Contrôle final – Lundi 27 mai 2019 - 14h-16h

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.

Exercice 1 (4 pts)**.** Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille

$$S(x) = \left({}^t(x,1,1), {}^t(1,x,1), {}^t(1,1,x)\right)$$

n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. Pour chacune de ces valeurs, déterminer la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $S(x)$.

Exercice 2 (2+1+2+2=7 pts)**.** Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Montrer que 3 est racine double de ce polynôme.
2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.
3. Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre associé.
   En déduire que A est diagonalisable.
4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

Exercice 3 (2+2=4 pts)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la forme bilinéaire Φ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0\}$. Calculer la dimension et une base de H.

2. Calculer la dimension et une base de l'orthogonal de H pour Φ.

Exercice 4 (2+2+2=6 pts)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère la forme quadratique q_λ de E dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et définie par

$$q_\lambda(x) = x_1^2 + (\lambda^2 + \lambda - 1)x_2^2 + (5\lambda - 3)x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2(\lambda - 2)x_2 x_3.$$

1. Décomposer la forme quadratique q_λ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

2. En déduire la signature de q_λ suivant les valeurs de λ.

3. On prend $\lambda = 2$. Montrer que q_2 est définie positive et déterminer une base de E orthonormée pour q_2.

Exercice 5 (2 pts)**.** Soit A une matrice 2×2 tel que $A^3 = I$. Montrer que A est inversible et que si $A \neq I$, alors $A + A^{-1} = -I$.