CC2
29 Mars 2019

Exercice 1

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que A est diagonalisable
2. Donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 2 -

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que 1 et 2 sont des valeurs propres de f
2. Quelles sont les valeurs propres de f?
3. (**Question Bonus**) : Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable?

Exercice 3. -

Sur $E = \mathbb{R}^3$, on définit l'application suivante

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3y_2x_3 - 3x_2y_3$$

où $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ et $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Démontrer que Φ est une forme bilinéaire symétrique sur E.
2. La forme Φ est-elle dégénérée ?
3. Soit H_1 le plan d'équation $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_1^\perp$ de H_1 respectivement à Φ.
4. Soit H_2 le plan d'équation $x_2 + x_3 = 0$. Déterminer l'orthogonal $H_2^\perp$ de H_2 respectivement à Φ.

Exercice 4

$$\begin{array}{rccl} q: & E := \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & x_1^2 - 2x_1x_2. \end{array}$$

Montrer que q est une forme quadratique. Déterminer la matrice de q dans la base canonique de E. Déterminer le rang et le noyau de q.