termes positifs telles que $x_n \overset{n\to\infty}{\sim} y_n$. Alors $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).*
ii) Soient $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries réelles telles que $x_n \overset{n\to\infty}{=} o(y_n)$. On suppose que $\sum y_n$ est à termes positifs et qu'elle converge. Alors $\sum x_n$ est aussi convergente.

Dém.

i) Si $x_n \overset{n\to\infty}{\sim} y_n$, alors pour n assez grand, $x_n = y_n(1+\varepsilon(n))$ où $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = 0$. Pour n assez grand, $-1/2 \leq \varepsilon(n) \leq 1/2$ donc $y_n/2 \leq y_n(1+\varepsilon(n)) = x_n \leq 3y_n/2$. Puisque pour n assez grand $y_n/2 \leq x_n$, si $\sum x_n$ converge alors $\sum y_n$ converge et si $\sum y_n$ diverge alors $\sum x_n$ diverge. Puisque pour n assez grand $x_n \leq 3y_n/2$, si $\sum y_n$ converge alors $\sum x_n$ converge et si $\sum x_n$ diverge alors $\sum y_n$ diverge. Ces comparaisons ne sont valables que parce que $\sum x_n$ et $\sum y_n$ sont à termes positifs.

ii) Laissé en exercice.

□

Le critère suivant est très important : combiné aux critères précédents il permet d'établir le caractère convergent d'un grand nombre de séries. Il sera démontré comme corollaire du théorème 3.9.

Proposition 3.5 (Le critère de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si $\alpha > 1$ alors la série $\sum 1/n^\alpha$ converge et si $\alpha \leq 1$ alors elle diverge.*

Le cas particulier $\alpha = 1$ est celui de la *série harmonique* : on voit alors que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Corollaire 3.6 (Comparaison avec une série de Riemann)**.** *Soit* $\sum x_n$ *une série réelle* à termes positifs.

1. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $n^\alpha x_n \leq 1$*, alors* $\sum x_n$ *converge.*
2. *S'il existe* $\alpha \leq 1$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* $n^\alpha x_n \geq 1$*, alors* $\sum x_n$ *diverge.*

La démonstration est une simple application de la proposition précédente et du principe de comparaison des séries à termes positifs.

Les deux propriétés suivantes (règle de Cauchy et règle de D'Alembert) consistent à comparer une série à termes positifs avec une série géométrique.

Théorème 3.7 (Règle de Cauchy)**.** *Soit* $\sum x_n$ *une série réelle à termes positifs. Supposons que la limite* $\ell = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n}$ *existe. Alors*
i) Si $\ell < 1$*,* $\sum x_n$ *converge,*
ii) si $\ell > 1$*,* $\sum x_n$ *diverge,*
iii) si $\ell = 1$*, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de Cauchy.*

Exemple 3.5. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 1$. Démontrons que la série $\sum \frac{n^a}{\alpha^n}$ converge. On pose $x_n = n^a/\alpha^n$. On a alors $x_n^{1/n} = n^{a/n}/\alpha$. Observons qu'il existe $\lim_{n\to\infty} x_n^{1/n} = 1/\alpha$ (on utilise ici que $n^{a/n} = e^{a\ln(n)/n} \to 1$). Ainsi $\ell = 1/\alpha < 1$ et la série converge.

Le même calcul montre que pour $\alpha < 1$ la série serait divergente (mais on aurait pu observer que la série est en fait grossièrement divergente dans ce cas). Dans le cas $\alpha = 1$, le critère de Cauchy ne permet pas de conclure car $\ell = 1$; cependant on a dans ce cas $x_n = n^a$: le critère de Riemann nous dit alors que la série est convergente (lorsque $\alpha = 1$) si et seulement si $a < -1$.

Théorème 3.8 (règle de D'Alembert)**.** *Soit* $\sum x_n$ *une série réelle à termes strictement positifs. Supposons que la limite* $L = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$ *existe. Alors*
— *i) Si* $L < 1$*,* $\sum x_n$ *converge,*
— *ii) si* $L > 1$*,* $\sum x_n$ *diverge,*
— *iii) si* L*, on ne peut pas conclure. C'est le cas douteux de la règle de D'Alembert.*

Exemple 3.6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Démontrons que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ est convergente. Posons $x_n = \frac{a^n}{n!}$. On a $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{a}{n+1}$. On est alors dans le cas où $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existe, et $L = 0$. La série est alors convergente d'après le critère de D'Alembert.

Remarque 3.7. Par expérience, si le critère de Cauchy ne permet pas de conclure quant à la nature de la série, parce l'on trouve $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$, ce n'est pas la peine d'essayer d'appliquer le critère de D'Alembert : on tombera toujours dans le cas douteux. Il convient d'essayer alors des méthodes plus puissantes, comme les développements asymptotiques ou les comparaisons avec les intégrales (voir ci-dessous).

Comparaison d'une série et d'une intégrale impropre

Définition 3.3 (Intégrale impropre)**.** *Soit* $a \in \mathbb{R}$ *et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Si* $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ *existe et est finie, on dit que l'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge, et l'on note* $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$*. Sinon, on dit que l'intégrale impropre diverge.*

Exemple 3.8.

1. On a $\int_1^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}[-e^{-x}]_{x=1}^{x=b} = -e^{-1} + \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}) = \frac{1}{e}$.
2. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \cos(\pi x)\,dx$ diverge. En effet, $\int_0^b \cos(\pi x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}[\frac{1}{\pi}\sin(\pi x)]_0^b = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{\pi}\sin(\pi b)$ et cette limite n'existe pas : en prenant par exemple $b = n$ $(n \in \mathbb{N})$ on trouve $\sin(\pi b) = 0$, mais en prenant $b = \frac{\pi}{2} + n$ on trouve $\sin(\pi b) = 1$)

Remarque 3.9. Pour étudier la convergence d'une intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ avec f continue, en général il ne suffit pas de démontrer la convergence de la suite $(\int_a^n f(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}})$: voir l'exemple ci-dessus pour un contrexemple. Cependant, lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors on peut démontrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ converge si et seulement si la suite $(\int_a^n f(x)\,dx)_{n\in\mathbb{N}})$ converge. D'ailleurs la convergence est indépedante du choix de a, lorsque f est continue.

