Fiche 6.

Exercice 1. On considère $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel. Soit A un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ auto-adjoint (c'est-à-dire donnée par une matrice symétrique dans la base canonique). On dit d'un sous-espace E de $\mathbb{R}^n$ est stable par A si, pour tout $x \in E$, on a $A(x) \in E$.

1. Quels sont les sous-espaces stables de $\mathbb{R}^n$ de dimension 1 ?
2. Soit E un sous-espace stable de $\mathbb{R}^n$, montrer que l'orthogonal de E est stable.
3. Sur $\mathbb{R}^{2018}$ on considère l'application donnée par la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 2 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ dans la base canonique. On pose
$$E = \mathrm{Vec}({}^t(1, 1, 0, 0, \cdots, 0), {}^t(0, 0, 1, 1, \cdots, 1)).$$
Calculer l'orthogonal de E et montrer que ce sous-espace est stable.

Exercice 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $v_1 = {}^t(0, 3, 1, -1)$ et $v_2 = {}^t(1, 2, -1, 1)$. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par ces deux vecteurs. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une base orthonormale de $F^\perp$.

Exercice 3. Soit f un endomorphisme auto-adjoint d'un espace euclidien E, c'est-à-dire
$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$
pour tous $x, y \in E$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f = (\mathrm{Ker}\, f)^\perp$.

Exercice 4. Soit E un espace euclidien. Soient x et y deux vecteurs de E.

1. Développer l'expression
$$\left\| \|y\|^2 x - \langle x, y\rangle y \right\|^2.$$
2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz, y compris le cas d'égalité.

Exercice 5. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Soit A la matrice de ce produit scalaire sur la base canonique.

1. On suppose que $n = 2$. Par un calcul direct, montrer que $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.
2. On suppose que $n \geq 3$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Tr}(A) > 0$.
   (b) En utilisant l'existence d'une base orthonormale pour ce produit scalaire, montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 6. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A est orthogonale et calculer A^{-1}.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

1. Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$, uniques, tels que
$$x = y + z.$$
On appelle y la projection orthogonale de x sur F et on note $\pi_F(x)$.
2. Soit $(e_1, \ldots, e_m)$ une base orthonormale de F. Montrer que
$$\pi_F(x) = \sum_{i=1}^{m} \langle x, e_i \rangle \, e_i.$$
3. Soit $x \in E$. Montrer que, pour tout $y \in F$, on a
$$\|x - \pi_F(x)\| \leq \|x - y\|.$$
En déduire que $\|x - \pi_F(x)\|$ est la distance minimale entre x et un élément de F.
4. **Application.**
Soit $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-\pi, \pi]$ dans $\mathbb{R}$. Pour f et g dans $\mathcal{C}$, on pose
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$
   (a) Montrer que $\langle ., . \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}$.
   (b) Soit $f \in \mathcal{C}$. Interpréter l'intégrale
   $$\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(t) - a - b\sin(t) - c\cos(t)\big)^2 dt \qquad (\ddagger)$$
   comme la distance de f à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}$ que l'on précisera.
   (c) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $(\ddagger)$ est minimal pour $f(t) = t$.