Contôle Final Session I - 25/05/2018

durée : 2h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la concision et à la précision de la rédaction.
Le sujet est constitué de 5 exercices plus un Bonus.

Exercice 1 Soit $V = \mathbf{P}_2$ l'espace vectoriel réel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à 2. On définit l'application $T : V \to V$ par $T(p)(x) = p(1+x) - x^2 p(0)$.

1. Vérifier que T est une application linéaire de V dans V.
2. Écrire la matrice de T relative à la base $(1, x, x^2)$ de V.
3. Déterminer le noyau et l'image de T.

Exercice 2 Soit A une matrice réelle de taille 3×3 ayant $0, 1, 2$ comme valeurs propres.

1. Déterminer le rang de la matrice A.
2. En déduire le déterminant de la matrice A.
3. En déduire le déterminant de la matrice ${}^t AA$.
4. En déduire les valeurs propres de la matrice $(A^2 + I)^{-1}$.
5. Montrer qu'il n'y a pas suffisamment d'informations pour déterminer les valeurs propres de la matrice ${}^t AA$.

Exercice 3 Déterminer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} n^2 & (n+1)^2 & (n+2)^2 \\ (n+1)^2 & (n+2)^2 & (n+3)^2 \\ (n+2)^2 & (n+3)^2 & (n+4)^2 \end{pmatrix}.$$

Indication : On pourra commencer par faire des manipulations sur les lignes et les colonnes pour simplifier la matrice.

Exercice 4 Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
2. Diagonaliser la matrice A en base orthogonale. C'est à dire, trouver une matrice P inversible telle que ${}^t PP$ et $P^{-1}AP$ sont diagonales.

Exercice 5 Soit q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy - 4xz.$$

1. Déterminer la forme polaire de q ainsi que la matrice de q.
2. Décomposer q en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ pour laquelle q est de la forme $q(X,Y,Z) = aX^2 + vY^2 + cZ^2$.

BONUS : Soit A une matrice 2×2 telle que $A^3 = I$. Montrer que A est inversible et que si $A \neq I$, alors $A + A^{-1} = -I$.