

L'ensemble de matrices à coefficients dans \mathbb{K} de type (n, m) est dénoté par $M_{n,m}(\mathbb{K})$ ou par $M_n(\mathbb{K})$ quand $m = n$ (matrices carrées). On note \mathbf{I}_n la **matrice identité** dans $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.3. *L'ensemble $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension nm . Une base de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est la base des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice avec tous les coefficients égaux à 0 sauf le coefficient (i, j) égal à 1.*

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de type n . On dénote par $(a_{1,1}, \dots, a_{n,n})$ la **diagonale** de A . La matrice A est une **matrice diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

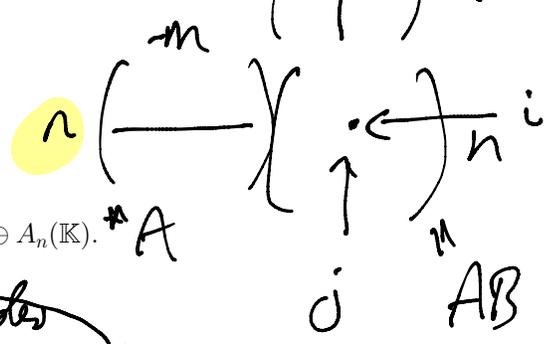
La matrice A est **triangulaire supérieure**, resp. **triangulaire inférieure**, si tous les coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nulles. La **transposée** de la matrice A , dénotée tA , est la matrice dont les coefficients sont $a_{j,i}$ (symétrie par rapport à la diagonale). On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$ et **anti-symétrique** si ${}^tA = -A$. La transposition est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.4. *On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $M_n(\mathbb{K})$. Alors, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-*

(B)
 \mathbf{I} type (m, m)
 $\begin{pmatrix} P & B \\ & m \end{pmatrix}$

$(A)(AB)$

m



espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. De plus, on a

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 + n}{2}, \quad \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2 - n}{2} \quad \text{et} \quad M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

1.2.2 Produit de matrices

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de type (n, m) et $B = (b_{i,j})$ une matrice de type (m, p) , on définit la matrice produit $C = AB$ de type (n, p) par $C = (c_{i,j})$ où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^m a_{i,k} b_{k,j}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{im} b_{mj}$$

Proposition 1.5. La produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour A, B et C trois matrices compatibles, on a $A(BC) = (AB)C$.
2. Pour A de type (n, m) , on a $A I_m = I_n A = A$.
3. Pour A, B, C et D matrices compatibles, on a

$$A(B + C) = AB + AC \quad \text{et} \quad (B + C)D = BD + CD.$$

4. Soient A et B deux matrices compatibles, on a ${}^t(AB) = {}^t B {}^t A$.

$AB \neq BA$
en général

Soit A une matrice carrée de type n . On dit que A est **nilpotente** si il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ (matrice nulle). Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ est l'**indice**

AB définie nbre col. (A) < nbre lignes (B)

$${}^t B {}^t A$$

$$\text{nbre col } ({}^t B) = \text{nbre lignes } (B) = \text{nbre col } (A)$$

de nilpotence de A . On dit que A est **inversible** si il existe une matrice carrée B de type n telle que $AB = BA = I_n$. On note A^{-1} l'inverse. On dénote par $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de type n .

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si il existe une matrice $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que

inversible

$$B = P^{-1}AP$$

groupe linéaire
 $\times P$ à gauche $\times P^{-1}$ à droite
 $A = PBP^{-1}$

On dit que A et B sont **équivalentes** si il existe deux matrices $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que

$$A = Q^{-1}BP^{-1}$$

Com

$$B = QAP$$

inversibles

Les relations "semblable" et "équivalente" sont des **relations d'équivalence**. Deux matrices semblables sont équivalentes (mais le contraire est faux en général).

$$\hookrightarrow Q = P^{-1}$$

1.2.3 Image, noyau et rang d'une matrice

Soit A une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$. On définit

$$\text{Im}(A) = \{Ax \text{ avec } x \in \mathbb{K}^m\}$$

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \text{ tel que } Ax = 0\}$$

Proposition 1.6. L'image $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^n et le noyau $\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^m .

$$\dim_m = \text{nbre de}$$

$$\begin{matrix} m & (x) & m \\ \downarrow & & \downarrow \\ n & (A) & n \text{ lignes} \\ \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{K}^n \end{matrix} Ax$$

$$r = \text{nbre lignes de } A$$

$${}^n \text{nbre lignes } ({}^t A)$$

matrice nulle
 et nilpotente
 d'indice 1
 et c'est la
 seule!

