CC1.

Aucun document n'est autorisé. L'usage de calculatrice et de portable est interdit.

Exercice 1. Pour $a \in \mathbb{R}$, posons

$$M_a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+a & 1+a^2 & a+a^2 \\ a & a^2 & a^3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de M_a.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la matrice M_a soit inversible.
   Indication : le déterminant de la matrice M_a possède deux racines évidentes.
3. Déterminer le rang de la matrice M_a en fonction de a.

Exercice 2. Soit u l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie, pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, par

$$u(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t, x - 2z + 3t).$$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Déterminer une base et la dimension du noyau de u. Est-elle injective ?
3. Montrer que u est surjective.

Exercice 3. Soient Fet G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ définis par

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x = y = z = w \right\}, \qquad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \middle| \, x + y + z + w = 0 \right\}.$$

1. Donner une base et la dimension de chacun d'eux.
2. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) par la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer le rang de u. En déduire que 0 est une valeur propre de u.
4. Montrer que F et G sont des sous-espaces stables par u.
5. Construire une base de G formée de vecteurs propres de u.
6. En déduire une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de u.