Contrôle final – Correction

Exercice 1 (4 pts)**.** Déterminer les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la famille

$$S(x) = \left({}^t(x,1,1), {}^t(1,x,1), {}^t(1,1,x)\right)$$

n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$. Pour chacune de ces valeurs, déterminer la dimension du sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille $S(x)$.

<u>Solution.</u> *La famille $S(x)$ est une base si et seulement si la matrice*

$$M(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$$

est inversible. On calcule son déterminant

$$\begin{aligned}\det M(x) &= \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} - (1-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2-1) + (x-1)(x-1) = (x-1)(x-1)(x+1) + (x-1)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x+2).\end{aligned}$$

La famille $S(x)$ est une base pour $x \neq 1$ et $x \neq -2$.

On a $S(1) = \left({}^t(1,1,1), {}^t(1,1,1), {}^t(1,1,1)\right)$ qui engendre clairement un sous-espace vectoriel de dimension 1.

On a $S(2) = \left({}^t(2,1,1), {}^t(1,2,1), {}^t(1,1,2)\right)$. L'espace vectoriel engendré n'est pas de dimension 3 puisque ce n'est pas une base. Il est au moins de dimension 2 puisque les vecteurs ${}^t(2,1,1)$ et ${}^t(1,2,1)$ ne sont pas colinéaires. Il est donc de dimension 2.

Exercice 2 (2+1+2+2=7 pts)**.** Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
   Montrer que 3 est racine double de ce polynôme.

   Solution. *On calcule*

$$\begin{aligned} C_A(T) &= \begin{vmatrix} 3-T & 0 & 0 \\ 0 & 4-T & 1 \\ 0 & 2 & 5-T \end{vmatrix} = (3-T)\begin{vmatrix} 4-T & 1 \\ 2 & 5-T \end{vmatrix} \\ &= (3-T)\big((4-T)(5-T)-2\big) \\ &= (3-T)(T^2-9T+18). \end{aligned}$$

   On remarque que

$$3^2 - 9\cdot 3 + 18 = 0$$

   et donc 3 *est racine de* $T^2-9T+18$*. Puisque* 3 *est évidemment aussi racine de* $T-3$*, il suit que* 3 *est racine double de* $C_A(T)$*.*

2. Déterminer les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

   Solution. *On sait par la question précédente que* 3 *est valeur propre de multiplicité* ≥ 2*. On calcule*

$$(T^2-9T+18)/(T-3) = T-6$$

   donc 3 *est bien de multiplicité* 2 *et* 6 *est valeur propre de multiplicité* 1*.*

3. Pour chaque valeur propre de A, déterminer le sous-espace propre associé.
   En déduire que A est diagonalisable.

   Solution. *On a* $x = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in E_3$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned} Ax = 3x \iff & \begin{cases} 3x_1 & = 3x_1 \\ 4x_2 + x_3 & = 3x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 & = 3x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 & = 0 \end{cases} \\ \iff & x_2 + x_3 = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi, on a $\dim E_3 = 3-1 = 2$ *et une base de* E_3 *est* $\big({}^t(1,0,0), {}^t(0,1,-1)\big)$*.*
   On a $x = {}^t(x_1,x_2,x_3) \in E_6$ *si et seulement si*

$$\begin{aligned} Ax = 6x \iff & \begin{cases} 3x_1 & = 6x_1 \\ 4x_2 + x_3 & = 6x_2 \\ 2x_2 + 5x_3 & = 6x_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 & = 0 \\ -2x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_2 - x_3 & = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} x_1 & = 0 \\ 2x_2 - x_3 & = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\dim E_6 = 3 - 2 = 1$ *et une base de* E_6 *est* $\big({}^t(0,1,2)\big)$.

Puisque $\dim E_3 + \dim E_6 = \dim \mathbb{R}^3$, *la matrice* A *est diagonalisable.*

4. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

   <u>Solution.</u> *En utilisant la question précédente, on trouve*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \textit{et} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (2+2=4 pts)**.** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la forme bilinéaire Φ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $H = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = 0\}$. Calculer la dimension et une base de H.

   <u>Solution.</u> *Puisque* H *est définie par une équation linéaire homogène, on a* $\dim H = 3 - 1 = 2$. *On trouve, par exemple, pour base de* H *la famille* $\big({}^t(0,0,1), {}^t(2,-1,0)\big)$.

2. Calculer la dimension et une base de l'orthogonal de H pour Φ.

   <u>Solution.</u> *On pose* $e_1 = {}^t(0,0,1)$ *et* $e_2 = {}^t(2,-1,0)$, *de sorte que* $H = \mathrm{Vec}(e_1, e_2)$. *On a donc*

$$H^\perp = e_1^\perp \cap e_2^\perp.$$

   On a $x \in e_1^\perp$ *si et seulement si* $\Phi(x_, e_1) = {}^t x M e_1 = 0$, *c'est-à-dire*

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

   On a $x \in e_2^\perp$ *si et seulement si* $\Phi(x_, e_1) = {}^t x M e_2 = 0$, *c'est-à-dire*

$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

   Ainsi, on a $x \in H^\perp$ *si et seulement si*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 5x_3 &= 0. \end{cases}$$

   Ainsi, on a $\dim H^\perp = 3 - 2 = 1$ *avec pour base* $({}^t(-1,5,-2))$

Exercice 4 (2+2+2=6 pts)**.** Soit $E = \mathbb{R}^3$. On considère la forme quadratique q_λ de E dépendant d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et définie par

$$q_\lambda(x) = x_1^2 + (\lambda^2 + \lambda - 1)x_2^2 + (5\lambda - 3)x_3^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 + 2(\lambda - 2)x_2 x_3.$$

