$Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$

Pour $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme, on définit la **trace** de φ comme la trace de la matrice de φ respectivement à une base arbitraire de E. Par le résultat précédent, cette trace ne dépend pas du choix de cette base.

1.3 Déterminant

1.3.1 Définition par récurrence

$A \quad (n,n)$

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, on dénote par $A_{i,j}$ la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

$A_{ij} \quad (n-1, n-1)$

Exemple. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$A \quad A_{ij}$

ligne

colonne

n^2 matrices extraites de A

On a alors par exemple

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_{3,3} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

On définit par récurrence la fonction **déterminant** det : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ par

- $\det A = a_{1,1}$ pour $n = 1$,

$A = (a_{11}) \qquad \det A = a_{11}$

n

coeff de A type $(n-1, n-1)$

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & \overset{+}{\cdots} & \bar{a}_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ & \cdots & \cdots & \end{pmatrix} n$$

- $\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j}}$ pour $n \geq 2$.

On utilise aussi la notation suivante pour le déterminant :

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det A = {} & a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} \\ & + a_{13} \det A_{13} + \cdots \\ & + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n} \end{aligned}}$$

Exemples. On a

$n=2$ $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \cancel{ad - bc} \quad ad - bc$$

$n=3$ $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}$$
$$+ a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1}$$

Proposition 1.14. *Supposons que $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale ou une matrice triangulaire supérieure ou une matrice triangulaire inférieure. Alors le déterminant de A est le produit de ses termes diagonaux.*
En particulier, le déterminant de la matrice identité $\mathbf{I}_n$ est 1.

$$\begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ddots & * \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ * & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\text{dét} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1 \times \cdots \times 1 = 1$$

Démonstration. On montre le résultat dans le cas triangulaire inférieur (ce qui implique le cas diagonal). Le cas triangulaire supérieur est similaire (on suit de la formule $\det(A) = \det({}^tA)$ donnée plus tard). On procède par récurrence. Pour $n = 1$, le résultat est direct. Supposons que $n \geq 1$ est tel que le résultat est vrai pour toutes les matrices triangulaires inférieures de type $n-1$. Soit $A = (a_{i,j})$ un matrice triangulaire inférieure de type $n+1$, on a donc $a_{i,j} = 0$ si $i < j$. On a

$$\det A = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j} = a_{1,1} \det A_{1,1}.$$

Mais $A_{1,1} = (a_{i+1,j+1})$ est une matrice triangulaire inférieur et donc $\det A_{1,1} = a_{2,2} \cdots a_{n+1,n+1}$ par récurrence. Ainsi, on a bien

$$\det A = a_{1,1} \cdots a_{n+1,n+1}$$

et le résultat est démontré. $\square$

pas besoin de l'apprendre (ni même de lire)

1.3.2 Premières propriétés du déterminant

notation à connaître

Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on dénote par $(v_1|\cdots|v_n)$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$. On appelle **déterminant** de la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ le déterminant de la matrice $(v_1|\cdots|v_n)$.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

dét famille $= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \cdots$

fixée

Proposition 1.15. *Le déterminant d'une matrice est une application linéaire par rapport à chacune de ses colonnes, c'est-à-dire pour $v_1, \dots, v_n(\mathbb{K})$ et pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on a*

1. *Pour tout $u \in \mathbb{K}^n$* colonne k

$$\det(v_1|\cdots|v_k+u|\cdots|v_n) = \det(v_1|\cdots|v_k|\cdots|v_n) + \det(v_1|\cdots|u|\cdots|v_n),$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\boxed{\det(v_1|\cdots|\lambda v_k|\cdots|v_n) = \lambda \det(v_1|\cdots|v_k|\cdots|v_n).}$$

ne pas utiliser sans être sûr

très utile

Démonstration. On démontre le résultat pour *2*. La démonstration pour *1* est similaire. On montre le résultat par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 1$. Supposons que $n \geq 1$ est tel que le résultat est vrai pour toutes les matrices de type n, c'est-à-dire quand on multiplie une colonne par λ alors le déterminant est aussi multiplié par λ. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de type $n+1$ et soit $A' = (a'_{i,j})$ avec $a'_{i,j} = a_{i,j}$ si $j \neq k$ et $a'_{i,k} = \lambda a_{i,k}$ (donc la colonne j est multipliée par λ. On calcule

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} a'_{1,j} \det A'_{1,j} \\
&= \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A'_{1,j} + (-1)^{k+1} \lambda a_{1,k} \det A'_{1,k}.
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ -2 & 12 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\times 1 & 3 & 0 \\ 2\times 2 & 6 & 1 \\ 2\times -1 & 12 & 0 \end{vmatrix} =$$

