L'ensemble de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ de type (n, m) est dénoté par $M_{n,m}(\mathbb{K})$ ou par $M_n(\mathbb{K})$ quand $m = n$ (matrices carrées). On note $\mathbf{I}_n$ la **matrice identité** dans $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.3. *L'ensemble $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension nm. Une base de $M_{n,m}(\mathbb{K})$ est la base des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ où $E_{i,j}$ est la matrice avec tous les coefficients égaux à 0 sauf le coefficient (i,j) égal à 1.*

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de type n. On dénote par $(a_{1,1}, \cdots, a_{n,n})$ la **diagonale** de A. La matrice A est une **matrice diagonale** si $a_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$ et donc

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

La matrice A est **triangulaire supérieure**, resp. **triangulaire inférieure**, si tous les coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nulles. La **transposée** de la matrice A, dénotée ${}^tA$, est la matrice dont les coefficients sont $a_{j,i}$ (symétrie par rapport à la diagonale). On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$ et **anti-symétrique** si ${}^tA = -A$. La transposition est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{K})$.

Théorème 1.4. *On note $S_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices anti-symétriques de $M_n(\mathbb{K})$. Alors, $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$ sont des sous-*

(B)

I type (m, m)

P B

m

$(A)(AB)$

espaces vectoriels de $M_n(\mathbb{K})$. De plus, on a

$$\dim S_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2+n}{2}, \quad \dim A_n(\mathbb{K}) = \frac{n^2-n}{2} \quad \textit{et} \quad M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K}).$$

${}^{t}A$ $\quad$ AB

1.2.2 Produit de matrices

compatibles

Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de type (n, m) et $B = (b_{i,j})$ une matrice de type (m, p), on définit la matrice produit $C = AB$ de type (n, p) par $C = (c_{i,j})$ où

$$\boxed{c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} b_{k,j}}$$

$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + a_{im} b_{mj}$

Proposition 1.5. *La produit de matrices vérifie les propriétés suivantes :*

1. *Pour A, B et C trois matrices compatibles, on a $A(BC) = (AB)C$.* $= ABC$
2. *Pour A de type (n, m), on a $A\mathbf{I}_m = \mathbf{I}_n A = A$.*
3. *Pour A, B, C et D matrices compatibles, on a*

$$A(B+C) = AB + AC \quad \textit{et} \quad (B+C)D = BD + CD.$$

4. *Soient A et B deux matrices compatibles, on a $\boxed{{}^{t}(AB) = {}^{t}B\,{}^{t}A}$.*

$AB \neq BA$ en général

Soit A une matrice carrée de type n. On dit que A est **nilpotente** si il existe un entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ (matrice nulle). Le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$ est l'**indice**

AB définie nbre col. (A) = nbre lignes (B)

${}^tB\,{}^tA$ nbre col $({}^tB)$ = nbre lignes (B) = nbre col (A)

n

nbre lignes $({}^tA)$

de nilpotence de A. On dit que A est **inversible** si il existe une matrice carrée B de type n telle que $AB = BA = \mathbf{I}_n$. On note A^{-1} l'inverse. On dénote par $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de type n.

groupe linéaire

Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** si il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

inversible

$$\boxed{B = P^{-1}AP.}$$

×P à gauche ×P⁻¹ à droite ⇝ $A = PBP^{-1}$

On dit que A et B sont **équivalentes** si il existe deux matrices $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que

$A = Q^{-1}BP^{-1}$ ⇐

$$\boxed{B = QAP.}$$

inversibles

Les relations "semblable" et "équivalente" sont des $\boxed{\text{relations d'équivalence}}$. Deux matrices semblables sont équivalentes (mais le contraire est faux en général).

↳ $Q = P^{-1}$

matrice nulle est nilpotente d'indice 1 et c'est la seule ?

1.2.3 Image, noyau et rang d'une matrice

Soit A une matrice de $M_{n,m}(\mathbb{K})$. On définit

$$\mathrm{Im}(A) = \{Ax \text{ avec } x \in \mathbb{K}^m\}$$
$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{K}^m \text{ tel que } Ax = 0\}$$

m (x) m Ax

n (A) $(\;)$ n lignes

$\in \mathbb{K}^n$

Relation d'équivalence $\sim$

Proposition 1.6. *L'image* $\mathrm{Im}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^n$ *et le noyau* $\mathrm{Ker}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{K}^m$.