Théorème 3.9 (comparaison d'une avec une intégrale)**.** *Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, décroissante et positive. Alors l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature (convergentes ou divergentes). De plus, en cas de convergence, on a l'encadrement du reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n)$:*

$$\int_{N+1}^{+\infty} f(x)\,dx \le R_N \le \int_N^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Dém. Nous pouvons supposer que $a \in \mathbb{N}$. Comme f est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [n, n+1]$, $f(n+1) \le f(x) \le f(n)$, donc

$$\int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx.$$

C'est à dire,

$$f(n+1) \le \int_n^{n+1} f(x)dx \le f(n).$$

Supposons que $\sum f(n)$ converge et sommons ces inégalités pour $N \le n \le N'$. En prenant ensuite $N' \to +\infty$ on trouve l'estimation annoncée du reste. En particulier, l'intégrale impropre de f converge.

Réciproquement, la même inégalité montre que si l'intégrale impropre de f converge alors la série $\sum f(n)$ converge.

□

Exemple 3.10. Nous avons déjà annoncé que les séries de Riemann $\sum 1/n^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, convergent si et seulement si $\alpha > 1$. On s'intéresse ici au cas $\alpha > 0$ (si $\alpha \le 0$ la série de Riemann est grossièrement divergente). Démontrons cela par comparaison avec des intégrales impropres : on commence par associer le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ à la fonction $f\colon [1,\infty[\to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. On a en effet $\frac{1}{n^\alpha} = f(n)$. Cette fonction f est bien continue, décroissante et positive.

- Si $\alpha \ne 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^b$$
$$= \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

- Si $\alpha = 1$, alors $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty} [\ln(x)]_1^b = +\infty$.

La conclusion est que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

3.3 Critères de convergence pour les séries à termes de signe arbitraire ou complexes

Rappelons que, si $\alpha \in \mathbb{R}$ on note $\alpha_+ = \max\{\alpha, 0\}$ la "partie positive de α" et $\alpha_- = \max\{-\alpha, 0\}$ la "partie négative de α". Observons que

$$0 \le \alpha_+ \le |\alpha|, \qquad \text{et} \qquad 0 \le \alpha_- \le |\alpha|.$$

De plus,

$$\alpha = \alpha_+ - \alpha_- \qquad \text{et} \qquad |\alpha| = \alpha_+ + \alpha_-\,.$$

Théorème 3.10 (Convergence absolue)**.** *Soit* (x_n) *une suite réelle ou complexe. On suppose que* $\sum |x_n|$ *est convergente. Alors* $\sum x_n$ *est convergente. De plus la somme de la série vérifie l'inégalité*

$$\Big|\sum_{n=0}^{\infty} x_n\Big| \le \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|.$$

On dit dans ce cas que la série $\sum x_n$ *est* absolument convergente*.*

Dém.

Notons S_n les sommes partielles de la série $\sum x_n$ et notons T_n les sommes partielles de la série $\sum |x_n|$. Observons que (T_n) est une suite croissante et, par l'hypothèse, convergente. Notons $T = \lim_{n\to+\infty} T_n = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$. On a aussi $T = \sup T_n : n \in \mathbb{N}$ par la proprieté des suites croissantes. Observons que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{n}\Big((x_k)_+ - (x_k)_-\Big) = \sum_{k=0}^{n}(x_k)_+ - \sum_{k=0}^{n}(x_k)_-.$$

Mais $\sum_{k=0}^{n}(x_k)_+ \le \sum_{k=0}^{n} |x_k| \le T$. De la même manière $\sum_{k=0}^{n}(x_k)_- \le \sum_{k=0}^{n} |x_k| \le T$. Mais $\sum_{k=0}^{n}(x_k)_+$ et $\sum_{k=0}^{n}(x_k)_0$ sont deux suites croissantes, bornées supérieurement par T. Elles sont alors convergentes. Il s'ensuit que (S_n) est une suite convergente. La série $\sum x_n$ est alors convergente. Se plus, par l'inégalité triangulaire,

$$\Big|\sum_{k=0}^{n} x_k\Big| \le \sum_{k=0}^{n} |x_k\Big| = T_n \le T.$$

En passant à la limite pour $n \to \infty$ on trouve $|\sum_{k=0}^{\infty} x_k| \le T$. □

Lorsqu'une série est convergente mais pas absolument convergente, on dit qu'elle est *semi-convergente.*

Définition 3.4 (série alternée)**.** *Une* série réelle $\sum x_n$ *est dite* alternée *si et seulement si* $(-1)^n x_n$ *garde un signe constant pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 3.11 (critère pour les séries alternées)**.** *Soit* $\sum x_n$ *une série alternée, telle que la suite* suite $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit décroissante et tende vers* 0*. Alors la série* $\sum x_n$ *converge. De plus, dans ce cas, le reste d'ordre n (défini par* $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k$*), vérifie, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \le |x_{n+1}|$.

Exemple 3.11. La série $\sum(-1)^n/n$ est convergente, d'après le critère ci-dessus, mais pas absolument convergente (donc elle est semi-convergente). Cette série est appelée série harmonique alternée. On peut montrer en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à $-\ln(1+x)$ sur $[0,1]$ que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2).$$

Le critère suivant est une généralisation du critère des séries alternées :

Théorème 3.12 (Critère d'Abel)**.** *Soit* $\sum x_n$ *une série complexe où pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \alpha_n u_n$ *tels que*

— *i) la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est réelle, décroissante et tend vers* 0*,*

— *ii) il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|\sum_{k=0}^{n} u_k| \le M$.

