UNIVERSITÉ LYON I

ALGÈBRE
LINÉAIRE ET BILINÉAIRE

Notations

Par la suite $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. (La plupart des résultats restent cependant valides pour des corps plus généraux.)
Les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ sont notés en colonne, par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

$(1, 0, 2)$

On dénote par $\boxed{(u_1, \ldots, u_n)}$ la famille composée des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$. Ainsi, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

de vecteurs de $\mathbb{R}^3$

ordre important

répétition possible

transposé

A^t

${}^tA$

$^t\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = (1,2,3)$

est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit A une matrice ou un vecteur, on note ${}^tA$ la transposée de A. Par exemple :

$$\boxed{{}^t\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 5 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{{}^t(1,2,3) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}}.$$

Notons que la transposée d'un vecteur ligne est un vecteur colonne.

vecteur colonne

On regarde le vecteur $^t(2,3,4,5)$

M matrice $n \times n$

V vecteur n

$MV = {}^n\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}_n \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}n$

Chapitre 1

Algèbre linéaire

1.1 Rappels sur les espaces vectoriels

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Un **espace vectoriel** E sur le corps $\mathbb{K}$ est un ensemble E non vide muni d'une opération interne $(x, y) \mapsto x + y$ de $E \times E$ dans E et d'une opération externe $(\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x$ de $\mathbb{K} \times E$ dans E satisfaisant les conditions suivantes :

1. pour tous $x, y, z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$, $= x + y + z$
2. pour tous $x, y \in E$, $x + y = y + x$,

$x, y \in E \to x + y \in E$

$E = \mathbb{R}^3$

$0_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(2+3) \cdot x$
$\|$
$5 \cdot x = 2 \cdot x + 3 \cdot x$

$\lambda \in \mathbb{K}$ scalaire

$x \in E$ vecteur

$\lambda \cdot x \in E$

On note 0 au lieu de 0_E

vecteur

3. il existe $0_E \in E$ tel que, pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$,
4. pour tout $x \in E$, il existe un élément noté $-x \in E$ tel que $x + (-x) = 0_E$,
5. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$,
6. pour tout $x \in E$, $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$,
7. pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
8. pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tous $x, y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

$\mathbb{K}$ E

vecteur

$\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x$

vecteur scalaire

On peut montrer que $0 \cdot x = 0$ et $-1 \cdot x = -x$.

$\mathbb{K}$ E E $x + (-x) = 0_E$

Exemples.

1. Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ avec l'addition des vecteurs et la multiplication des vecteurs par un nombre réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$ muni des opérations $f + g : x \mapsto f(x) + g(x)$ et $\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
3. Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

vecteurs = fonctions

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F vérifie les propriétés suivantes :

$\mathcal{C} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$ Montrer $\mathcal{C}$ ev (espace vectoriel)

$\mathbb{R}^n$

$\mathbb{K}^n$

- $0_{\mathcal{C}} \in \mathcal{C}$ $\quad 0_{\mathcal{C}} : x \mapsto 0$ continue
- $f, g \in \mathcal{C}$ alors $f+g$ continue donc $f+g \in \mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ sev

• $f \in \mathcal{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ λf continue donc $\lambda f \in \mathcal{C}$ / $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ ev

donc $\mathcal{C}$ ev

1. F est non vide (note : F doit contenir 0_E) ;
2. pour tous $x, y \in F$, on a $x + y \in F$ (stable pour l'addition) ;
3. pour tout $x \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x \in F$ (stable pour la multiplication).

Notons qu'un sous-espace vectoriel est en particulier un espace vectoriel.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille finie d'éléments de E. On note $\mathrm{Vec}(x_1, \ldots, x_n)$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments de cette famille. On peut montrer que $\mathrm{Vec}(x_1, \ldots, x_n)$ est égal à l'ensemble des combinaisons linéaires des $x_1, \ldots, x_n$, c'est-à-dire ← plus petit sev contenant $x_1, \ldots, x_n$

Montrer que c'est un ev →

$$\mathrm{Vec}(x_1, \ldots, x_n) = \boxed{\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \text{ avec } \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}}$$

