Fiche 1.

Exercice 1. On considère les vecteurs

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille (a, b, c, d) est une base de $\mathbb{R}^4$. Donner l'expression du vecteur $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ sur cette base.

Exercice 2. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{F}$ la famille composée des vecteurs :

$$v_1 = e_1 - e_2 + e_3, \quad v_2 = e_1 + 2e_2, \quad v_3 = e_2 + e_3.$$

Démontrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $i = 1, \ldots, n-1$, on pose

$$c_i = e_i - e_{i+1}, \quad \text{et} \quad c_n = e_n - e_1.$$

1. Ecrire la famille $(c_1, \ldots, c_n)$ pour $n = 3$.
2. Calculer $c_1 + \cdots + c_n$. En déduire que la famille $(c_1, \ldots, c_n)$ n'est pas libre.
3. Montrer que la famille $(c_1, \ldots, c_{n-1})$ est libre.
4. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(c_1, \ldots, c_n) = \left\{ {}^t(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 + \cdots + x_n = 0 \right\}.$$

Exercice 4. Soit f l'application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f({}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)) = {}^t(2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4, 3x_1 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

1. Montrer que f est une application linéaire.

2. Calculer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer une base du noyau de f. Compléter cette base en une base de $\mathbb{R}^4$.
4. Quelle est le rang de f ?

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. On pose $F + G = \{x + y, x \in F,\ y \in G\}$.
   Montrer que $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. En utilisant l'application linéaire $\phi : F \times G \to E$ définie par $\phi(x, y) = x + y$, montrer que
$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient f_1 et f_2 deux formes linéaires sur E telles que $\operatorname{Ker} f_1 \subset \operatorname{Ker} f_2$. On veut montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f_2 = \lambda f_1$.

1. Démontrer le résultat dans le cas où $f_2 = 0$.
2. Montrer que si $f_2 \neq 0$, alors $f_1 \neq 0$.
   On suppose à présent que f_1 et f_2 ne sont pas nulles. On démontre le résultat de deux manière différentes :
3. (a) Montrer que $\dim \operatorname{Ker} f_1 = \dim \operatorname{Ker} f_2 = n - 1$, puis que $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_2$
   (b) En déduire le résultat en choisissant une base adaptée de E.
4. (a) Montrer qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que $f_1(a) = 1$.
   (b) Pour tout $x \in E$, calculer $f_1(x - f_1(x)\, a)$.
   (c) En déduire que $f_2 = f_2(a)\, f_1$.

Exercice 7. Soient E_1 et E_2 les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ définis par
$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0 \right\}.$$

1. Calculer les dimensions de E_1 et E_2.
2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit ϕ un endomorphisme de E. On suppose que $\phi \circ \phi = \phi$.

1. On pose $\psi = \mathrm{Id}_E - \phi$. Montrer que $\psi \circ \psi = \psi$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Im} \phi$.
3. Montrer que $E = \operatorname{Ker} \phi \oplus \operatorname{Im} \phi$.

Exercice 9. Dans chaque cas, écrire la matrice de passage de la base e dans la base f, puis la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{C}$.

1. $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ avec
$$f_1 = \cos\theta\ e_1 + \sin\theta\ e_2, \qquad f_2 = -\sin\theta\ e_1 + \cos\theta\ e_2 \qquad \text{(avec } \theta \in \mathbb{R} \text{ fixé).}$$
2. $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ avec
$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = e_2 + e_3 \quad f_3 = e_1 + e_3.$$

Exercice 10. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & k+1 & k+2 \\ 1 & k+2 & 2k+4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \cos a & 1 & -\sin a \\ 0 & 2 & 0 \\ \sin a & 0 & \cos a \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 & -1 \\ -14 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 10 & 2 & -2 \\ 28 & -2 & -2 & 35 \end{pmatrix}$.

Calculer AB et $\det B$.

Exercice 12. Soit M la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$
Calculer ${}^tMM$; en déduire la valeur du déterminant de M.

Exercice 13. Montrer que les matrices suivantes ont déterminant zéro :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14. Calculer à l'aide du pivot de Gauß les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 1 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique : ${}^tA = -A$. Démontrer que, si A est inversible, alors n est nécessairement un nombre pair.

Exercice 16. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j}$ une matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des entiers impairs. Montrer que $\det A$ est un entier, et que celui-ci est divisible par 2^{n-1}.

Exercice 17. Soient λ et μ deux réels et $A(\lambda, \mu)$ la matrice :

$$A(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \mu \\ -1 & \mu & \lambda \\ 1+\lambda+\mu & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le déterminant de $A(\lambda, \mu)$.
2. Déterminer en fonction de λ et μ le rang de la matrice $A(\lambda, \mu)$.

Exercice 18. Calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$