Relation
 d'équivalence \sim
 E axiale
 • réflexive: $x \sim x$

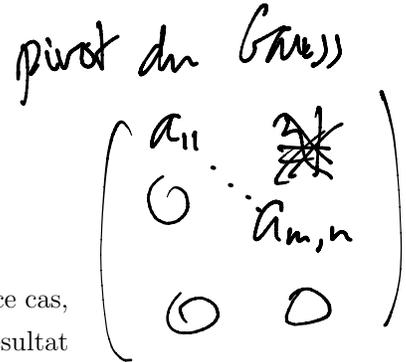
où les inconnues sont x_1, \dots, x_n et les coefficients $a_{i,j}$ sont dans \mathbb{K} . On peut aussi réécrire ce système sous la forme

$$AX = 0$$

où $A = (a_{i,j})$ et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. Il suit que l'ensemble des solutions de (S) est égal au noyau de la matrice A . Par le théorème du rang, le noyau est de dimension $n - \text{rang}(A)$.

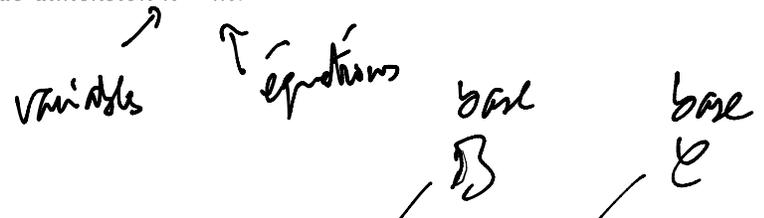
On dit que le système est **échelonné** si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$, c'est-à-dire de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \dots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \boxed{\phantom{a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0}} \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \dots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \boxed{\phantom{a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n = 0}} \\ a_{3,3}x_3 + \dots + a_{3,n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$



On suppose de plus que chaque ligne contient au moins un coefficient non nul. Dans ce cas, il est facile de voir que le rang de la matrice correspondante est m . On en déduit le résultat suivant

Proposition 1.8. L'ensemble des solutions d'un système échelonné de m équations linéaires homogènes non nulles en n variables est un espace vectoriel de dimension $n - m$.



1.2.5 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension respectives n et m . Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_m)$ une base de F . Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F . On associe à φ respectivement au base \mathcal{B} et \mathcal{C} une matrice $(a_{i,j})$ de type (m, n) avec

$$\varphi(e_1) = a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \dots + a_{m,1}f_m$$

$$\varphi(e_2) = a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \dots + a_{m,2}f_m$$

...

$$\varphi(e_n) = a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \dots + a_{m,n}f_m$$

C'est la **matrice de φ respectivement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C}** . Si $\varphi : E \rightarrow E$ est un endomorphisme, on prend en général $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et on parle de la matrice de φ respectivement à la base \mathcal{B} .

Théorème 1.9. L'application $\varphi \mapsto A$ où A est la matrice de φ respectivement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} est un isomorphisme d'espace vectoriels. En particulier, on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = nm$.

Soient $x \in E$ et $y = \varphi(x)$. Notons X le vecteur représentant x sur la base \mathcal{B} et Y le vecteur représentant y sur la base \mathcal{C} . Alors, on a $Y = AX$ où A est la matrice de φ respectivement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} .

$$\varphi: E \rightarrow F$$

$$x \mapsto \varphi(x)$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(e_1) & \dots & \varphi(e_n) \\ a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} j_1 \\ \vdots \\ j_m \end{matrix}$$

$$\mathcal{L}(E, F) \simeq M_{m,n}(\mathbb{K})$$

↑
dépend du
choix des bases

$$x \in E \leftrightarrow X \in \mathbb{K}^n$$

$$y \in F \leftrightarrow Y \in \mathbb{K}^m$$

$$\varphi \leftrightarrow A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$y = \varphi(x) \iff Y = AX$$

Proposition 1.10. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit \mathcal{B} une base de E et soit A la matrice de φ respectivement à la base \mathcal{B} . Alors, φ est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas, la matrice de φ^{-1} respectivement à la base \mathcal{B} est A^{-1} .

1.2.6 Matrice de passage

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n . La matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' est la matrice de l'identité respectivement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{B} (attention à l'inversion!), c'est-à-dire la matrice des vecteurs représentants e'_1, \dots, e'_n sur la base \mathcal{B} .

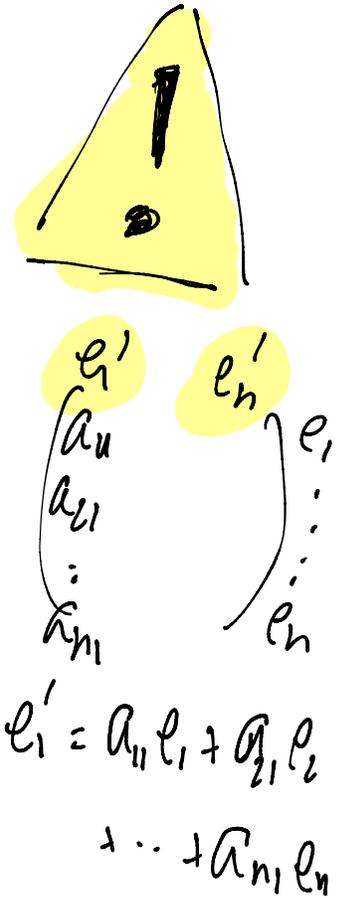
Proposition 1.11. Soit P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' .