Alors $\sum x_n$ *est convergente.*

Exemple 3.12. Soit $\alpha \ne 0$ et $\theta \in]0, 2\pi[$. Démontrons que la série $\sum \exp(in\theta)/n^\alpha$ converge. En effet : posons $\alpha_n = 1/n^\alpha$. La suite (α_n) est bien réelle, décroissante et de limite nulle. Posons ensuite $u_n = \exp(in\theta)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \exp(ik\theta)\right| = \left|\frac{1-\exp(i(n+1)\theta)}{1-\exp(i\theta)}\right| \le \frac{2}{|1-\exp(i\theta)|}.$$

Or, $M = \frac{2}{|1-\exp(i\theta)|}$ est indépendant de n, donc la règle d'Abel s'applique.

4 Suites de fonctions

4.1 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Dans ce chapitre on considère des fonctions $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, où $n \in \mathbb{N}$ et $D \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble de définition commun de ces fonctions. Dans la plupart des cas, D sera un intervalle de $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{R}$ tout entier. On s'intéresse aux propriétés de convergence de la suite de fonctions (f_n).

Définition 4.1 (Convergence simple)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* simplement *vers f* sur *D si et seulement si pour tout $x \in D$ on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.*

Exemple 4.1. On considère les fonctions $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = x^n$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, où

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Définition 4.2 (Convergence uniforme)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n\colon D \to \mathbb{R}$ et soit $f\colon D \to \mathbb{R}$ une autre fonction. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers f* sur *D si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Remarque 4.2. Le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur D se traduit par :

$$\forall x \in D,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \ge N_{x,\varepsilon} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Le fait que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_{\varepsilon} \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \ge N_{\varepsilon} \Rightarrow \forall x \in D,\ |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

La convergence uniforme est donc beaucoup plus restrictive parce que à ε donnée, il faut être en mesure d'exhiber un N_ϵ indépendant de $x \in D$. Donc,

$$f_n \to f \quad \text{uniformément dans } D \qquad \Rightarrow \qquad f_n \to f \quad \text{simplement dans } D.$$

Pour $g\colon D \to \mathbb{R}$, on note (lorsque le sup est fini)

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in D} |g(x)| = \sup\{g(x) \colon x \in D\}.$$

S'il y a un risque de confusion pour les ensembles de définition, il convient d'écrire $\|g\|_{\infty,D}$

Exemple 4.3. Reprenons la suite (f_n) et la fonction f de l'exemple 4.1. On a $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \ge \sup_{x\in[0,1[} |f_n(x)| = 1$ (parce que $f(x) = 0$ dans $[0,1[$). Mais alors $\|f_n - f\|_\infty \not\to 0$. Donc la suite (f_n) ne converge pas uniformément dans $[0,1]$.

4.2 Propriétés de la convergence uniforme

Théorème 4.1 (Continuité de la limite uniforme)**.** *Soit $D \subset \mathbb{R}$ et $a \in D$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions : $D \to \mathbb{R}$, On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n sont continues en a, alors f est continue en a. En particulier,*

$$\lim_{x\to a}\Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big) = \lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{x\to a} f_n(x)\Big).$$

Dém. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N_\varepsilon$, $\forall\, x \in D$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/3$. Mais alors $\exists\, \eta_\varepsilon > 0$ tel que

$$(|x-a| \leq \eta_\varepsilon \quad \text{et} \quad x \in D) \quad \Rightarrow \quad |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| \leq \varepsilon/3.$$

Donc, pour $|x-a| \leq \eta_\varepsilon$ et $x \in D$,

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{N_\varepsilon}(x)| + |f_{N_\varepsilon}(x) - f_{N_\varepsilon}(a)| + |f_{N_\varepsilon}(a) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est continue en a. □

Remarque 4.4 (Retour su l'exemple 4.1)**.** La limite simple de fonctions continues n'est pas toujours continue, comme le montre l'exemple 4.1. La fonction f obtenue dans cet exemple est discontinue au point 1, même si toutes les fonctions de la suite (f_n) sont continues dans ce point. On retrouve que la convergence de cette suite (f_n) vers f ne peut pas être uniforme.

On s'intéresse à présent à une suite de fonctions $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Théorème 4.2 (échange de limite et intégrale)**.** *Soient a et b deux réels, avec $a < b$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Soit $f :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge* uniformément *vers f sur $[a,b]$. Alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. Autrement dit, pour les suites de fonctions uniformément convergentes :*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \Big(\lim_{n\to\infty} f(x)\Big)\,dx.$$

Dém. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alord $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on a $\forall x \in [a,b]$, $\quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b-a)$. Donc, si $n \geq N$,

$$\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \varepsilon.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$. □

L'échange de limite et intégrale n'est en général pas autorisé pour les suites simplement convergentes.

Théorème 4.3 (Dérivabilité d'une limite uniforme)**.** *Soient $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions : $[a,b] \to \mathbb{R}$. On suppose que*

i) la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction g.

ii) il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. De plus, f est dérivable dans $[a,b]$ et $f' = g$. Autrement dit, sous les hypothèse précédentes :

$$\Big(\lim_{n\to\infty} f_n\Big)' = \lim_{n\to\infty} f'_n = g.$$

4.3 Le cas des suites des fonctions à valeurs complexes

Les résultats vus dans ce chapitres restent valables pour les fonctions de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $D \subset \mathbb{R}$ et

$$f_n \colon D \to \mathbb{C}, \qquad \text{et} \qquad f \colon D \to \mathbb{C}.$$

Pour tout $x \in D$, on a $f_n(x) = u_n(x) + iv_n(x)$ et $f(x) = u(x) + iv(x)$, où les fonctions u_n, v_n, u et v sont définies : $D \to \mathbb{R}$. Une suite (f_n) converge simplement (resp. uniformément) vers f si et seulement si les suites des parties réelles et imaginaires (u_n) et (v_n) convergent simplement (resp. uniformément) vers u et v.