E ensemble

m = nbre de

n = nbre lignes de A

• réflexive : $x \sim x$

colonnes de A

On définit le **rang** de A par $\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$. On a

A rang n :
A équivalente à la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$\forall x \in E$
- symétrique : si $x \sim y$ alors $y \sim x$
- transitive si $x \sim y$ et $y \sim z$ alors $x \sim z$

Théorème 1.7. *On a*

1. $\mathrm{rang}(A) \leq \min(n, m)$,
2. $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}({}^tA)$,
3. $\boxed{\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \textit{ si et seulement si } \mathrm{rang}(A) = n,}$
4. $\mathrm{Ker}({}^tA) = \{0\}$ *si et seulement si* $\mathrm{rang}(A) = m$,
5. $\mathrm{rang}(A) + \dim \mathrm{Ker}(A) = m$.

Th. du rang pour matrices

De plus, deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ équivalentes si et seulement si elles sont même rang.

1.2.4 Systèmes d'équations linéaires homogènes

Un système de m équations linéaires homogènes en n variables est un système d'équations de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

m lignes,

n variables $x_1, .., x_n$

$A = (a_{ij})$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_n \end{pmatrix}$

où les inconnues sont $x_1, \ldots, x_n$ et les coefficients $a_{i,j}$ sont dans $\mathbb{K}$. On peut aussi réécrire ce système sous la forme

$$AX = 0$$

où $A = (a_{i,j})$ et $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$. Il suit que l'ensemble des solutions de (S) est égal au noyau de la matrice A. Par le théorème du rang, le noyau est de dimension $n - \mathrm{rang}(A)$.

On dit que le système est **échelonné** si $a_{i,j} = 0$ pour $i > j$, c'est-à-dire de la forme

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \qquad\quad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,n}x_n = 0 \\ \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

pivot du Gauss

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ 0 & \ddots & a_{m,n} \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

On suppose de plus que chaque ligne contient au moins un coefficient non nul. Dans ce cas, il est facile de voir que le rang de la matrice correspondante est m. On en déduit le résultat suivant

Proposition 1.8. *L'ensemble des solutions d'un système échelonné de m équations linéaires homogènes non nulles en n variables est un espace vectoriel de dimension $n - m$.*

variables

équations

base $\mathcal{B}$

base $\mathcal{C}$

$$\varphi : E \longrightarrow F$$
$$x \longmapsto \varphi(x)$$

1.2.5 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respectives n et m. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit $\mathcal{C} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base de F. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E dans F. On associe à φ respectivement au base $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ une matrice $(a_{i,j})$ de type (m, n) avec

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) &= a_{1,1}f_1 + a_{2,1}f_2 + \cdots + a_{m,1}f_m \\
\varphi(e_2) &= a_{1,2}f_1 + a_{2,2}f_2 + \cdots + a_{m,2}f_m \\
&\cdots \\
\varphi(e_n) &= a_{1,n}f_1 + a_{2,n}f_2 + \cdots + a_{m,n}f_m
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(e_1) & \cdots & \varphi(e_n) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_m \end{array} \end{array}$$

C'est la **matrice de φ respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$**. Si $\varphi : E \to E$ est un endomorphisme, on prend en général $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ et on parle de la matrice de φ respectivement à la base $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{L}(E,F) \simeq M_{m,n}(\mathbb{K})$$

dépend du choix des bases

Théorème 1.9. *L'application $\varphi \mapsto A$ où A est la matrice de φ respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est un isomorphisme d'espace vectoriels. En particulier, on a $\dim \mathcal{L}(E, F) = nm$.*

Soient $x \in E$ et $y = \varphi(x)$. Notons X le vecteur représentant x sur la base $\mathcal{B}$ et Y le vecteur représentant y sur la base $\mathcal{C}$. Alors, on a $\boxed{Y = AX}$ où A est la matrice de φ respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

$$x \in E \longleftrightarrow X \in \mathbb{K}^n$$
$$y \in F \longleftrightarrow Y \in \mathbb{K}^m$$

$$\varphi \longleftrightarrow A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$y = \varphi(x) \longleftrightarrow Y = AX$

