CC3 – Solutions

Exercice 1. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les deux formes linéaires

$$f_1(x) = x_1 - 2x_2 + x_3 \quad \text{et} \quad f_2(x) = x_2 - 3x_3$$

pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Pour $x, y \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$\Phi(x, y) = f_1(x) f_2(y).$$

1. Montrer que Φ est une forme bilinéaire.

   <u>Solution.</u> *Soient $x_1, x_2, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On calcule*

   $$\begin{aligned} \Phi(x_1 + \lambda x_2, y) &= f_1(x_1 + \lambda x_2) f_2(y) \\ &= \big(f_1(x_1) + \lambda f(x_2)\big) f_2(y) \quad \text{puisque } f_1 \text{ est linéaire} \\ &= f_1(x_1) f_2(y) + \lambda f_1(x_2) f_2(y) \\ &= \Phi(x_1, y) + \lambda \Phi(x_2, y) \end{aligned}$$

   et donc Φ est linéaire par rapport à sa première variable. On montre de même que Φ est linéaire par rapport à sa deuxième variable. Puisque, par construction, Φ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, on en conclut que Φ est une forme bilinéaire.

2. La forme bilinéaire Φ est-elle symétrique ? alternée ?

   <u>Solution.</u> *On a*

   $$\Phi(y, x) = f_1(y) f_2(x)$$

   et donc la forme Φ n'est pas symétrique puisque $f_1 \neq f_2$. De même, Φ n'est pas alternée puisque $f_1 \neq -f_2$.

On note q la forme quadratique associée à Φ. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note A_1 et A_2 respectivement les matrices de f_1 et f_2 sur cette base.

3. Calculer les matrices A_1 et A_2, puis la matrice de Φ sur la base $\mathcal{B}$. Existe-t-il un lien entre ces trois matrices ?

   Solution. *On a*
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
   Soient x et y dans E. On note X et Y les vecteurs représentant x et y sur la base $\mathcal{B}$. On a donc $f_1(x) = A_1X$ et $f_2(y) = A_2Y$. On calcule
$$\Phi(x, y) = A_1XA_2Y = {}^t(A_1X)A_2Y = {}^tX^tA_1A_2Y$$
   puisque A_1X est une matrice de type 1 et donc elle est égale à sa transposée. La matrice de Φ est donc ${}^tA_1A_2$. On calcule `(1pt)`
$$A = {}^tA_1A_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer la matrice de q sur la base $\mathcal{B}$.

   Solution. *La matrice de q est*
$$\frac{1}{2}\left({}^tA + A\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \\ -3 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & -2 & 7/2 \\ -3/2 & 7/2 & -3 \end{pmatrix}$$

5. Calculer les dimensions et des bases pour $\mathrm{Ker}(f_1)$ et $\mathrm{Ker}(f_2)$.

   Solution. *Puisque $\mathrm{Ker}(f_1)$ et $\mathrm{Ker}(f_2)$ sont données par les solutions d'une unique équation homogène linéaire, ils sont de dimension $3 - 1 = 2$. Pour les bases, on a, par exemple*
$$\mathrm{Ker}(f_1) = \mathrm{Vec}\big({}^t(2, 1, 0), {}^t(1, 0, -1)\big),$$
$$\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Vec}\big({}^t(1, 0, 0), {}^t(0, 3, 1)\big).$$

6. Montrer que le cône isotrope $C(q)$ de q vérifie $C(q) = \mathrm{Ker}(f_1) \cup \mathrm{Ker}(f_2)$. Est-ce un sous-espace vectoriel ? (Justifier votre réponse.)

   Solution. *On a $q(x) = f_1(x)f_2(x)$. En particulier, on a $x \in C(q)$ si et seulement si $f_1(x)f_2(x) = 0$ si et seulement si $f_1(x) = 0$ ou $f_2(x) = 0$ et donc si et seulement si $x \in \mathrm{Ker}(f_1)$ ou $x \in \mathrm{Ker}(f_2)$. On a donc $C(q) = \mathrm{Ker}(f_1) \cup \mathrm{Ker}(f_2)$.*

   Ce n'est pas sous-espace vectoriel car c'est l'union de deux sous-espaces vectoriels (qui ne sont pas inclus l'un dans l'autre). Plus explicitement, on a, par exemple, ${}^t(2, 1, 0) \in C(q)$ et ${}^t(1, 0, 0) \in C(q)$, mais leur somme ${}^t(3, 1, 0)$ n'est pas dans $C(q)$.

7. Montrer que $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$.
   Solution. *On peut calculer explicitement* $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$ *et* $\mathrm{Ker}(q)$ *et vérifier qu'ils sont égaux. Une autre possibilité est de prouver le résultat dans le cas général.*
   Notons Q la forme polaire de q. On a

$$Q(x,y) = \frac{1}{2}\left(f_1(x)f_2(y) + f_2(x)f_1(y)\right).$$

   Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$. *Alors, on a* $f_1(x) = f_2(x) = 0$ *et il est clair que* $x \in \mathrm{Ker}(Q) = \mathrm{Ker}(q)$. *Ainsi, on a* $\mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2) \subset \mathrm{Ker}(q)$.