Nous définission l'intégrale et la dérivée d'une fonction $f \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ comme $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + \int_a^b v(x)\,dx$ et $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

On voit sans peine que tous les théorèmes établis dans ce chapitre restent vrais pour les suites de fonctions à valeurs complexes.

5 Séries de fonctions

Définition 5.1 (Série de fonctions)**.** *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur le même domaine* $D \subset \mathbb{R}$ *: pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \; D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$*. On dit que la* série de fonctions $\sum f_n$ *converge simplement (resp. uniformément) sur D si et seulement si la* suite *des somme partielles* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, où* $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$*, converge simplement (resp. uniformément) sur* D*.*

Les critères de convergence du chapitre précédent, appliqués à $x \in D$ fixé, permettent de décider si une série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement dans D. Si c'est bien le cas, la somme $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ définit une fonction $S \colon D \to \mathbb{R}$.

Pour une série de fonction simplement convergente, on peut toujours définir la suite de fonctions 'reste', par $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$: par définition, *la série de fonctions* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* D *vers la fonction* $x \mapsto S(x)$ *si et seulement si la suite de fonctions* $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* D *vers la fonction nulle.*

Pour que la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \; D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ converge uniformément sur D, *il faut* que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur D.

La convergence uniforme d'une série de fonctions est parfois difficile à établir par la définition. Il convient alors d'introduire une autre notion de convergence assez facile à vérifier en général, et qui implique la convergence uniforme :

Définition 5.2 (Convergence normale d'une série de fonctions)**.** *Soit* $\sum f_n$ *une série de fonctions, où* $f_n : \; D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*. On dit que* $\sum f_n$ converge normalement *sur* D *si et seulement si la série* $\sum \|f_n\|_\infty$ *converge.*

Théorème 5.1. *Toute série* $\sum f_n$ *normalement convergente sur* D *est uniformément convergente sur* D*.*

Exemple 5.1. La série de fonctions $\sum \frac{1}{1+n+x^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et donc uniformément et aussi simplement, (vers une fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2+x^2}$ qui est bien définie, même si l'on ne sait expliciter cette somme). En effet, si l'on pose $f_n = \frac{1}{1+n+x^2}$, on a $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^2+1}$ et la série numérique $\sum \frac{1}{n^2+1}$ est convergente d'après les résultats du chapitre précédent.

Les deux théorèmes suivants sont les analogues, pour les séries de fonctions, des propriétés correspondantes que l'on a déjà rencontrées pour les suites de fonctions.

Théorème 5.2 (Continuité d'une série de fonctions)**.** *Soit* $\sum f_n$*, où* $f_n : \; D \subset\to \mathbb{C}$*, une série de fonctions et* $a \in D$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, f_n *soit* continue en a. *Si* $\sum f_n$ *converge uniformément sur* D *alors* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est continue en* a*.*

Théorème 5.3 (Dérivabilité d'une série de fonctions)**.** *Soit* $\sum f_n$*, où* $f_n \colon [a,b] \to \mathbb{C}$ *une suite de fonctions dérivables dans l'intervalle* $[a,b]$*. On suppose que*

i) la série $\sum f_n'$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*,*

ii) il existe $c \in [a,b]$ *tel que* $\sum f_n(c)$ *converge.*

Alors $\sum f_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$*. De plus,* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ *est dérivable et* $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.

Exemple 5.2. En appliquant ce théorème, on voit que la fonction $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2+x^2}$, définie dans l'exemple 5.1, est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2x}{(1+n^2+x^2)^2}$.

6 Séries entières

6.1 Rayon de convergence

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 6.1. *Une* série entière *est une série de fonctions de la forme* $\sum a_n x^n$ *où* $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) \subset \mathbb{R}$.

Définition 6.2. *Le* rayon de convergence *de la série entière* $\sum a_n x^n$ *est*

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ : \text{ la suite } (|a_n|\, r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

Le rayon de convergence R d'une série entière peut alors être un réel positif ou nul, ou vérifier $R = +\infty$. Le théorème suivant illustre son importance.

Théorème 6.1. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n x^n$.*

i) La série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < R$ et diverge grossièrement pour $|x| > R$. En particulier, si $R = 0$, la série ne converge que pour $x = 0$, et si $R = +\infty$, la série converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

ii) La série converge normalement dans tout intervalle $[-r, r]$, avec $0 \le r < R$.

Démonstration. En effet, si $|x| > R$ alors la suite $|a_n x^n|$ n'est pas bornée. En particulier, cette suite ne converge pas vers zéro. Donc la série $\sum a_n x^n$ diverge grossièrement. Par contre, si $|x| \le r < R$, on peut trouver b tel que $r < b < R$ et tel que la suite $(a_n b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Mais alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|a_n x^n| \le |a_n| r^n = \underbrace{|a_n| b^n}_{\text{bornée}} \left(\frac{r}{b}\right)^n \le C\left(\frac{r}{b}\right)^n,$$

qui est le terme générale d'une série géométrique convergente, puisque de raison $\frac{r}{b} < 1$. Donc la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour $|x| < R$. De plus, la majoration précédente est uniforme lorsque $x \in [-r, r]$, c'est à dire

$$\sup_{x\in[-r,r]} |a_n x^n| \le C\left(\frac{r}{b}\right)^n.$$

Donc la série entière $\sum a_n x^n$ est normalement convergente dans $[-r, r]$. □

Ce théorème affirme en particulier qu'une série entière $\sum a_n x^n$ converge pour $-R < x < R$ et diverge en dehors de l'intervalle $[-R, R]$. Pour $x = \pm R$, la série peut être convergente ou divergente. Pour le calcul pratique du rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ on applique souvent le critère de D'Alembert. Ce critère implique ceci : supposons que la limite $\ell = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ existe : alors

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\ell}, & \text{si } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{si } \ell = 0. \end{cases}$$

Alternativement, on peut faire appel au critère de Cauchy. On trouve alors ceci : si la limite $L = \lim_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ existe, alors

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{si } 0 < \ell < +\infty \\ 0 & \text{si } L = +\infty \\ +\infty & \text{si } L = 0. \end{cases}$$

Exemple 6.1.
- La série $\sum \frac{x^n}{n!}$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$. Le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.
- La série $\sum x^n$ converge si et seulement si $-1 < x < 1$: le rayon de convergence est $R = 1$.
- La série $\sum \frac{(-1)^n}{n3^n} x^n$ converge si et seulement si $-3 < x \le 3$: on a donc $R = 3$.
- la série $\sum n! x^n$ est divergente pour tout $x \ne 0$. On a alors $R = 0$.

