Prénom, Nom, Numéro d'étudiant :

Contrôle Terminal

Lundi 25 mai - 14h15 – 16h15

Pour remplir votre sujet, les instructions suivantes sont à respecter :

1. Téléchargez votre sujet sur votre appareil,
2. Ouvrez le sujet à l'aide, par exemple, d'un des logiciels suivants : Adobe Acrobat (Windows), PDFFiller (Android), Preview (Mac, iOS), Evince ou Okular (Linux) et répondez aux questions en cliquant directement sur les cases appropriées,
3. Sauvegardez votre fichier puis téléversez votre réponse sur TOMUSS, colonne `depot_CT`

En aucun cas, n'utilisez directement le visionneur PDF de votre navigateur : dans la plupart des cas, les réponses sont mal sauvées, voire pas du tout sauvées. Il est fortement conseillé d'utiliser uniquement un des logiciels indiqués ci-dessus.

Chaque question admet une unique bonne réponse. Si vous cliquez plusieurs cases, votre réponse sera automatiquement incorrecte.

Pendant la durée de l'examen, vous pouvez me contacter par Discord pour toutes questions

---

Questions de cours (bonne réponse : 1pt, mauvaise réponse : -0,25pt)

Question 1 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ L'espace des matrices de type (n, m) est de même dimension que l'espace des matrices de type (m, n)
- ☐ La transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure
- ☐ La matrice identité est la seule matrice dont toutes les puissances sont égales à elle-même
- ☐ La transposée d'une matrice n'est jamais égale à son inverse

---

Question 2 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ La somme des deux matrices anti-symétriques est une matrice anti-symétrique
- ☐ L'inverse d'une matrice, quand il existe, est unique
- ☐ Il existe une bijection entre les matrice symétriques et les matrices anti-symétriques de même type
- ☐ La somme de deux matrices nilpotentes est une matrice nilpotente

---

Question 3 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ Une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $AP = PD$
- ☐ Une matrice A est diagonalisable si et seulement si il existe une base composée de vecteurs propres de A
- ☐ Une matrice A est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale
- ☐ Une matrice A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindée

Question 4 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ L'image d'une forme bilinéaire est de dimension 0 ou 1
- ☐ L'application qui associe à deux matrices A et B de type n le premier coefficient de la matrice produit AB est une forme bilinéaire
- ☐ Soit Φ une forme bilinéaire d'un espace vectoriel E et soit y un vecteur de E. Alors, l'application $E \to E$ définie par $x \mapsto \Phi(x, x+y)$ est une forme linéaire
- ☐ L'application $((u_n),(v_n)) \mapsto u_1 v_2$ est une forme bilinéaire de l'espace vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{R}$

Question 5 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ Toute forme bilinéaire s'écrit de manière unique comme somme d'une forme bilinéaire symétrique et d'une forme bilinéaire alternée
- ☐ Soient A et A' les matrices de la forme bilinéaire Φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. Alors, on a $A' = {}^tPAP$ où P est la matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$
- ☐ L'application $(P,Q) \mapsto (PQ' + P'Q)(1)$ est une forme bilinéaire de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$
- ☐ L'application $(f,g) \mapsto \int_0^1 (f(x)+g(x))\,dx$ est une forme bilinéaire de l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0;1]$

Question 6 Laquelle des affirmations suivantes est incorrecte.

- ☐ Soit Φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et soient x, y, z trois vecteurs. Si $x \perp y$ et $x \perp z$, alors on a $x \perp (y+z)$
- ☐ Soit Φ une forme bilinéaire d'un espace vectoriel E et soit x un vecteur de E. Alors, l'application $E \to E$ définie par $y \mapsto \Phi(x,y)$ est une forme linéaire
- ☐ Pour Φ une forme bilinéaire de E, on a $\{x \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall y \in E\} = \{y \in E \text{ tel que } \Phi(x,y) = 0, \forall x \in E\}$
- ☐ Soient Φ une forme bilinéaire et soient x et y deux vecteurs. Soient A, X, Y respectivement la matrice de Φ, les vecteurs représentant x et y sur une base. Alors, on a $\Phi(x,y) = {}^tXAY$

Questions de calcul (bonne réponse : 4pt, mauvaise réponse : -1pt)

Question 7 On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme bilinéaire symétrique

$$\Phi(x,y) = -2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 - x_3y_3$$

et le sous-espace vectoriel

$$H = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Quel est l'orthogonal de H pour la forme Φ ?

- ☐ $\operatorname{Vec}\left({}^t(1,0,0)\right)$
- ☐ $\operatorname{Vec}\left({}^t(-1,0,0), {}^t(-4,5,0)\right)$
- ☐ $\operatorname{Vec}\left({}^t(2,0,0)\right)$
- ☐ $\operatorname{Vec}\left({}^t(1,0,0), {}^t(5,0,4)\right)$

Question 8 La diagonalisation de la matrice A est $A = PDP^{-1}$ pour quelles matrices D et P ?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

☐ $$P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ $$P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ $$P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

☐ $$P = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Question 9 Quelle est la signature de la forme quadratique suivante ?

$$-9x_2^2 - 12x_2x_3 - 6x_2x_4 - 5x_3^2 - 6x_3x_4 + 14x_4^2$$

☐ (1, 2) ☐ (3, 1) ☐ (0, 2) ☐ (3, 0)

Question 10 On considère l'espace euclidien donné par $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = 3x_1y_1 + 4x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + 3x_3y_3$$

Quelle est la base obtenue en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base suivante ?

$$\left({}^t(-4, 0, 0), {}^t(3, 0, -2), {}^t(0, 5, -4)\right)$$

☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{48}}\,{}^t(-4, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}\,{}^t(0, -2, -2), \frac{1}{\sqrt{22}}\,{}^t(0, 2, -7)\right)$

☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{48}}\,{}^t(-4, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}\,{}^t(0, 0, -2), \frac{1}{\sqrt{24}}\,{}^t(0, 5, -4)\right)$

☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{48}}\,{}^t(-4, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}\,{}^t(0, 0, -2), \frac{1}{5}\,{}^t(0, 5, -4)\right)$

☐ $\left(\frac{1}{\sqrt{48}}\,{}^t(-4, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{12}}\,{}^t(0, 0, -2), \frac{1}{5}\,{}^t(0, 5, -5)\right)$