La famille est **libre** s'il n'existe pas de relation non triviale entre les éléments de la famille. En d'autres termes, si la seule solution de l'équation :

$$\boxed{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E} \leftarrow \text{combinaison linéaire donnant } 0$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, est la solution évidente $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La famille est **génératrice** si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire d'éléments de la famille. C'est-à-dire si, pour tout $x \in E$, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$, tels que :

$$x = \mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n.$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ libre :

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

$(x_1, \ldots, x_n)$ génératrice :

$\forall x \in E$ $x =$ combinaison linéaire des $x_1, \dots, x_n$

Par définition, $(x_1, \dots, x_s)$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_s)$. Une famille est une **base** si elle est à la fois libre et génératrice.

Un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une base ou de manière équivalente s'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, l'espace vectoriel est de **dimension infinie**. Parmi les exemples donnés ci-dessus, seul l'exemple 2 est de dimension infinie.

Les espaces vectoriels considérés dans ce cours sont de dimension finie, à moins que le contraire ne soit explicitement *mentionné.*

Proposition 1.1. *Supposons que E est de dimension fini et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors :*

1. *Le cardinal n de la base $\mathcal{B}$ est indépendant du choix de la base, on l'appelle la* ***dimension*** *de E et on note* $\dim(E)$.
2. *Toute famille libre de E a au plus n éléments et une famille libre a n éléments si et seulement si c'est une base.*
3. *Toute famille génératrice de E a au moins n éléments et une famille génératrice a n éléments si et seulement si c'est une base.*
4. *Pour tout $\boxed{x \in E}$, la décomposition :*

$$\boxed{x = \mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n}$$

est unique.

gén. + min. = base

$\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{K}$

libre + max. = base

$E \ni x \longmapsto X \in \mathbb{R}^n$

dépend de la base

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

On appelle vecteur représentant x sur la base $\mathcal{B}$, le vecteur

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}} \in \mathbb{K}^n.$$

5. L'espace vectoriel E est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ par l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{K}^n &\to E \\ {}^t(\mu_1, \ldots, \mu_n) &\mapsto \mu_1 e_1 + \cdots + \mu_n e_n. \end{aligned}$$

□

Notons qu'une famille $(x_1, \ldots, x_s)$ est libre si et seulement si $\dim \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_s) = s$.

On note F un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une fonction φ de E dans F est une **application linéaire** si elle vérifie :

$\varphi : E \to F$

- pour tout $x, y \in E$, $\varphi(x \underset{E}{+} y) = \varphi(x) \underset{F}{+} \varphi(y)$,
- pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda x) = \underbrace{\lambda\varphi(x)}_{}$. $\mathbb{K}.F$

On appelle **noyau** de φ l'ensemble des éléments de E dont l'image par φ est 0_F, on note :

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in E \text{ tel que } \varphi(x) = 0_F\} \subseteq E$$

On appelle **image** de φ l'ensemble formé des images par φ des éléments de E, on note :

$$\operatorname{Im}\varphi = \{\varphi(x) \text{ pour } x \in E\}. \subseteq F$$

Ker φ sev de E

Im φ sev de F

à montrer

φ injective ssi $\operatorname{Ker}\varphi = \{0_E\}$

bijective $\qquad \varphi$ surjective ssi $\operatorname{Im}\varphi =$

Une application linéaire injective et surjective est un **isomorphisme** (entre espaces vectoriels). Une conséquence du théorème du rang (cf. ci-dessous) est que deux espaces vectoriels isomorphes ont même dimension. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E, on appelle ces applications linéaires des **endomorphismes**.

Proposition 1.2. *Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors, l'application φ vérifie aussi :*

- $\varphi(0_E) = 0_F$,
- $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

De plus, $\operatorname{Ker}\varphi$ *un sous-espace vectoriel de E et* $\operatorname{Im}\varphi$ *est un sous-espace vectoriel de F. L'application φ est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ *et φ est surjective si et seulement si* $\operatorname{Im}(\varphi) = E$.