- P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base \mathcal{B}' à la base \mathcal{B} ,
- Pour $x \in E$, on dénote par X et X' les vecteurs représentant x sur les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' respectivement. On a $X = PX'$.

Transforme de \mathcal{B}' à \mathcal{B} !!

Théorème 1.12 (Changement de base). Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases de E et \mathcal{C} et \mathcal{C}' deux bases de F . On pose

- P la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}' ,
- Q la matrice de passage de la base \mathcal{C} à la base \mathcal{C}' ,
- A la matrice de φ respectivement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} ,



- A' la matrice de φ respectivement aux bases \mathcal{B}' et \mathcal{C}' .

Alors, on a

$$A' = Q^{-1}AP.$$

(A et A' sont équivalentes.)

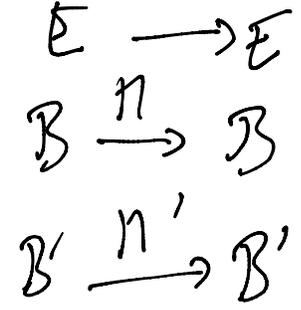
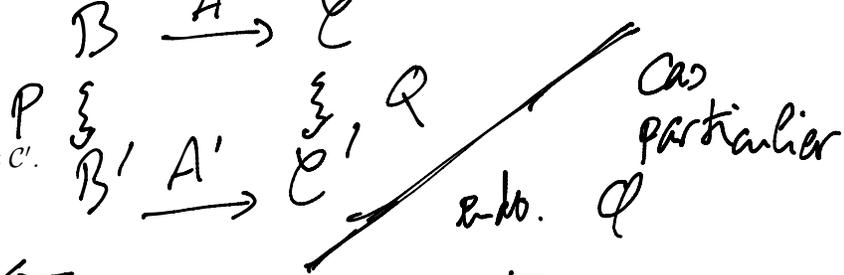
En particulier, si $\varphi : E \rightarrow E$ est un endomorphisme et M est la matrice de φ respectivement à la bases \mathcal{B} et M' est la matrice de φ respectivement à la bases \mathcal{B}' , on a

$$M' = P^{-1}MP.$$



$$PN' = NP$$

(M et M' sont semblables.)



1.2.7 Trace d'une matrice

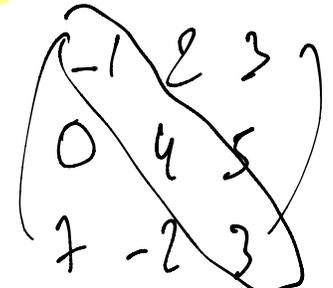
La **trace** d'une matrice carrée est la somme des termes de sa diagonale, c'est-à-dire si $A = (a_{i,j})$, on a

$$\text{Tr}(A) = \sum_i a_{i,i}.$$

Proposition 1.13. L'application $\text{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire (non nulle) vérifiant, pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA).$$

$$AB \neq BA$$



En particulier, deux matrices semblables ont la même trace.

$$\text{Trace } -\{1+h+j\} = 6$$

Démonstration. Il est direct de voir que Tr est une application linéaire puisque $\text{Tr}(A+B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}(\lambda A) = \lambda \text{Tr}(A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. C'est une forme linéaire puisque son espace d'arrivée est \mathbb{K} et elle est non nulle puisque $\text{Tr}(\mathbf{I}_n) = n \neq 0$.

$$\text{Tr} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = n$$

Maintenant, notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. D'un côté, on a $C = AB$ la matrice dont les coefficients $c_{i,j}$ sont donnés par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \quad \leftarrow AB$$

Il suit que

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A+B) \\ = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a $D = BA$ la matrice dont les coefficients $d_{i,j}$ sont donnés par

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} \quad \leftarrow BA$$

Il suit que

$$\text{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^n d_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,i}$$

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$$

et on a bien $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Pour finir, soient A et B deux matrices semblables, disons $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On calcule

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr} \begin{pmatrix} \boxed{A} \\ \text{I}_n \end{pmatrix} = \text{Tr}(P^{-1}AP) = \text{Tr}(B).$$

□

Aucun lien
entre $\text{Tr}(AB)$
et $\text{Tr}(A), \text{Tr}(B)$

Pour $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, on définit la **trace** de φ comme la trace de la matrice de φ respectivement à une base arbitraire de E . Par le résultat précédent, cette trace ne dépend pas du choix de cette base.

1.3 Déterminant

1.3.1 Définition par récurrence

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on dénote par $A_{i,j}$ la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j .

Exemple. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors par exemple

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit par récurrence la fonction **déterminant** $\det : M_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ par

- $\det A = a_{1,1}$ pour $n = 1$,