   Réciproquement, supposons que $x \in \mathrm{Ker}(q)$. *Puisque* $\mathrm{Ker}(q) \subset C(q)$, *on a* $x \in \mathrm{Ker}(f_1)$ *ou* $x \in \mathrm{Ker}(f_2)$ *par la question précédente. Supposons que* $x \in \mathrm{Ker}(f_1)$, *alors on a*

$$Q(x,y) = f_2(x)f_1(y)$$

   pour tout $y \in E$. Puisque f_1 est non nulle, il existe $y \in E$ avec $f_1(y) \neq 0$ et donc, pour que $x \in \mathrm{Ker}(q)$, *on doit avoir $f_2(x) = 0$, c'est-à-dire* $x \in \mathrm{Ker}(f_2)$. *Il suit que* $\mathrm{Ker}(q) \subset \mathrm{Ker}(f_1) \cap \mathrm{Ker}(f_2)$ *dans ce cas. Le cas où* $x \in \mathrm{Ker}(f_2)$ *est similaire.*

Exercice 2. Pour $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, on considère la forme quadratique

$$q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3^2 - 2x_3x_4 + 5x_4^2.$$

1. Calculer une décomposition de q en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

   Solution. *On commence par les termes en x_1. On a*

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3$$

   et donc

$$q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_4 - 2x_3x_4 + 5x_4^2.$$

   Maintenant, pour les termes en x_2, on a

$$x_2^2 + 4x_2x_4 = (x_2 + 2x_4)^2 - 4x_4^2$$

   et ainsi

$$q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_4)^2 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2$$

Pour les termes en x_3, on trouve

$$x_3^2 - 2x_3x_4 = (x_3 - x_4)^2 - x_4^2$$

et finalement

$$q(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 + (x_2 + 2x_4)^2 + (x_3 - x_4)^2.$$

2. Quelle est la signature de q ? Quel est le rang de q ?

   Solution. *La signature de q est $(3, 0)$ et son rang est 3.*

3. Calculer une base (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ orthogonale pour q.

   Solution. *On pose*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1 - x_2 + x_3 \\ f_2(x) &= x_2 + 2x_4 \\ f_3(x) &= x_3 - x_4 \end{aligned}$$

de sorte que $q(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2$. Pour obtenir une base du dual de $\mathbb{R}^4$, on pose $f_4(x) = x_4$. On chercher donc à calculer e_1, e_2, e_3, e_4 tels que

$$f_i(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On calcule $e_1 = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. On a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_4 & = 0 \\ x_3 - x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'où $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ et $x_1 = 1$. Ainsi, on a $e_1 = {}^t(1, 0, 0, 0)$.

On calcule $e_2 = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. On a

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 & = 1 \\ x_3 - x_4 & = 0 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'où $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 1$ et $x_1 = 1$. Ainsi, on a $e_1 = {}^t(1, 1, 0, 0)$.

On calcule $e_3 = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. *On a*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 & = 0 \\ x_3 - x_4 & = 1 \\ x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'où $x_4 = 0$, $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ *et* $x_1 = -1$. *Ainsi, on a* $e_3 = {}^t(-1, 0, 1, 0)$.
On calcule $e_4 = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$. *On a*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_4 & = 0 \\ x_3 - x_4 & = 0 \\ x_4 & = 1 \end{cases}$$

d'où $x_4 = 1$, $x_3 = 1$, $x_2 = -2$ *et* $x_1 = -3$. *Ainsi, on a* $e_4 = {}^t(-3, -2, 1, 1)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^4$. On écrit $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4$ avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de $q(x)$ en fonction des λ_i.

   Solution. *Puisque on a*

$$q(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2$$

   et que la base (e_1, e_2, e_3, e_4) *est la base contraduale de la base* (f_1, f_2, f_3, f_4), *on trouve*

$$\begin{aligned} f_i(x) &= f_i(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4) \\ &= \lambda_1 f_i(e_1) + \lambda_2 f_i(e_2) + \lambda_3 f_i(e_3) + \lambda_4 f_i(e_4) = \lambda_i. \end{aligned}$$

   On a donc

$$q(x) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2.$$

Exercice 3. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire classique et deux vecteurs bien choisis, montrer que

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

<u>Solution.</u> *Soient* $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $y = {}^t(y_1, \ldots, y_n)$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$. *L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne*

$$(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n)^2 \leq \big(x_1^2 + \cdots + x_n^2\big)(y_1^2 + \cdots + y_n^2).$$

Par identification, on pose $x_i = \sqrt{a_i}$ *et* $y_i = 1/\sqrt{a_i}$ *pour* $i = 1, \ldots, n$ *et on trouve le résultat.*

On a égalité si et seulement si les vecteurs x *et* y *sont colinéaires, c'est-à-dire il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $\sqrt{a_i} = \lambda/\sqrt{a_i}$ *pour tout* i, *ou encore* $a_i = \lambda$ *pour* $i = 1, \ldots, n$, *et donc si et seulement si* $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.