On a aussi l'égalité :

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi. \quad = \operatorname{rang}(\varphi)$$

*On appelle **rang** de φ la dimension de* $\operatorname{Im}\varphi$ *; ainsi l'égalité précédente est connue sous le nom de "théorème du rang".*

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. Si E est de dimension finie n et F de dimension finie m, alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est isomorphe (après le choix d'une base de E et d'une base de F) à l'espace vectoriel $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, en particulier c'est un espace vectoriel de dimension mn. □

Une **forme linéaire** est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1). L'ensemble des formes linéaires de E est appelé le **dual d'un espace vectoriel** de E et est dénoté $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$,

$\mathbb{K}$ corps ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) mais c'est aussi un ev sur $\mathbb{K}$

$\dim(\mathbb{K}) = 1$

$\mathbb{K}^1 =$

$u \in E^*$: $\quad u = 0_{E^*} \qquad 0_{E^*} : x \mapsto 0 \in \mathbb{K} \qquad \dim(\operatorname{Ker}(u)) = n-1$

ou

$\mathrm{Im}(u)$ sev de $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Im}(u) = \mathbb{R}$ u surjective

c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $u \in E^*$, ~~on a par le théorème du rang que~~ : ou bien $u = 0$ (application linéaire), ou bien u est surjective.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que $E = F \oplus G$, E est la **somme directe** de F et G si l'une des trois propriétés équivalentes est vérifiée :

utile

1. $F \cap G = \{0\}$ et $E = F + G$,
2. $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$, ← pour montrer $E = F \oplus G$
3. $E = F + G$ et tout vecteur $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in G$.

$F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}$

1.2 Rappels sur les matrices

1.2.1 Premières définitions

Soit $\mathbb{K}$ un corps et soient $n, m \geq 1$ deux entiers. Une **matrice** à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (n, m) est une famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ de scalaires dans $\mathbb{K}$. La matrice $(a_{i,j})$ (on omet les bornes quand il n'y pas de risques de confusion) est

E_{ij}

matrice $n \times m$ = matrice de type (n, m)

lignes colonnes

$\begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ ← i

$M_n(\mathbb{K})$

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \end{pmatrix}$

base de

j

dénotée par un tableau

$$\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{array}{cc} \overbrace{\phantom{a_{1,1}\ a_{1,2}\ \cdots\ a_{1,m}}}^{m \text{ colonnes}} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} & \Big\} \ n \text{ lignes} \end{array}$$

<u>Remarque importante.</u> le premier indice est la ligne, le deuxième indice est la colonne.

L'ensemble de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (n, m) est dénoté par $M_{n,m}(\mathbb{K})$ ou par $M_n(\mathbb{K})$ quand $m = n$ (matrices carrées). On note $\mathbf{I}_n$ la **matrice identité** dans $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.3. *L'ensemble $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension nm. Une base de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est la base des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice avec tous les coefficients égaux à 0 sauf le coefficient (i, j) égal à 1.*

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de type n. On dénote par $(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$ la **diagonale** de A. La matrice A est une **matrice diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et donc

a_{ii}

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

$A \mapsto {}^tA$ linéaire

$M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$

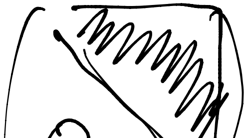
${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$

${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$

I_n est diagonale

$0_{M_n(\mathbb{K})}$ aussi

${}^t(a_{ij}) = (a_{ji})$



La matrice A est **triangulaire supérieure**, resp. **triangulaire inférieure**, si tous les coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nulles. La **transposée** de la matrice A, dénotée ${}^tA$, est la matrice dont les coefficients sont $a_{j,i}$ (symétrie par rapport à la diagonale). On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$ et **anti-symétrique** si ${}^tA = -A$. La transposition est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.4. *On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $M_n(\mathbb{K})$. Alors, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. De plus, on a*

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2+n}{2}, \quad \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2-n}{2} \quad \textit{et} \quad M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

1.2.2 Produit de matrices

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de type (n, m) et $B = (b_{i,j})$ une matrice de type (m, p), on définit la matrice produit $C = AB$ de type (n, p) par $C = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}$$

Proposition 1.5. *La produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour A, B et C trois matrices compatibles, on a $A(BC) = (AB)C$.*