Montrer que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ on montre que c'est une base

Base de $\mathbb{R}^n$: base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ $i$ème ligne $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- $\mathcal{B}$ libre :

$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ relation

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Donc si $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ alors $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\vdots$, $\lambda_n = 0$

donc $\mathcal{B}$ est libre

- $\mathcal{B}$ génératrice $\quad x \in \mathbb{R}^n$ disons $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

donc $\mathcal{B}$ est génératrice

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{B}$ est une base donc $\dim(\mathbb{R}^n) = n$