

## Fiche 4.

**Exercice 1.** Soit  $E = \mathbb{R}_2[X]$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré au plus 2.

1. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned}\Phi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto P(1)Q(-1)\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de  $\Phi$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

2. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned}\Psi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\mapsto \int_0^1 P(x)Q(x)dx\end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. Écrire la matrice de  $\Psi$  dans la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ .

**Exercice 2.** Montrer que toute forme bilinéaire sur l'espace vectoriel  $\mathbb{K}$  est de la forme  $(x, y) \mapsto \lambda xy$  avec  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**Exercice 3.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices  $n \times n$  à coefficients dans le corps  $\mathbb{K}$ . On considère l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\Phi(A, B) = \text{Tr}(AB).$$

Montrer que  $\Phi$  est une forme bilinéaire symétrique.

**Exercice 4.** Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices  $2 \times 2$  à coefficients réels. On considère l'application de  $E \times E$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\Phi(A, B) = \det(A + B) - \det(A - B).$$

Montrer que  $\Phi$  est une forme bilinéaire, puis calculer sa matrice relativement à la base canonique de  $E$ .

**Exercice 5.** Montrer que chacune des applications suivantes est une forme bilinéaire, calculer leur matrice dans la base canonique et leur noyau à gauche.

1.  $n = 2$  et  $\phi(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$ .
2.  $n = 3$  et  $\phi(x, y) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_2 - 2x_2y_3 - x_3y_1 - 2x_3y_3$ .
3.  $n = 3$  et  $\phi(x, y) = 2x_1y_1 - 3x_2y_2 - x_3y_3$ .

**Exercice 6.** Sur  $\mathbb{R}^3$ , on définit l'application suivante

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + \frac{1}{2}x_3y_3 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 - 3y_2x_3 - 3x_2y_3$$

où  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$  et  $y = {}^t(y_1, y_2, y_3)$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Démontrer que  $\Phi$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$ .
2. La forme  $\Phi$  est-elle dégénérée ?
3. Soit  $H_1$  le plan d'équation  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ . Déterminer l'orthogonal  $H_1^\perp$  de  $H_1$  respectivement à  $\Phi$ .
4. Soit  $H_2$  le plan d'équation  $2x_2 + x_3 = 0$ . Déterminer l'orthogonal  $H_2^\perp$  de  $H_2$  respectivement à  $\Phi$ .

**Exercice 7.** Soit  $E = \mathbb{R}^4$ . On considère l'application

$$\Phi(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

où  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$  et  $y = {}^t(y_1, y_2, y_3, y_4)$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^4$ .

1. Prouver que  $\Phi$  est une forme bilinéaire symétrique.
2. Déterminer le noyau, le rang de  $\Phi$ .
3. Déterminer le cône isotrope de  $\Phi$ , c'est-à-dire l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $\Phi(x, x) = 0$ .
4. Soit

$$H = \left\{ {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \text{ tel que } x_1 = x_2 \text{ et } x_3 = x_4 \right\}.$$

Déterminer  $H^\perp$  (resp. à  $\Phi$ ), puis  $H \cap H^\perp$ .

**Exercice 8.** On pose

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Justifier pourquoi il existe une unique forme bilinéaire symétrique  $\Phi$  telle que  $\Phi(v_1, v_1) = -1$ ,  $\Phi(v_1, v_2) = 0$ ,  $\Phi(v_1, v_3) = 2$ ,  $\Phi(v_2, v_2) = 0$ ,  $\Phi(v_2, v_3) = 1$  et  $\Phi(v_3, v_3) = -2$ .
3. Calculer la matrice de cette forme bilinéaire dans la base canonique.

**Exercice 9.** Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'application

$$\begin{aligned} q : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_0^1 f^2(t) dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que  $q$  est une forme quadratique.
2. Quels sont les vecteurs isotropes de  $q$  ?
3. La forme  $q$  est-elle dégénérée ?
4. Soit  $F$  le sous-espace vectoriel des polynômes de degré  $\leq 2$ . Écrire la matrice de  $q$  (restreint à  $F$ ) sur la base  $(1, x, x^2)$  de  $F$ .

**Exercice 10.** On considère  $E = \mathbb{R}^2$  et

$$\begin{aligned} q : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto x_1^2 - 2x_1x_2. \end{aligned}$$

1. Montrer que  $q$  est une forme quadratique. Déterminer la matrice de  $q$  dans la base canonique de  $E$ . Déterminer le rang et le noyau de  $q$ .
2. Déterminer le cône isotrope de  $q$ . Est-ce un sous-espace vectoriel de  $E$  ?

**Exercice 11.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et soit  $q$  une application de  $E$  dans  $\mathbb{K}$  telle que

- $q(2x) = 4q(x)$  pour tout  $x \in E$  ;
- l'application  $Q$  de  $E \times E$  dans  $\mathbb{K}$  définie par :

$$Q(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)]$$

est une forme bilinéaire.

Montrer que  $q$  est une forme quadratique.

**Exercice 12.** Donner la forme polaire, le noyau et le cône isotrope des formes quadratiques suivantes

$$\begin{aligned} q_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} & q_2 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 - z^2 & (x, y, z) &\mapsto (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 \end{aligned}$$

**Exercice 13.** Décomposer en somme de carrés de formes linéaires indépendantes les formes quadratiques sur  $E$  suivantes. Donner le rang dans chaque cas.

1.  $E = \mathbb{R}^2$  et  $q(x) = x_1^2 - 3x_1x_2$ .
2.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_2x_3 - 4x_1x_3$ .
3.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $q(x) = (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 + (x_1 - x_2)^2$ .
4.  $E = \mathbb{R}^4$  et  $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 - x_3x_4 + x_4x_1$ .

**Exercice 14.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ . On note  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $E$ . On considère la forme quadratique donnée par

$$q(x) = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 6x_2x_3$$

où  $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ .

1. Écrire la forme polaire  $Q$  de  $q$ .
2. Déterminer la matrice de  $q$  sur la base canonique.
3. Déterminer les sous-espaces vectoriels  $H = e_1^\perp$ ,  $K = e_2^\perp$  et  $L = e_3^\perp$ .  
Quelle particularité présente  $L$  ?
4. Appliquer l'algorithme de Gauss à la forme  $q$ .
5. Utiliser l'un des résultats précédents pour obtenir une base orthogonale pour  $q$ .

**Exercice 15.** On considère la forme quadratique sur  $E = \mathbb{C}^3$  :

$$q(x) = 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + ax_1x_3$$

où  $x = {}^t(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}$  et  $a$  un nombre complexe fixé.

1. (a) Donner une décomposition de  $q$  en somme de carrés de formes linéaires indépendantes.  
(b) Quel est le rang de  $q$ .
2. On suppose que  $a = 4$ .
  - (a) Déterminer la matrice  $A$  de la forme polaire  $Q$  de  $q$  dans la base canonique de  $E$ .
  - (b) Utiliser la question 1.(a) pour trouver une base de  $E$  orthogonale pour  $Q$ .
  - (c) Déterminer une matrice  $P$  carrée inversible de dimension 3 telle que  ${}^tPAP$  soit une matrice diagonale.