6.2 Dérivabilité et intégration d'une série entière

On peut intégrer terme à terme une série entière dans tout intervalle $[a, b]$ contenu à l'intérieur de l'intervalle de convergence : c'est une conséquence du résultat de convergence normale obtenu dans la section précédente.

Proposition 6.2. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors pour tout $a < b$ tel que $[a, b] \subset]-R, R[$, on a $\int_a^b (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx$.*

Pour ce qui est de la dérivabilité d'une série entière commençons par établir ceci :

Proposition 6.3. *Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ et R_d le rayon de convergence de $\sum n a_n x^n$. Si, pour $r \geq 0$, la suite $(n|a_n|r^n)$ est bornée, alors la suite $(|a_n|r^n)$ est bornée également. Ceci prouve que $R \geq R_d$.

Réciproquement, si $|x| < R$, alors il existe b tel que $|x| < b < R$ et tel que $(|a_n|b^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Alors,

$$|n a_n x^n| \leq |a_n| b^n \, n\Big(\frac{|x|}{b}\Big)^n \leq Cn\Big(\frac{|x|}{b}\Big)^n.$$

À droite on a le terme général d'une série convergente (appliquer le critère de Cauchy ou de D'Alembert pour le voir). Par comparaison, la série $\sum n a_n x^n$ converge. Ceci prouve que le rayon de convergence de la $\sum n a_n x^n$ est $\geq R$.

□

Proposition 6.4. *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors dans l'intervalle $]-R, R[$, l'application $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est* indéfiniment dérivable *et pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}$$

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la somme d'une série entière. La formule précédente peut s'écrire, en isolant le premier terme de la somme,

$$f^{(p)}(x) = p!\, a_p + \sum_{n=p+1}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

En particulier, en prenant $x = 0$ on trouve

$$f^{(p)}(0) = p!\, a_p.$$

6.3 Fonctions développables en séries entières

Définition 6.3. *Soit $f :]-R, R[\to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un* **développement en série entière** *si et seulement s'il existe une suite de coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in]-R, R[$ on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.*

La proposition précedente implique que toute fonction développement en série entière est infinimient dérivable. De plus, le développement est unique et

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Pour les fonctions développable en série entière on a donc

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad -R < x < R.$$

Pas toutes les fonctions sont développables en série entière : par exemple la fonction $x \mapsto |x|$ ne l'est pas, parce que cette fonction n'est pas dérivable en 0.

étant donnée une fonction f infiniment dérivable le problème se pose de savoir si f est développable en série entière dans un intervalle $]-R, R[$. En général ce n'est pas le cas. En effet :

- La série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ pourrait être divergente pour tout $x \neq 0$.
- Même si la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge, on pourrait avoir $f(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$

On cherche alors de critères de développabilité en série entière : la formule de Taylor-Lagrange donne une condition : suffisante

Théorème 6.5. *Soit $R > 0$ et $f\colon]-R, R[\to \mathbb{R}$ où On suppose que f est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$, et qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]-R, R[$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$. Alors f est développable en série entière.*

Démonstration. On applique la formule de Taylor-Lagrange à f entre 0 et x, à l'ordre N : $\exists\, c_N$ compris entre 0 et x tel que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} f^{(N)}(c_N).$$

Donc $0 \leq \lim_{N\to+\infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \right| \leq \lim_{N\to+\infty} \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}M = 0.$ □

On déduit de ce théorème que les fonctions usuelles sont développable en série entière :

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}(x) = \dfrac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$

Les fonctions suivantes sont développables dans l'intervalle $]-1, 1[$ (la première et la deuxième formules sont bien connues, les autres s'en déduisent par dérivation ou primitivation).

— $\forall x \in]-1, 1[, \quad \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$

— $\forall x \in]-1, 1[, \quad \dfrac{1}{1+x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$

— $\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$

— $\forall x \in]-1, 1[, \quad \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

— $\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ici, $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$.

6.4 Séries entières complexes

Une série entière complexe est une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite complexe et $z \in \mathbb{C}$. On définit pour ces séries la notion de rayon de convergence exactement comme dans la définition 6.2. L'analogue du théorème 6.1 est :

Théorème 6.6. *Soit R le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$.*

i) La série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z| < R$ et diverge grossièrement pour $|z| > R$. En particulier, si $R = 0$, la série ne converge que pour $z = 0$, et si $R = +\infty$, la série converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

ii) La série converge normalement dans tout disque $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq r\}$, avec $0 \leq r < R$.

Exemple 6.2. Le rayon de convergene de la série entière complexe $\sum \frac{1}{n!} z^n$ est $R = +\infty$. Ainsi la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Il est naturel de poser,

$$\forall\, z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

Si $z = x \in \mathbb{R}$, on retrouve le développement en série entière de $\exp(x) = e^x$. Calculons maintenant $\exp(z)$ pour $z = iy$ imaginaire pur. On a

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + i \sum k = 0^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos(y) + i \sin(y).
\end{aligned}$$

On retrouve ainsi la formule bien connue pour les nombres complexes $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, avec $y \in \mathbb{R}$. On peut démontrer la validité de l'identité fondamentale

$$\forall\, z_1\ z_2 \in \mathbb{C} \quad \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2).$$

Si $z \in \mathbb{C}$ on peut définir $\cos(z)$ et $\sin(z)$ comme les sommes des séries entières (de rayon de convergence $R = +\infty$) :