La matrice $A'_{1,j}$ est une matrice de type n égale à la matrice $A_{1,j}$ avec une colonne multipliée par λ, on a donc par récurrence $\det A'_{1,j} = \lambda \det A_{1,j}$. Puisque la matrice $A'_{1,k}$ ne contient pas la colonne k, elle est égale à $A_{1,k}$. On a donc

$$\begin{aligned}
\det A' &= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \lambda \det A_{1,j} + (-1)^{k+1} \lambda a_{1,k} \det A_{1,k} \\
&= \lambda \left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n+1} (-1)^{j+1} a_{1,j} \det A_{1,j} + (-1)^{k+1} a_{1,k} \det A_{1,k} \right) \\
&= \lambda \det A.
\end{aligned}$$

□

application

Proposition 1.16. *Le déterminant d'une matrice est alterné par rapport à ses colonnes, c'est-à-dire si $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ et $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ avec $j < k$, on a*

$$\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_k|\cdots|v_n) = -\det(v_1|\cdots|v_k|\cdots|v_j|\cdots|v_n).$$

En particulier, si deux colonnes d'une matrice sont égales alors son déterminant est nul.

Démonstration. On démontre uniquement le deuxième point (le premier point se prouve par récurrence comme ci-dessus). Supposons que $v_j = v_k$, alors on a

$$\begin{aligned}
\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_k|\cdots|v_n) &= -\det(v_1|\cdots|v_k|\cdots|v_j|\cdots|v_n) \\
&= -\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_k|\cdots|v_n)
\end{aligned}$$

et donc $\det(v_1|\cdots|v_j|\cdots|v_k|\cdots|v_n) = 0$. □

f alterné

$f(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_k, \ldots, v_n)$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & 12 & 0 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}$$

$= -f(v_1, \ldots, v_k, \ldots, v_j, \ldots, v_n)$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Les résultats sur les colonnes sont aussi vrais pour les lignes grâce au résultat suivant.

Proposition 1.17. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a* $\boxed{\det(A) = \det({}^tA).}$ *En particulier, on a*

- *le déterminant d'une matrice est une application linéaire par rapport à chaque ligne,*
- *le déterminant d'une matrice dont deux lignes sont égales est nul,*
- *le déterminant change de signe quand on échange deux lignes d'une matrice,*

1.3.3 Déterminants et bases

Théorème 1.18. *Soit $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors, la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si le déterminant de la matrice $(v_1|\cdots|v_n)$ est non nul.*

Plus généralement, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E et soient $X_1, \ldots, X_n$ les vecteurs représentant respectivement $x_1, \ldots, x_n$ sur la base $\mathcal{B}$. Alors, la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E si et seulement si le déterminant de la matrice $(X_1|\cdots|X_n)$ est non nul.

$X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{K}^n$

Démonstration. On démontre le premier résultat. Supposons pour que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas une base. On montre que $\det(v_1|\cdots|v_n) = 0$. Puisque la famille maximale $(v_1, \ldots, v_n)$ n'est pas une base, elle est liée. Donc il existe une relation, disons par exemple

$$\boxed{v_1 = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j.}$$

$(v_1, \ldots, v_n)$

famille $\mathbb{K}^n$

On a

$$\begin{aligned}\det(v_1|\cdots|v_n) &= \det\left(\boxed{\sum_{j=2}^{n} \lambda_j v_j}|v_2|\cdots|v_n\right)\\ &= \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \det(v_j|v_2|\cdots|v_n) = 0\end{aligned}$$

puisque les déterminants sont tous nuls car il y a toujours au moins deux vecteurs égaux dans chaque déterminant de cette somme.

Maintenant, supposons que $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base. On montre par l'absurde que $\det(v_1|\cdots|v_n) \neq 0$. Supposons le contraire : $\det(v_1|\cdots|v_n) = 0$. Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille quelconque de vecteurs de $\mathbb{K}^n$. Alors, on peut écrire les vecteurs u_j sur la base $(v_1, \ldots, v_n)$, disons

$$\boxed{u_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} v_i.}$$

On calcule

$$\begin{aligned}\boxed{\det(u_1|\cdots|u_n)} &= \det\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,1} v_i|\cdots|\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,n} v_i\right)\\ &= \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n} \lambda_{i_1,1}\lambda_{i_2,2}\cdots\lambda_{i_n,n} \boxed{\det(v_{i_1}|v_{i_2}|\cdots|v_{i_n})}.\end{aligned}$$

Maintenant, considérons un des déterminants $\det(v_{i_1}|v_{i_2}|\cdots|v_{i_n})$ de cette dernière somme. Ou bien il existe $k \neq \ell$ avec $i_k = i_\ell$ et donc ce déterminant est nul ; ou bien tous les

$(u_1, \ldots, u_n)$

$\downarrow$

$(u_1|u_2|\ldots|u_n)$

$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0 & 2\\1 & 3\end{pmatrix}$

termes non nuls sont

$\ldots v_n)$

$\pm \det(v_1, \ldots, v_n)$
$\overset{\shortparallel}{0}$ ← par hyp.

indices sont différents et donc, en réarrangeant les colonnes, ce déterminant est égal au signe près à $\det(v_1|\cdots|v_n) = 0$. Ainsi, on trouve que, pour toute famille $(u_1, \ldots, u_n)$, on a $\det(u_1|\cdots|u_n) = 0$. Mais ceci est absurde car si on prend pour $(u_1, \ldots, u_n)$ la base canonique, on obtient la matrice identité $\mathbf{I}_n$ et son déterminant est égal à 1.