Proposition 1.10. *Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de φ respectivement à la base $\mathcal{B}$. Alors, φ est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas, la matrice de φ^{-1} respectivement à la base $\mathcal{B}$ est A^{-1}.*

1.2.6 Matrice de passage

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. La **matrice de passage** de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est la matrice de l'identité respectivement aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}$ (attention à l'inversion !), c'est-à-dire la matrice des vecteurs representants $e'_1, \dots, e'_n$ sur la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{cccc} e'_1 & \cdots & e'_n & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ a_{21} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \end{array}$$

$e'_1 = a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \dots + a_{n1} e_n$

Proposition 1.11. *Soit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.*

1. *P est inversible et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$,*
2. *Pour $x \in E$, on dénote par X et X' les vecteurs représentant x sur les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement. On a $\boxed{X = PX'}$.* transforme de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$!!

Théorème 1.12 (Changement de base)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. On pose*

- *P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$,*
- *Q la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{C}'$,*
- *A la matrice de φ respectivement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$,*

app. linéaire $E \xrightarrow{\varphi} F$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{C} \\ P \updownarrow & & \updownarrow Q \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{A'} & \mathcal{C}' \end{array}$$

- A' *la matrice de* φ *respectivement aux bases* $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{C}'$.

Alors, on a

$$\boxed{A' = Q^{-1}AP.}$$

(A et A′ sont équivalentes.)

Cas particulier

endo. φ

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{M} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & \xrightarrow{M'} & \mathcal{B}' \end{array}$$

En particulier, si $\varphi : E \to E$ *est un endomorphisme et* M *est la matrice de* φ *respectivement à la bases* $\mathcal{B}$ *et* M' *est la matrice de* u *respectivement à la bases* $\mathcal{B}'$*, on a*

$$\boxed{M' = P^{-1}MP.} \iff \boxed{PM' = MP}$$

(M et M′ sont semblables.)

1.2.7 Trace d'une matrice

La **trace** d'une matrice carrée est la somme des termes de sa diagonale, c'est-à-dire si $A = (a_{i,j})$, on a

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_i a_{i,i}.$$

Proposition 1.13. *L'application* $\mathrm{Tr} : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ *est une forme linéaire (non nulle) vérifiant, pour tous* $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

$AB \neq BA$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

En particulier, deux matrices semblables ont la même trace.

Trace $-1+4+3=6$

Démonstration. Il est direct de voir que Tr est une application linéaire puisque $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A)+\mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$. C'est une forme linéaire puisque son espace d'arrivée est $\mathbb{K}$ et elle est non nulle puisque $\mathrm{Tr}(\mathbf{I}_n) = n \neq 0$.

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = n$$

Maintenant, notons $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$. D'un côte, on a $C = AB$ la matrice dont les coefficients $c_{i,j}$ sont donnés par

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}. \quad \leftarrow AB$$

$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$

Il suit que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

D'un autre côté, on a $D = BA$ la matrice dont les coefficients $d_{i,j}$ sont donnés par

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,j}. \quad \leftarrow BA$$

$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$

Il suit que

$$\mathrm{Tr}(BA) = \sum_{i=1}^{n} d_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{i,k} a_{k,i}$$

et on a bien $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Pour finir, soient A et B deux matrices semblables, disons $B = P^{-1}AP$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On calcule

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(A\underbrace{PP^{-1}}_{I_n}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{Tr}(B). \qquad \square$$

$\boxed{\text{Aucun lien entre } \mathrm{Tr}(AB) \text{ et } \mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(B)}$

Pour $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, on définit la **trace** de φ comme la trace de la matrice de φ respectivement à une base arbitraire de E. Par le résultat précédent, cette trace ne dépend pas du choix de cette base.

1.3 Déterminant

1.3.1 Définition par récurrence

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on dénote par $A_{i,j}$ la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On a alors par exemple

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

On définit par récurrence la fonction **déterminant** $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ par

- $\det A = a_{1,1}$ pour $n = 1$,