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}, \qquad \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

On peut démontrer qu'alors les formules de trigonométrie restent vraies dans $\mathbb{C}$. Par exemple, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

7 Séries de Fourier

7.1 Séries trigonométriques

Les séries de Fourier sont des séries de fonctions d'un type particulier, qui servent à étudier les fonctions périodiques. L'idée est d'exprimer une fonction 2π-périodique quelconque comme une combinaison linéaire de fonctions 2π-périodiques simples, de la forme $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$, avec $n \in \mathbb{N}$. Cette "combinaison linéaire" sera, en général, une somme infinie, c'est à dire une série :

Définition 7.1. *On appelle* série trigonométrique *une série de fonctions* $\sum P_n$ *dont le terme général est de la forme*

$$P_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$ *et* $b_n \in \mathbb{C}$ *.*

Si les coefficients (a_n) et (b_n) vérifient des conditions convenables, alors les séries trigonométriques sont convergentes :

Proposition 7.1. *Supposons que* $\sum |a_n|$ *et* $\sum |b_n|$ *soient convergentes. Alors la série trigonométrique* $\sum\big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$ *convergente normalement dans* $\mathbb{R}$*. La somme* S *de la série trigonométrique est une fonction continue dans* $\mathbb{R}$ *et* 2π*-périodique :* $S(x + 2\pi) = S(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$*.*

Proposition 7.2. *Supposons que* (a_n) *et* (b_n) *soient deux suites réelles et décroissantes vers* 0*. Alors la série trigonométrique converge simplement pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$*. La somme est définie* $S \colon \mathbb{R}\backslash\{2\pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{C}$ *et* 2π*-périodique.*

7.2 Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Soit maintenant $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Est-il possible de trouver des coefficients $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ tels que $f(x)$ soit la somme d'une série trigonométrique ? La réponse est positive lorsque la fonction f vérifie certaines conditions de régularité (voir ci-dessous).

Dans ce cas les coefficients a_n et b_n sont déterminés de manière unique par la fonction f, et sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad && n \in \mathbb{N}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \qquad && n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Ces nombres s'appellent les *coefficients de Fourier* de la fonction f.

Définition 7.2. *Soit* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *une fonction* 2π*-périodique. On dit que* f *est régulière par morceaux si et seulement si* f *est continue et dérivable sur* $[-\pi, \pi]$*, sauf éventuellement en un nombre fini de points. Dans les points où* f *n'est pas continue, on suppose que les limites par la gauche et par la droite existent. Dans les points où* f' *n'est pas définie, on suppose que* f *soit dérivable à droite et à gauche.*

Exemple 7.1.
— Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |x|$ dans $[-\pi, \pi]$. Alors f est régulière par morceaux
— Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ dans $[0, 2\pi[$. Alors f est régulière par morceaux.
— La fonction $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est 2π-périodique et vérifie $f(x) = \sqrt{|x|}$ pour $x \in [-\pi, \pi]$ *n'est pas* régulière par morceaux.

Théorème 7.3. *Soit* $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 2π*-périodique et régulière par morceaux. Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ *les suites des coefficients de Fourier de la fonction* f*. Alors la série trigonométrique* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ *converge pour tout* $x \in \mathbb{R}$*. De plus,*

$$\tfrac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

où $f(x-) = \lim_{t\uparrow x} f(t)$ *et* $f(x+) = \lim_{t\downarrow x} f(t)$*, sont les limites par la gauche et par la droite de* f *en* x*. En particulier, si* f *est continue en* x*, alors* $f(x) = f(x+) = f(x-)$ *et donc* $f(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Le terme à droite dans (7.1) s'appelle *série de Fourier de la fonction* f. Le théorème précédent affirme en particulier que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-=périodique, régulière par morceux et continue dans $\mathbb{R}$, alors $f(x)$ est la somme de sa série de Fourier pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 7.4 (égalité de Parseval)**.** *Soit* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction* 2π*-périodique et régulière par morceaux. Soit* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 1}$ *les suites des coefficients de Fourier de la fonction* f*. Alors*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = |a_0|^2/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2). \tag{7.2}$$

A Exercices sur les suites numériques

Exercice A.1. Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites (x_n) ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $x_n = 2n/(2n-1)$
2. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
3. $x_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$
4. $x_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
5. $x_n = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$ (multiplier et diviser par $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$).
6. $x_n = \dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$

Exercice A.2. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Exercice A.3. Trouver un encadrement pour $\ln(n!)$ et étudier ensuite la limite $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$, où $a > 0$.
Indication : $\ln(n!) = \ln 1 + \cdots + \ln n$.

Exercice A.4. Calculer les limites

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)^{1/3} - n^{1/3}, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^{2/3}[(n+1)^{1/3} - n^{1/3}]$$

Indication : factoriser par $n^{1/3}$. Ensuite, utiliser, avec $\alpha = 1/3$, le développement limité $(1+x)^\alpha = 1+\alpha x + o(x)$ pour $x \to 0$.

Exercice A.5. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$

Exercice A.6. Soit $a > 0$ calculer, en fonction de a, $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n+\ln(n)^a}{a^n}$.

Exercice A.7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice A.8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}$. Que pensez-vous des propositions suivantes ?
- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l, il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice A.9. Démontrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2} \qquad \text{et} \qquad \min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Exercice A.10. Calculer

$$\sup\{0,8;\ 0,88;\ 0,888;\ \ldots\}, \quad \text{et} \quad \sup\{0,9;\ 0,99;\ 0,999;\ \ldots\}.$$

Exercice A.11. Dire (et justifier !) pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ s'il est ou non majoré, minoré, borné ; s'il admet ou non une borne supérieure et une borne inférieure – si oui, les déterminer ; s'il admet ou non un plus grand élément et un plus petit élément.