Pour le deuxième point, on procède de la même façon si ce n'est qu'on prend pour la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ la base $\mathcal{B}$. On obtient alors la matrice des vecteurs représentant la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ sur la base $(u_1, \ldots, u_n)$ qui est aussi la matrice identité. □

1.3.4 Déterminant d'un produit de matrices

Le résultat principal est le suivant

Théorème 1.19. *Soient A et B deux matrices dans $M_n(\mathbb{K})$. On a*

$$\boxed{\det(AB) = \det(A)\det(B).}$$

deux matrices semblables ont le même dét. :

$A = PBP^{-1}$

avec P inversible

Corollaire 1.20. *Un matrice A dans $M_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *On a alors* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Démonstration. Supposons que A est inversible, alors il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = \mathbf{I}_n$. On a alors $\det(AA^{-1}) = \det(\mathbf{I}_n) = 1$. Puisque $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1})$, on en déduit que $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.

donc $\det(A) = \det(PBP^{-1}) = \det(P)\det(B)\det(P^{-1})$

$$= \cancel{\det(P)}\,\det(B)\,\cancel{\det(P)^{-1}} = \det(B)$$

Supposons à présent que $\det(A) \neq 0$. On montre que A est inversible. Supposons que $A = (v_1|\cdots|v_n)$. Alors, on sait que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ et donc A est la matrice de passage de la base canonique à la base $(v_1, \ldots, v_n)$; elle est donc inversible. $\square$

1.3.5 Calculs du déterminant

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$. Pour chaque coefficient $a_{i,j}$ de A, on appelle **cofacteur** de $a_{i,j}$ la quantité

$$\mathrm{cofact}(a_{i,j}) = \boxed{(-1)^{i+j}}\det(A_{i,j})$$

$$\begin{pmatrix} {}^{+}a_{11} & - & + & - & {}^{+}a_{1n} \\ - & \vdots & & & \vdots \\ + & \vdots & + & & \vdots \\ - & \cdot & & a_{ij} & \vdots \\ {}^{+}a_{n1} & \cdots & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où, comme précédemment, $A_{i,j}$ est la matrice de type $n-1$ obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j. On a

Proposition 1.21. *Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a le développement du déterminant de A suivant la i-ième ligne*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,\mathrm{cofact}(a_{i,j}).$$

De même, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on a le développement du déterminant de A suivant la j-ième colonne

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\,\mathrm{cofact}(a_{i,j}).$$

$GL_n(\mathbb{K}) = \{$ matrices $n \times n$ inversibles $\}$

Pour $A \in M_n(\mathbb{K})$, on définit la **comatrice** de A par

$$\mathrm{Comat}(A) = (c_{i,j}) \quad \text{avec } c_{i,j} = \mathrm{cofact}(a_{i,j}).$$

Corollaire 1.22. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on a*

$$A\,{}^t\mathrm{Comat}(A) = {}^t\mathrm{Comat}(A)\,A = \det(A)\,\mathbf{I}_n.$$

En particulier, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Comat}(A).} \leftarrow \det(A) \neq 0$$

Soit $n \geq 1$ un entier. Une bijection $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ est appelé une **permutation** sur n lettres. L'ensemble des permutations sur n lettres est dénoté S_n ; c'est un groupe pour la composition.

$$(2 \times 2)(2-6) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Proposition 1.23. *Il existe une unique fonction surjective* $\mathrm{sign} : S_n \to \{-1, +1\}$ *telle que, pour tous $\sigma, \pi \in S_n$, on a*

$$\mathrm{sign}(\sigma \circ \pi) = \mathrm{sign}(\sigma)\mathrm{sign}(\pi).$$

On appelle cette fonction la ***signature***.

Théorème 1.24. *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice carrée de type n. Alors, on a*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Proposition 1.25. *Soient A, B et C trois matrices dans $M_n(\mathbb{K})$ et soient $M \in M_{2n}(\mathbb{K})$ telles que*

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right).$$

Alors, on a $\det(M) = \det(A)\det(C)$.

1.3.6 Déterminant d'un endomorphisme

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit A la matrice de φ respectivement à la base $\mathcal{B}$. On définit le **déterminant** de φ par $\det(\varphi) = \det(A)$.

Proposition 1.26. *Le déterminant de φ ne dépend pas du choix de base $\mathcal{B}$. De plus, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. $\det(\varphi) \neq 0$,
2. *φ est injective,*
3. *φ est surjective,*
4. *φ est bijective,*
5. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$,
6. $\mathrm{Im}(\varphi) = E$,