1. Décomposer la forme quadratique q_λ en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.

   Solution. *On considère les termes où x_1 apparait. On trouve*

$$\begin{aligned} x_1^2 + 2\lambda x_1 x_2 - 2x_1 x_3 &= (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 - (\lambda x_2 - x_3)^2 \\ &= (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 - \lambda^2 x_2^2 + 2\lambda x_2 x_3 - x_3^2. \end{aligned}$$

   Ainsi, en remplaçant, on obtient

$$q_\lambda(x) = (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 + (\lambda - 1)x_2^2 + (5\lambda - 4)x_3^2 + 4(\lambda - 1)x_2 x_3.$$

   On considère à présent les termes où x_2 apparait. On trouve

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x_2^2 + 4(\lambda - 1)x_2 x_3 = (\lambda - 1)(x_2^2 + 4x_2 x_3) &= (\lambda - 1)\big((x_2 + 2x_3)^2 - 4x_3^2\big) \\ &= (\lambda - 1)(x_2 + 2x_3)^2 - (4\lambda - 4)x_3^2. \end{aligned}$$

   Et donc, finalement, on obtient en remplaçant

$$q_\lambda(x) = (x_1 + \lambda x_2 - x_3)^2 + (\lambda - 1)(x_2 + 2x_3)^2 + \lambda x_3^2.$$

2. En déduire la signature de q_λ suivant les valeurs de λ.

   Solution. *Si $\lambda = 0$, la signature de q_0 est $(1, 1)$. Si $\lambda = 1$, la signature de q_1 est $(2, 0)$. Si $\lambda > 1$, la signature de q_λ est $(3, 0)$ et q_λ est définie positive. Si $0 < \lambda < 1$, la signature de q_λ est $(2, 1)$. Finalement, si $\lambda < 0$, la signature de q_λ est $(1, 2)$.*

3. On prend $\lambda = 2$. Montrer que q_2 est définie positive et déterminer une base de E orthonormée pour q_2.

   Solution. *Par la question 2, on sait que q_2 est de signature $(3, 0)$ et donc définie positive. On pose*

$$f_1(x) = x_1 + 2x_2 - x_3, \;\; f_2(x) = x_2 + 2x_3, \;\; \text{et } f_3(x) = x_3$$

   de telle sorte que $q_2(x) = f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + 2f_3(x)^2$ et (f_1, f_2, f_3) est une base de E^*. Ainsi, une base contraduale (e_1, e_2, e_3) de (f_1, f_2, f_3) est une base orthogonale pour q_2. Posons $e_1 = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, on a le système

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $e_2 = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, *on a le système*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \implies e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $e_3 = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, *on a le système*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_3 = 1 \end{cases} \implies e_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour finir, on divise chaque vecteur par sa norme définie par la forme quadratique q*. On a*

$$q(e_1) = 1, \quad , q(e_2) = 1, \quad q(e_3) = 2$$

et donc on obtient la base suivante orthonormale

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 5 (2 pts)**.** Soit A une matrice 2×2 tel que $A^3 = I$. Montrer que A est inversible et que si $A \neq I$, alors $A + A^{-1} = -I$.

Solution. *La matrice* A *est inversible si et seulement si il existe une matrice* B *telle que* $AB = I$*. Si on prend* $B = A^2$*, on a* $AB = A^3 = I$ *et donc* A *est bien inversible d'inverse* A^2*.*

Le polynôme $T^3 - 1$ *est un polynôme annulateur de* A*, donc les valeurs propres de* A *sont parmi les racines de* $T^3 - 1 = (T-1)(T^2+T+1)$*, c'est-à-dire parmi* 1*,* $j = e^{2i\pi/3}$ *et* j^2*.*
Supposons que 1 *est valeur propre de* A*. Puisque le polynôme caractéristique de* A *est de degré* 2*, la multiplicité de la valeur propre* 1 *est* 1 *ou* 2*.*

1. *Si la multiplicité est* 2 *et que le sous-espace propre est de dimension est* 2*. Alors* A *est diagonalisable et est semblable à la matrice* I *et donc* $A = I$*.*

2. *Si la multiplicité est* 2 *et que* A *n'est pas diagonalisable, alors* A *est semblable à la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il suit que B^3 est semblable à la matrice I et donc égal à la matrice I. Mais, on a

$$B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc $a = 0$ et on retrouve le cas précédent.

3. *Si la multiplicité est 1 alors l'autre racine est j ou j^2. En particulier, A est diagonalisable et la trace de A est $1 + j$ ou $1 + j^2$. Mais, aucun de ces deux nombres n'est réel donc ce cas n'est pas possible.*

On a donc montré que si $A \neq I$ alors 1 n'est pas valeur propre de A. Si j est l'unique valeur propre de A alors la trace de A est $2j$ ce qui impossible car non réel. De même, j^2 ne peut pas être l'unique valeur propre de A. Il suit que A admet deux valeurs propres j et j^2 et donc A est diagonalisable et il existe une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} A + A^{-1} &= PDP^{-1} + PD^{-1}P^{-1} \\ &= P(D + D^{-1})P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} j + j^2 & 0 \\ 0 & j^2 + j \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = -I. \end{aligned}$$