1. $\{\frac{p}{q} \colon p, q \in \mathbb{N} \text{ et } p < q\}$.
2. $\{x^2 + y^2 \colon x, y \in \mathbb{R} \text{ et } xy = 1\}$.
3. $\{xy \colon x, y \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } x^2 + y^2 \leq 2\}$.
4. $\{\frac{1}{4+e^x} : x \in \mathbb{R}\}$.
5. $\{\frac{1}{n} + (-1)^n \colon n \in \mathbb{N}^*\}$.
6. $\{\frac{1}{n} + \cos(2n\frac{\pi}{3}) \colon n \in \mathbb{N}^*\}$.
7. $\{\frac{p+q}{9p+2q+4} : p \geq 1,\ q \geq 1\}$. Indication : démontrer d'abord que l'ensemble est majoré par 1/2 et minoré par 1/9.

Exercice A.12. Tracer le graphe de la fonction $f(x) = xe^{-3x/10}$, pour $x \geq 0$. Calculer ensuite le sup des ensembles suivants (pour ceux qui n'ont pas de calculatrice : $\frac{3}{4}e^{3/10} = 1.0123\ldots$) :

$$A = \{xe^{-3x/10} \colon x \geq 0\}, \qquad B = \{ne^{-3n/10} \colon n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercice A.13. On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice A.14. étudier, selon la valeur de $a > 0$, la convergence de la suite (x_n) définie par récurrence par

$$x_0 = a, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\colon \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{1}{x_n}\Big).$$

Exercice A.15 (moyennes géométriques et arithmetique)**.** Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\colon a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Démontrer que a_n est décroissante et que b_n est croissante.
2. Démontrer que $|a_n - b_n| \leq \frac{1}{2^n}|a - b|$. Conclure que (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite.

B Exercices sur les nombres complexes

Exercice B.1. Mettre sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \Big(\frac{1+i}{2-i}\Big)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice B.2. Écrire sous la forme $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres complexes suivants :

1. Les nombres de module 2 et d'arguments $\pi/3$ et $5\pi/6$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice B.3. Calculer :

1. Le produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.
2. Le quotient du nombre complexe de module 2 et d'argument $\pi/3$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-5\pi/6$.

Exercice B.4 (Calcul de racines carrées complexes)**.** Trouver les racines carrées dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes

$$1, \quad i, \quad 4+4i, \quad 8-6i.$$

Indication : Il s'agit de chercher les solutions de l'équation, d'inconnue z, $z^2 = w$, où w est le nombre complexe donné.

Exercice B.5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0$$

Indication : La méthode génerale pour résoudre les équations du second degré $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$) est la suivante : soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant complexe et δ une racine carrée de Δ ($\delta^2 = \Delta$) alors les solutions sont :

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Dans le cas où les coefficients sont réels, on retrouve la méthode bien connue. Le seul travail dans le cas complexe est de calculer une racine δ de Δ.

Exercice B.6 (Racines cubiques dans $\mathbb{C}$)**.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \frac{1}{4}(-1+i)$ et montrer qu'une seule de ses solutions a une puissance quatrième réelle.

Exercice B.7. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. La suite complexe $(e^{in\theta})$ est-elle convergente ?

Exercice B.8. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

$$1) \quad \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1, \qquad\qquad 2) \quad \left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

C Exercices sur les séries numériques

Exercice C.1.

1. Calculer la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, en utilisant la méthode de téléscopage, consistant à écrire le terme général sous la forme $\frac{1}{n(n+1)} = b_n - b_{n+1}$.
2. Supposons d'avoir une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell \in \mathbb{R}$. Calculer la somme de la série $\sum_{n=3}^{+\infty}(b_n - b_{n+2})$.
3. Calculer les sommes des séries suivantes.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\frac{n+1}{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Exercice C.2. 1) Appliquer la formule de Taylor–Lagrange [2] à la fonction exponentielle entre 0 et 1. En déduire que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

2) Calculer les sommes des séries :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!}$$

2. Soit f une fonction infiniment dérivable dans un intervalle I contenant l'origine. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in I$, il existe un réel, c_x compris entre 0 et x, tel que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}x^{n+1}$.

Exercice C.3. Donner la dérivée d'ordre n de la fonction logarithme. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à cette fonction, montrer que la série harmonique alternée

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

est convergente de somme $\ln 2$.

Exercice C.4 (Nature d'une série à termes positifs)**.** Vérifier que les suites suivantes sont de signe constant à partir d'un certain rang. Ensuite, en utilisant les divers critères de convergence (notamment les critères asymptotiques et de comparaison avec une série de Riemann) préciser la nature des séries correspondantes :

$$\frac{n}{n+1}, \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad \frac{1}{n^2+3}$$

$$\frac{1}{n^{3/2}-10\sqrt{n}}, \qquad \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}, \qquad \frac{1}{\ln n}$$

$$\frac{\sqrt{n(n-1)}}{n^2-2\sqrt{n}+3\ln n}$$

Exercice C.5. En utilisant le développement limité $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ pour $x \to 0$, donner la nature de la série $\sum(\sqrt[3]{n^3+2n} - \sqrt{n^2-1})$.

Exercice C.6 (Nature d'une série à termes positifs)**.** Vérifier que les suites suivantes sont de signe constant à partir d'un certain rang. Ensuite, en utilisant les divers critères de convergence (notamment les critères des Cauchy ou d'Alembert) préciser la nature des séries correspondantes :

$$\frac{\ln(n)}{n!}, \qquad \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln n+5^n}, \qquad \frac{n!}{n^n}, \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

Exercice C.7. Le but de cet exercice est d'effectuer un calcul approché de la somme de la série

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

1. Pour quels entiers naturels l'inégalité

   $$\frac{1}{k^3} \leq \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

   est-elle vraie ?
2. La série $\sum\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right)$ est-elle convergente ?
3. Calculer la somme de la série

   $$\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right).$$

4. Démontrer que

   $$\frac{9}{8} \leq S \leq \frac{10}{8}.$$

Exercice C.8. En utilisant une comparaison entre séries et intégrales impropres, trouver un réel $A > 0$ tel que

$$A \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq 2A.$$

Exercice C.9 (Séries de Bertrand)**.** Soit $\beta \geq 0$. étudier la convergence de l'intégrale impropre $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx$, en effectuant le changement de variable $y = \ln x$ dans l'intégrale $\int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^\beta}\,dx$ et en prenant ensuite la limite pour $b \to +\infty$.

En déduire la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\beta}.$$

Exercice C.10. Soit i l'unité imaginaire. La série $\sum i^n$ est-elle convergente ? Calculer

$$1 + i + i^2 + \cdots + i^{100}.$$

Exercice C.11 (Nature d'une série de terme générale quelconque)**.** étudier la convergence simple et absolue des séries de terme général :

$$\begin{array}{lll}
u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n^3+1}} & & u_n = \frac{(-1)^n \ln(n)}{n} \\
u_n = \frac{1}{(-1)^n n^2+n+1} & & u_n = \frac{n^2}{(1+i)^n} \\
u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (^*) & & u_n = \sqrt{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \\
u_n = (-1)^n\left(\sqrt{1+n} - \sqrt{n}\right) & (^*) & u_n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \\
u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}} & & u_n = \left(\frac{2n(1+i)+3}{3n-i}\right)^n
\end{array}$$

Dans chaque cas (*), donner une majoration simple du reste d'ordre n.

Exercice C.12. Etudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}.$$

En déduire que deux séries de termes généraux équivalents, mais pas de signe constant, ne sont pas forcément de même nature.

Exercice C.13. Démontrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$ converge. On note $S = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$. Démontrer que

$$\frac{77}{108} \leq S \leq \frac{85}{108}.$$

(*Indication :* considérer la décomposition "somme partielle+reste" $S = S_2 + R_2$).

D Exercices sur les suites de fonctions

Exercice D.1. Etudier la convergence simple et la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans chacun des cas suivants :

1. $f_n(x) = \frac{x}{n}$ sur $[a\,,b]$, puis sur $\mathbb{R}$;
2. $f_n(x) = \frac{\cos(x)}{n}$ sur $\mathbb{R}$;
3. $f_n(x) = \cos\left(\frac{x}{n}\right)$ sur $\mathbb{R}$;
4. $f_n(x) = e^x + \frac{\sin nx}{n+e^x}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice D.2. étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$, où :

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$$

1. Sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$.
2. Sur l'intervalle $[a\,,+\infty[$, où $a > 0$.

Exercice D.3. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x^2}$$

1. étudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Montrer qu'elle est uniformément convergente sur tout segment borné $[a\,,b]$.
3. Montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $[a\,,+\infty[$.
4. Calculer la limite, lorsque $n \to +\infty$ de $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice D.4. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+2^n n x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite de fonctions.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt$ et $\lim_{n\to+\infty} I_n$. En déduire que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1].
3. Donner une démonstration directe de ce que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ n'est pas uniformément convergente sur [0,1]

E Exercices sur les séries de fonctions

Exercice E.1. Etudier la convergence simple et la convergence normale de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$, sur $]1, +\infty[$ et sur $[a, +\infty[$ avec $a > 1$.
2. $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$ et sur $[0, a]$.
3. $u_n(x) = \frac{\sqrt{x}}{n^2+x^2}$, sur $[0, +\infty[$.

Exercice E.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2+1}$. Démontrer que $S\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie est continue.

Exercice E.3. Pour les séries de fonctions suivantes, dire si la convergence est simple, uniforme, absolue ou normale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{nx+\sqrt{n}} \quad \text{sur } \mathbb{R}^+, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n(1-x) \quad \text{sur } [0,1].$$

Exercice E.4. Soit la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ avec $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \arctan \frac{x}{\sqrt{n}}$.

Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction impaire continue et bornée.

Exercice E.5. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ où

$$u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

converge sur $[0, +\infty[$ vers une fonction de classe C^2 dont la dérivée seconde est > 0.

F Exercices sur les séries entières

Exercice F.1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n x^n$ suivantes.

$$a_n = \ln n;\; a_n = n^{\ln n};\; a_n = 3^n;\; a_n = n2^n;\;\; a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};\; a_n = n^n;$$

$$a_n = n^{(-1)^n}; \qquad a_n \text{ suite convergente vers 2.}$$

Exercice F.2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ une série entière. On pose $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n$ et $h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 a_n x^n$. Exprimer g et h en fonction de f, f' et de f''.
Application : Calculer $\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+1}{n!} x^n$.

Exercice F.3. Calculer la somme des séries entières réelles suivantes, après avoir déterminé leur rayon de convergence.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n, \qquad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n.$$

Exercice F.4. Déterminer le développement en série entière de f :

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

Utiliser le fait que $f'(x) = -2xf(x) + 1$.

Exercice F.5.

1. Quel est le développement en série entière de la fonction $x \mapsto e^x$? Préciser le rayon de convergence R.
2. Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une fonction développable en série entière, vérifiant l'équation différentielle
$$x^2 f''(x) + x f'(x) + f(x) = e^x.$$
Calculer les coefficient a_n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer le rayon de convergence de la série entière définissant f.

Exercice F.6. Trouver les solutions développables en série entière au voisinage de 0 des équations différentielles suivantes (variable x, fonction inconnue y à valeurs réelles) :

1. $4x(1-x)y'' + 2(1-3x)y' - y = 0$
2. $x(1-x)y'' + (\lambda - 3x)y' - y = 0$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Dans le cas $\lambda = 1$ on calculera les sommes des séries entières ainsi obtenues.

G Exercices sur les séries de Fourier

Exercice G.1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire et 2π-périodique défininie par $f(x) = 1$ si $0 < x < \pi$. Tracer le graphe de la fonction f. écrire la série de Fourier de f et en étudier la convergence. En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice G.2. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = x^2$ pour $x \in [-\pi, \pi]$. Tracer le graphe de la fonction f. écrire la série de Fourier de f et en étudier la convergence. En déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.